



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology



Fraunhofer
AUSTRIA



INSTITUT FÜR
MANAGEMENTWISSENSCHAFTEN
Betriebstechnik und Systemplanung

Systemplanung und Simulation

Skriptum zur Unterstützung der Vorlesung (330.201)

Hon. Prof Dr. Wolfgang. E. Katzenberger
Institut für Managementwissenschaften
Bereich Betriebstechnik und Systemplanung
Theresianumgasse 27
1040 Wien
Tel.: 01 58801-33066

Inhalt

- Einführung
- Warteschlangentheorie
- Statistik und Simulation
- Monte-Carlo-Simulation
- Diskrete Simulation
- Kontinuierliche Simulation
- Systemdynamik

Optimal solution not always the goal but rather a
satisfactory solution.

Einführung

Definitionen

„Eine Simulation besteht im wesentlichen darin, ein Modell einer wirklichen Situation zu erstellen und dann mit diesem Modell zu experimentieren.“
(Naylor)

„Simulationsmodelle und die Resultate der Untersuchungen an diesen Modellen spiegeln trivialerweise nicht die vollständige Realität wider.“
(Conway)

„Auf der anderen Seite ist die Simulation ein heuristischer Prozess, in dem der Analysierende eine ‚optimale‘ Lösung durch Verbesserung des Simulationsmodells zu gewinnen trachtet, wobei er die Bedingungen für jeden Simulationslauf aufgrund der Ergebnisse des vorangegangenen Laufes formuliert.“
(Geisler)

Einführung

**„Simulation ist die Nachbildung eines dynamischen Prozesses in einem Modell, um zu Erkenntnissen zu gelangen, die auf die Wirklichkeit übertragbar sind.“
(VDI)**

**„Simulation ist eine numerische Technik, um Experimente auf einem Computer durchzuführen, die vor allem bestimmte Typen von mathematischen und logischen Modellen betreffen, welche das Verhalten eines kaufmännischen oder wirtschaftlichen Systems (oder einer Komponente daraus) über längere Zeiträume zu untersuchen erlauben.“
(Naylor)**

**„Simulation ist die Nachbildung eines realen Prozesses mit künstlichen Mitteln.“
(Köcher et al.)**

Simulation ist die Entwicklung und Verwendung veränderbarer Modelle, welche die wesentlichen Eigenschaften von Vorgängen der realen Welt nachbilden, mit dem Ziel, Ideen, Systeme und Situationen zu studieren.

Einführung

Die Dominanz analytisch orientierter OR-Spezialisten vor allem im europäischen Raum hat lange Zeit verhindert, dass der Simulation die ihr gebührende Bedeutung zugemessen wurde

**„Obwohl die Simulation höchstens als Randgebiet des Operations Research aufgefaßt werden kann, erscheint es angebracht, ihr in einem Buch über Operations-Research-Verfahren ein Kapitel zu widmen.“
(Klaus Neumann: Operations Research Verfahren, Bd. II, 1977)**

**Auf 84 Seiten von insgesamt 1207 Seiten !
66 von 84 Seiten befassen sich mit der Erzeugung von Zufallszahlen !**

Einführung

System

„If you don't know what you're talking about, call it ,system';
if you don't know what it is made of, call it ,subsystem';
if you don't know how it works, call it ,process'.“
(J. K. Zawodny)

1	Klassifikation/Ordnungsschema Planetensystem Periodisches System der Elemente	
---	--	--

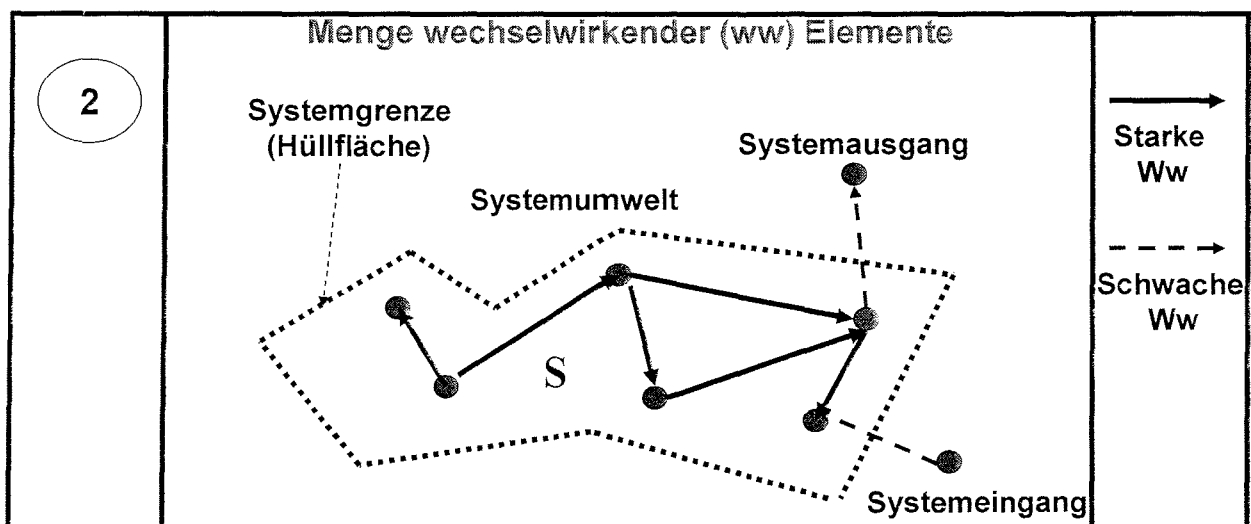
Einführung

Eine Menge $S = \{E; R\}$

An open system that interacts with the environment as it moves resources throughout. Failing to incorporate the environment results in catastrophic problems.

Menge $E = \{e_i\}$ der n Elemente e_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)

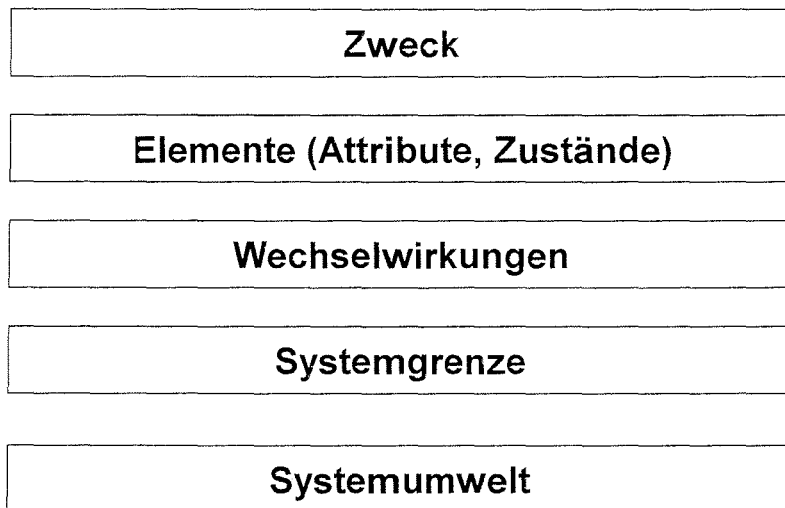
Menge $R = \{(e_i, e_j)\}$ der Relationen (e_i, e_j) ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$)



Einführung

Every system has a purpose!

System characteristics



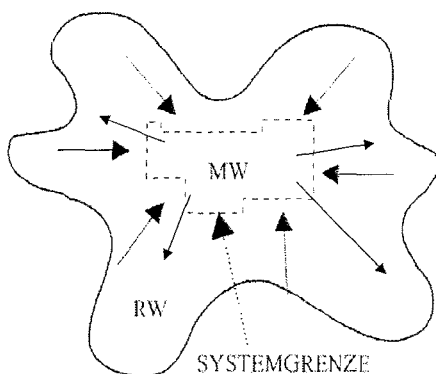
Who is affected by the model or can affect it

Einführung

Homomorph = similar structure

Modell

Modelle sind homomorphe Abbilder der Wirklichkeit



Metaphorische Modelle
Physische Modelle

Tierversuche
Windkanal
Schiff als Modell des Staates

Verbale Modelle

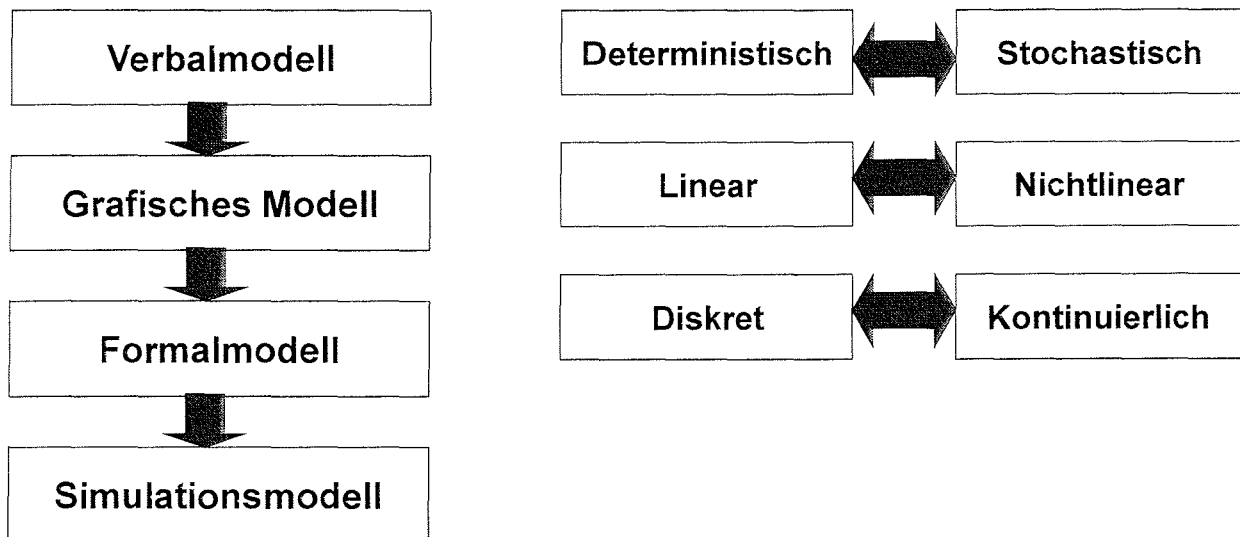
Opalisierend
Homonyme
Synonyme

Ikonische (analoge) Modelle

Landkarten
Planetarien
Sandkasten

Symbolische Modelle

Grafische Modelle
Formalmodelle
Simulationsmodelle



Einführung

- ◆ **BESCHREIBUNGSMODELLE (taxonomische Modelle)**
Bildung von Marktsegmenten
- ◆ **ERKLÄRUNGSMODELLE (explanatorische Modelle)**
Kaufverhaltensmodelle
- ◆ **PROGNOSEMODELLE**
Entwicklung neuer Produkte
- ◆ **ENTSCHEIDUNGSMODELLE (normative Modelle)**
Operations Research

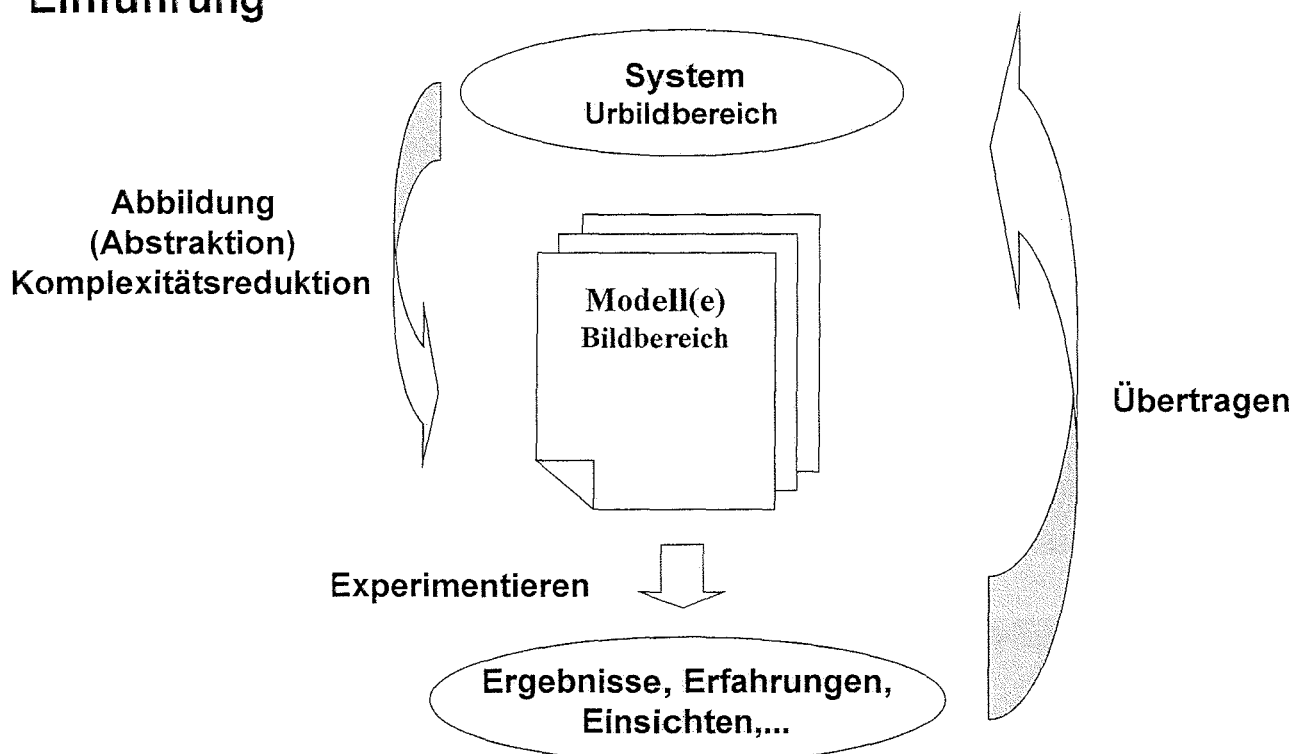
Einführung

DECISION-CALCULUS-ANSATZ (Little)

- ◆ EINFACHHEIT (simple)
- ◆ ROBUSTHEIT (robust)
- ◆ LEICHTE KONTROLLIERBARKEIT (easy to control)
- ◆ ANPASSUNGSFÄHIGKEIT (adaptive)
- ◆ VOLLSTÄNDIGKEIT (as complete as possible)
- ◆ KOMMUNIKATIONSFÄHIGKEIT (easy to communicate)

Einführung

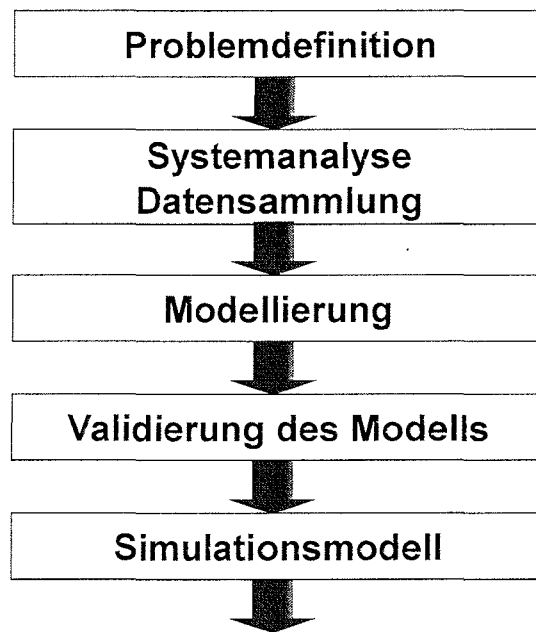
Simulate before building! Changes in the simulated world are cheaper than the real world.



Einführung

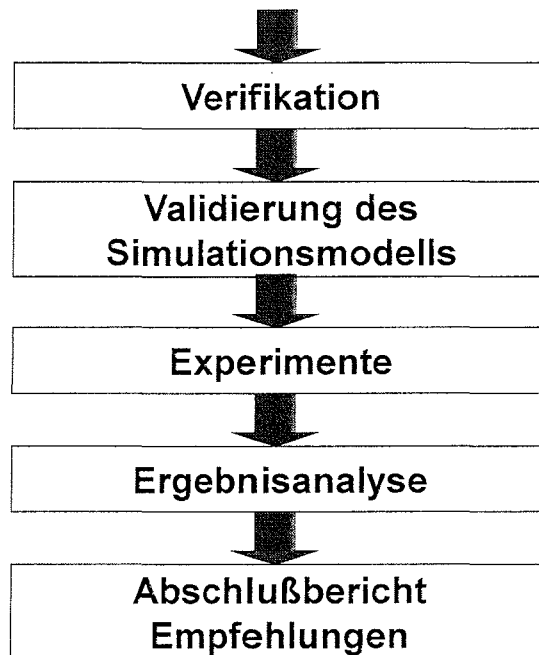


Ablauf einer Simulationsstudie



The necessary data for the simulations often do not exist and have to be collected on your own.

Einführung



Syntactical or logical errors.

Desired results being delivered?

Customer need to be able to make decisions using report.

Einführung

Problemdefinition

- ▶ Festlegung der Ziele und Rahmenbedingungen der Studie
- ▶ Vorgaben (max. Wartezeiten, max. Warteschlangenlänge,..)
- ▶ Team bilden, Rollen definieren (Auftraggeber, Projektleiter,..)
- ▶ Zuständigkeiten festlegen (wer liefert Daten?,...)
- ▶ Erhebung der Informationsbedürfnisse und Erwartungen
- ▶ Dokumentation der Annahmen, die dem Modell zugrunde liegen
- ▶ Detaillierungsgrad festlegen
- ▶ Auswahl der Software
- ▶ Schätzung der Projektdauer und der Kosten

Systemanalyse

- ▶ Abgrenzung (Hüllfläche)
- ▶ Festlegung der Systemelemente
- ▶ Attribute
- ▶ Modellstruktur (Wechselwirkungen)
- ▶ Zweck
- ▶ Ein-/Ausgabedaten (Systemeingänge/-ausgänge)

Einführung

Datensammlung

- ▶ Welche Daten werden benötigt (Inputs, Restriktionen,..)?
- ▶ Welche Daten sind verfügbar ?
- ▶ Sind die Daten repräsentativ ?
- ▶ Wie sieht die Qualität dieser Daten aus ?
- ▶ Welche Daten müssen erhoben werden ? (Zeit einplanen!)
- ▶ Empirische oder analytische Verteilungen
- ▶ Anpassungstests (χ^2 - und Kolmogorov-Smirnov-Test)

- ▶ Mittelwerte können zu irreführenden Ergebnissen führen

Mittlere IAT (interarrival time): 5 Minuten ($\lambda = 12$)

Mittlere Servicezeit: 4.9 Minuten ($\mu = 12.24$)

Bei Missachtung der Stochastik kann sich keine Warteschlange bilden

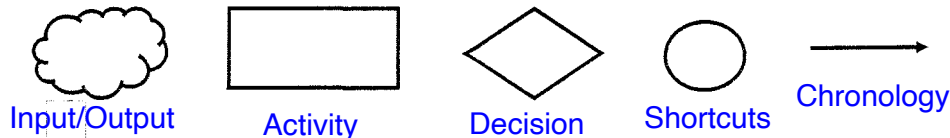
Sind hingegen beide Zeiten exponentialverteilt, so ergibt sich eine durchschnittliche Warteschlangenlänge von 49 Transaktionen

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Einführung

Konzeptuelles Modell

- ▶ Kreativitätsmethoden einsetzen
- ▶ Expertenbefragungen
- ▶ Was ist für den definierten Untersuchungszweck relevant ?
- ▶ Top – Down - Zugang wählen
- ▶ So einfach wie möglich, aber nicht einfacher
- ▶ Vorgenommene Vereinfachungen dokumentieren
- ▶ Verbalmodell – grafisches Modell
- ▶ Zuordnung der Elemente des Systems zu Elementen der Modellsprache



- ▶ 80:20 – Regel: Man erreicht 80 % Genauigkeit mit 20 % Komplexität
- ▶ Erstellung möglichst unabhängig von der verwendeten Simulationssprache (oftmals schwierig, da es Abhängigkeiten zwischen dem konzeptuellen Modell und dem Simulationsmodell gibt)

Einführung

Validierung des konzeptuellen Modells

- ▶ Schreibtischtest (structured walk through)
- ▶ Überprüfung gemeinsam mit Experten (Fachkenntnisse notwendig)
- ▶ Grafiken sind hierbei sehr zweckdienlich (Entscheidungspunkte, Parallelitäten gut erkennbar,..)
- ▶ Wurden alle relevanten Elemente, Wechselwirkungen und Entscheidungspunkte berücksichtigt ?

Simulationsmodell

- ▶ Oftmals muss auf programmtechnische Details Rücksicht genommen werden (keine 1:1 Übersetzung)
- ▶ Modulweise aufbauen (kein Spaghetti-Code)
- ▶ Kommentare einfügen (Dokumentation im Programm)
- ▶ Lesbarkeit, Verständlichkeit und Wartbarkeit gehen vor Eleganz
- ▶ Codierung mit Verifikation und Validierung integrieren
- ▶ Angaben über Autor(en), Teammitglieder, Adressen, Telefonnummer, E-Mail, Ziele, Zustandsvariablen,...

Einführung

- ▶ **Möglichst generisch aufbauen** (Parameterwerte nicht direkt im Programm verwenden)



Verifikation

- ▶ Beseitigung syntaktischer (debugging) und logischer Fehler (tracing)
- ▶ Blockstatistik hilft bei der Fehlersuche (Logik)
- ▶ Fehlermeldungen und Animationen unterstützen die Fehlersuche

Validierung des Simulationsmodells

- ▶ Überprüfung, ob das Modell eine adäquate Darstellung für den angestrebten Zweck ist und korrekte Ergebnisse liefert
- ▶ Black – box - Validierung
- ▶ White – box - Validierung
- ▶ Sensitivitätsanalysen
- ▶ Methode der unabhängigen Replikationen
- ▶ Überprüfung, ob die Unterschiede zwischen dem realen System und dem Modell vertretbar und erklärbar sind

Einführung

- ▶ Vergleich mit dem realen System manchmal schwierig, da von diesem oftmals nur eine einzige Zeitreihe vorliegt (z.B. Umsatzentwicklung, Auftragseingang,.....)

Experimente

- ▶ Setzen ein validiertes Modell voraus
- ▶ Vergleich von verschiedenen Szenarien
- ▶ Intelligente Suche in einem großen Lösungsraum
- ▶ Design der Experimente
- ▶ Auswirkungen von Änderungen untersuchen (wenn möglich nur eine Änderung pro Lauf)
- ▶ Genügend lange simuliert ?
- ▶ Genügend oft simuliert ? (Ein Simulationslauf liefert nur einen Wert innerhalb des möglichen Streubereichs. Auch das Ergebnis mehrerer Läufe ist mit einem Zufallsfehler behaftet, der geschätzt werden muss)
- ▶ Plausibilität der Anfangsbedingungen überprüfen
- ▶ Soll transiente Phase berücksichtigt werden ?

Einführung

Ergebnisanalyse

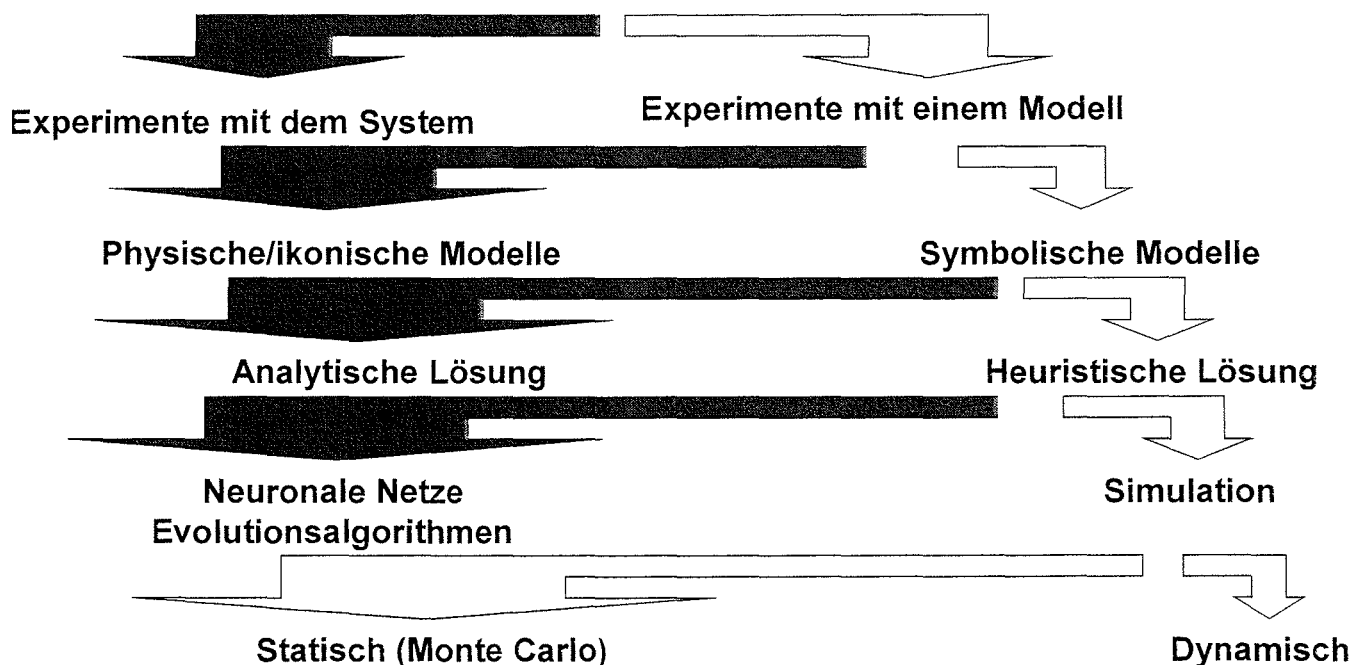
- ▶ Vergleich der verschiedenen Simulationsläufen
- ▶ Fehlen noch relevante Informationen ?
- ▶ Wurden relevante Einflussfaktoren übersehen ?
- ▶ Ist eine Detaillierung des Modells notwendig ?
- ▶ Waren die Annahmen richtig ?
- ▶ Muss man zu einer früheren Phase zurückschleifen ?
- ▶ Wie groß ist der zusätzliche Aufwand und wer trägt die Kosten ?

Abschlußberichte Empfehlungen

- ▶ Verdichtung und Visualisierung der Daten
- ▶ Entscheidungsrelevante Informationen bereitstellen
- ▶ Einige Informationen in der „Hinterhand“ behalten
- ▶ Präsentation vorbereiten (kurz !)
- ▶ Empfehlungen ausarbeiten
- ▶ Abschlussdokumentation (Details in den Anhang geben)

Einführung

Simulationsarten



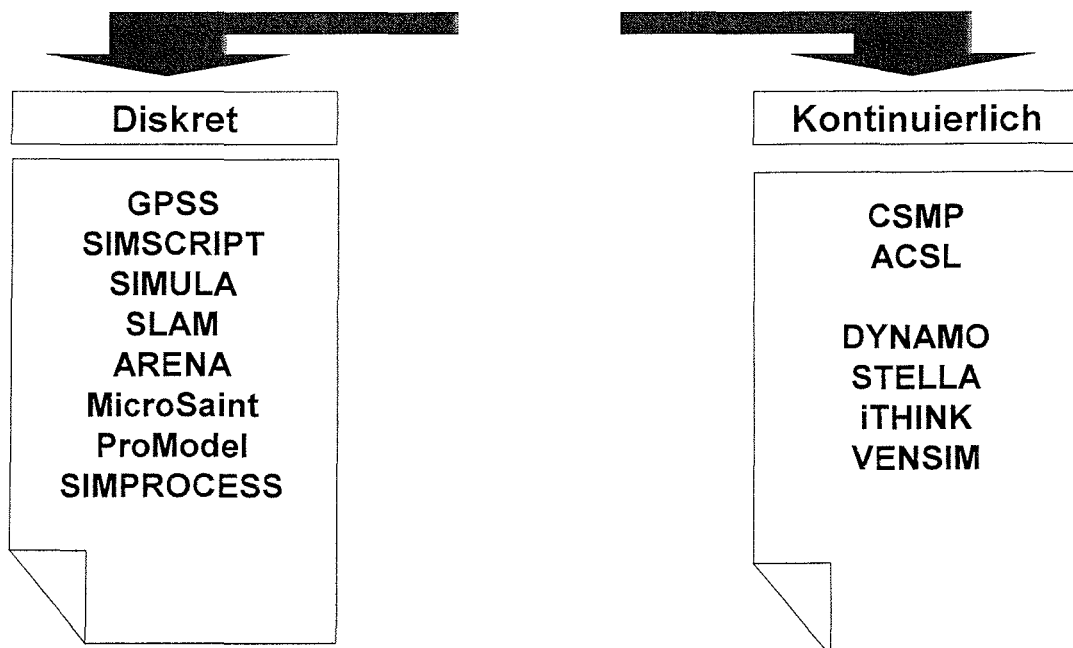


Dynamische Simulation

	DISKRET	KONTINUIERLICH
VORGANG	stochastisch	deterministisch
MODELL	verbal/logisch	mathematisch/ logisch
MODELL- DARSTELLUNG	Blockdiagramm	Gleichungssystem
ERGEBNISSE	Statistiken	zeitliche Verläufe
ZIEL DER UNTERSUCHUNG	Funktionsweise eines Systems	Entwicklung eines Systems

Einführung

Simulationssprachen



Einführung

GPSS (General Purpose Simulation System)

Geoffrey Gordon (IBM), 1961

SIMSCRIPT

Harry M Markowitz et al. (RAND Corp.), 1962

SIMULA (SIMulation LAnguage)

O.J.Dahl, B. Myhrhaug, K. Nygaard (Norwegian Computing Center), 1965-1967

GPSS/H (General Purpose Simulation System/Henriksen)

James O. Henriksen (Wolverine Software), 1977

SLAM (Simulation Language for Alternative Modeling)

Dennis Pedgen, Alan Pritsker, 1979

SIMAN (SIMulation ANALysis Language)

Dennis Pedgen, 1982

GPSS/PC (General Purpose Simulation System/Personal Computer)

Cox Springer (Minuteman Software), 1984

Einführung

GPSS World

Minuteman Software

DSL (Digital Simulation Language)

IBM

CSMP (Continuous System Modeling Program)

IBM

ACSL (Advanced Continuous Simulation Language)

DYNAMO (DYNAMIC MOdels)

A.L.Pugh, 1961

STELLA

Vensim

iTHINK



VORTEILE	NACHTEILE
<p>Niedrige Kosten</p> <p>Zeitdehnung/-raffung</p> <p>Reproduzierbarkeit</p> <p>Sicherheit</p> <p>Kontrollierte Experimente</p> <p>Einsicht in komplexe Systeme</p> <p>Keine explizite Zielfunktion</p> <p>Simulation nicht existierender Systeme</p> <p>Wiedergabe der Dynamik</p> <p>Schulung</p>	<p>Modelling without theory</p> <p>Hoher Aufwand</p> <p>Übervereinfachung</p> <p>Keine exakten Ergebnisse</p> <p>Ergebnisse nicht generalisierbar</p> <p>Modelle mit Theorien verwechselt</p> <p>Rahmenbedingungen oft unklar</p> <p>Keine Optimierung („what if“ statt „what’s best“)</p>

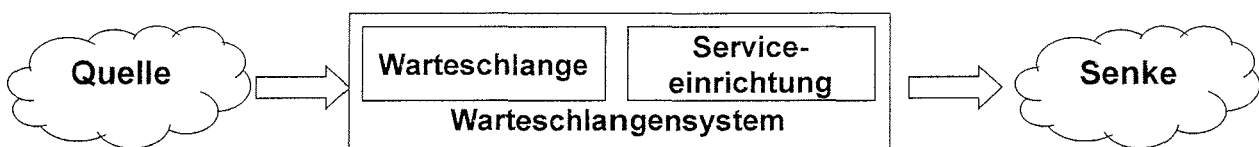
Warteschlangentheorie

Erste mathematische Warteschlangenmodelle wurden von A.K.Erlang ab 1909 erstellt

„Solution of Some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges“ (1917)

Die Warteschlangen- oder Bedientheorie befasst sich mit Warteschlangensystemen und ermittelt deren Charakteristika

Ein Warteschlangensystem (queueing system) besteht aus einer oder mehreren Warteschlangen (queue) und einer oder mehreren Bedien- oder Serviceeinrichtungen (service facility, server)



Warteschlangentheorie

Die Quelle (source) erzeugt Einheiten oder Transaktionen (arrivals, transactions)

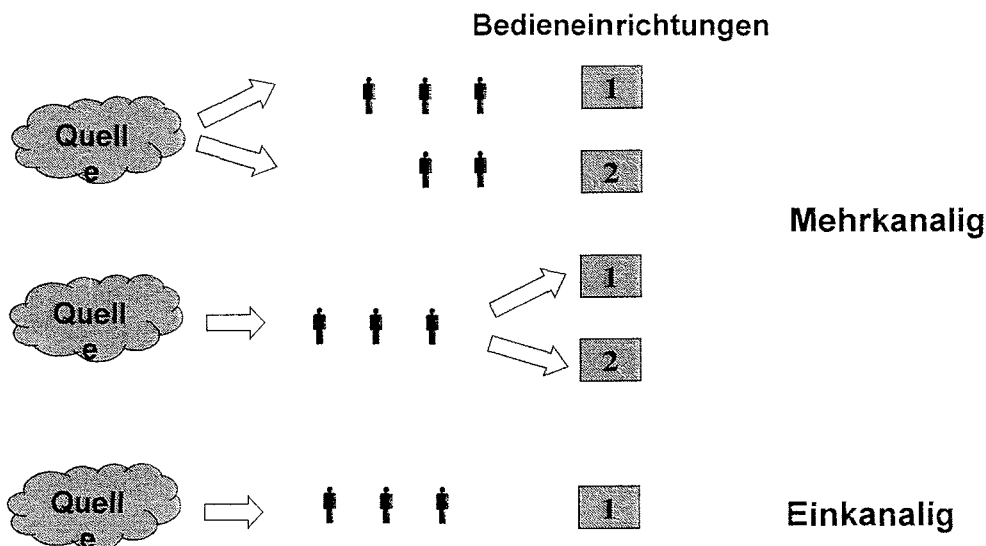
Die Transaktionen reihen sich in eine Warteschlange ein und werden nach einer Auswahlregel (Warteschlangendisziplin) für die Bedienung ausgewählt

FIFO First In – First Out (FCFS)
LIFO Last In – First OUT (LCFS)
SIRO Selection In Random Order
Priorität

Nach der Bedienung verlässt die Transaktion das Warteschlangensystem

Warteschlangentheorie

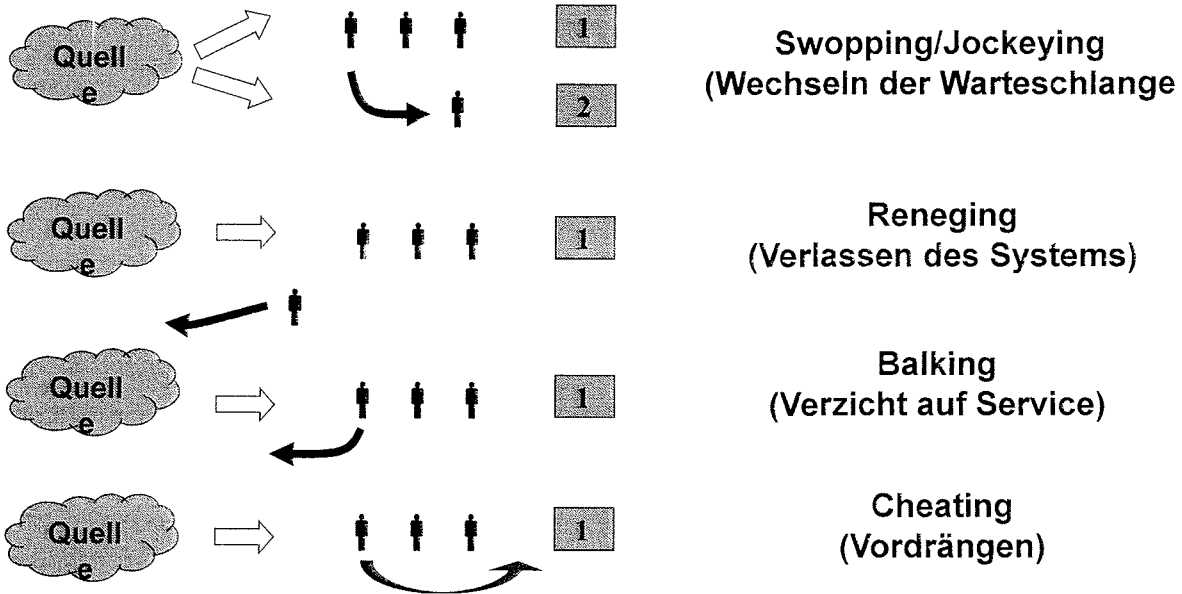
Organisationsformen von Warteschlangen



Warteschlangentheorie

Verhaltensformen in Warteschlangen

Bedieneinrichtungen



Warteschlangentheorie

Viele Größen eines Warteschlangensystems sind stochastischer Natur

Es handelt sich also um Zufallsvariablen, die einer bestimmten Verteilung unterliegen

Die Ankunftsrate ist oft poissonverteilt mit dem Mittelwert λ
Die Servicerate ist oft exponentialverteilt mit dem Mittelwert μ

Neben diesen beiden Raten benötigt man zur Kennzeichnung eines Modells noch die Anzahl der Servicestellen s ,
die Größe des Warteraums und die Warteschlangendisziplin



Kendall-Lee-Notation

Ankunftsrate/Servicerate/Servicestellen: (Warteraum/Disziplin)
M/M/1:(∞ /FIFO)

Warteschlangentheorie

Warteschlangenmodelle

▷ M/M/1

Poissonverteilte Ankünfte mit einer mittleren Ankunftsrate λ

Exponentiell verteilte Abfertigungszeiten mit einer mittleren Abfertigungsrate μ

Durchschnittliche Abfertigungsrate ist größer als die durchschnittliche Ankunftsrate

1 Servicestelle

FIFO Warteschlangendisziplin

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} \times P_0$$

Warteschlangentheorie

Formel von Little (1961)

Im M/M/1-Modell ergibt sich für die Wartezeit W im Warteschlangensystem

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda}$$

Durch Umformulierung erhalten wir

$$L = \lambda W \quad \leftarrow \text{Formel von Little}$$

Nach dem Beweis von Little gilt auch

$$L_q = \lambda W_q$$

Warteschlangentheorie

▷ M/G/1

Poissonverteilte Ankünfte mit einer mittleren Ankunftsrate λ

Beliebig verteilte Abfertigungszeiten mit einer mittleren Abfertigungsrate μ und der Varianz σ^2

1 Servicestelle

Pollaczek-Khintchine-Formel

$$r = \frac{l}{n}$$

$$L = r + L_q$$

$$L_q = \frac{l^2 s^2 + r^2}{2(1 - r)}$$

$$P_0 = 1 - \frac{l}{m}$$

$$W = W_q + \frac{1}{m}$$

$$W_q = \frac{L_q}{l}$$

Warteschlangentheorie

▷ M/D/1

Poissonverteilte Ankünfte mit einer mittleren Ankunftsrate λ

Konstante Bedienzeiten (Routinetätigkeiten, Maschinen,...)

1 Servicestelle

Da in diesem Fall $\sigma^2 = 0$ ist, reduziert sich die Pollaczek-Khintchine-Formel auf

$$L_q = \frac{r^2}{2(1 - r)}$$

Aus L_q können die Größen L , W , und W_q berechnet werden

Bei $s > 1$ kann man die Werte aus Tabellen ablesen,
aber man erkennt hier auch schon eine der Grenzen der analytischen
Warteschlangentheorie

Warteschlangentheorie

λ (pro Stunde)	$\rho(\mu = 12)$	W_q (in Minuten)
1	0.0833	0.5
2	0.1667	1.0
3	0.2500	1.7
4	0.3333	2.5
5	0.4167	3.6
6	0.5000	5.0
7	0.5833	7.0
8	0.6667	10.0
9	0.7500	15.0
10	0.8333	25.0
11	0.9167	55.0

Warteschlangentheorie

► Beispiel M/M/1-Modell mit DS for Windows

In einem Ärztezentrum treffen durchschnittlich 43.8 Patienten pro Stunde ein. Die Eintragung der Daten bei der Arzthelferin dauert durchschnittlich 20 Sekunden pro Patient.

Unter der Annahme eines M/M/1-Modells sollen die wesentlichen Charakteristika dieses Systems ermittelt werden.

► Beispiel Autowäsche mit Excel

In der Zeit zwischen 11.00 und 13:00 treffen durchschnittlich 15 Autos pro Stunde (λ) ein (IAT: 4 Minuten).

Die Frequenz ist poissonverteilt.

Eine Autowäsche dauert durchschnittlich 3 Minuten (20 Autos pro Stunde).

Die Waschdauer ist exponentialverteilt ($\mu = 20$).

Es sollen die wesentlichen Charakteristika dieses Systems ermittelt werden.

Warteschlangentheorie

Grenzen der Warteschlangentheorie

Nur auf einfache Problemstellungen anwendbar

Liefert nur Aussagen über den Steady-State-Zustand

Keine kaskadischen (mehrstufigen) Modelle lösbar

Keine Berücksichtigung von der Norm abweichender Verhaltensweisen
in der Warteschlange

Keine Berücksichtigung nicht-stationärer Ankunfts- und Bedienraten

Keine Untersuchung von Kausalbeziehungen möglich

Statistik und Simulation

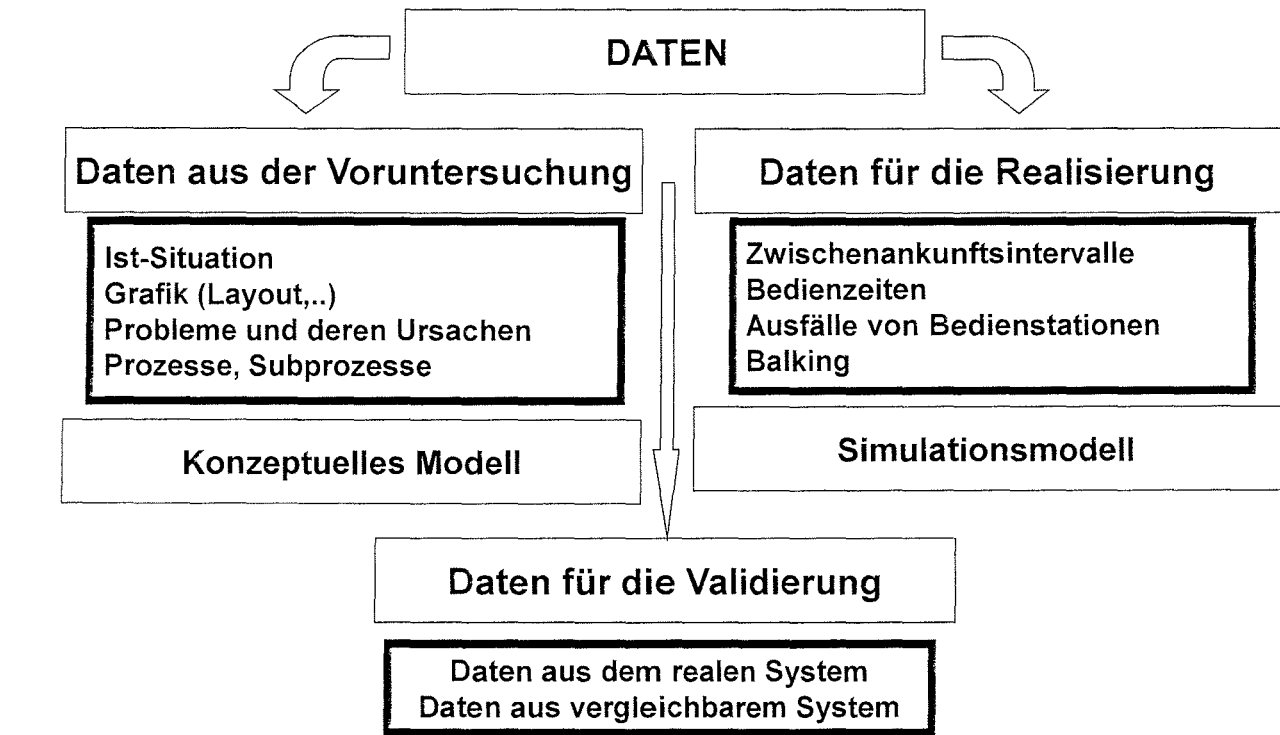
Anwendungen der Statistik in Simulationsprojekten

Bei der Datensammlung

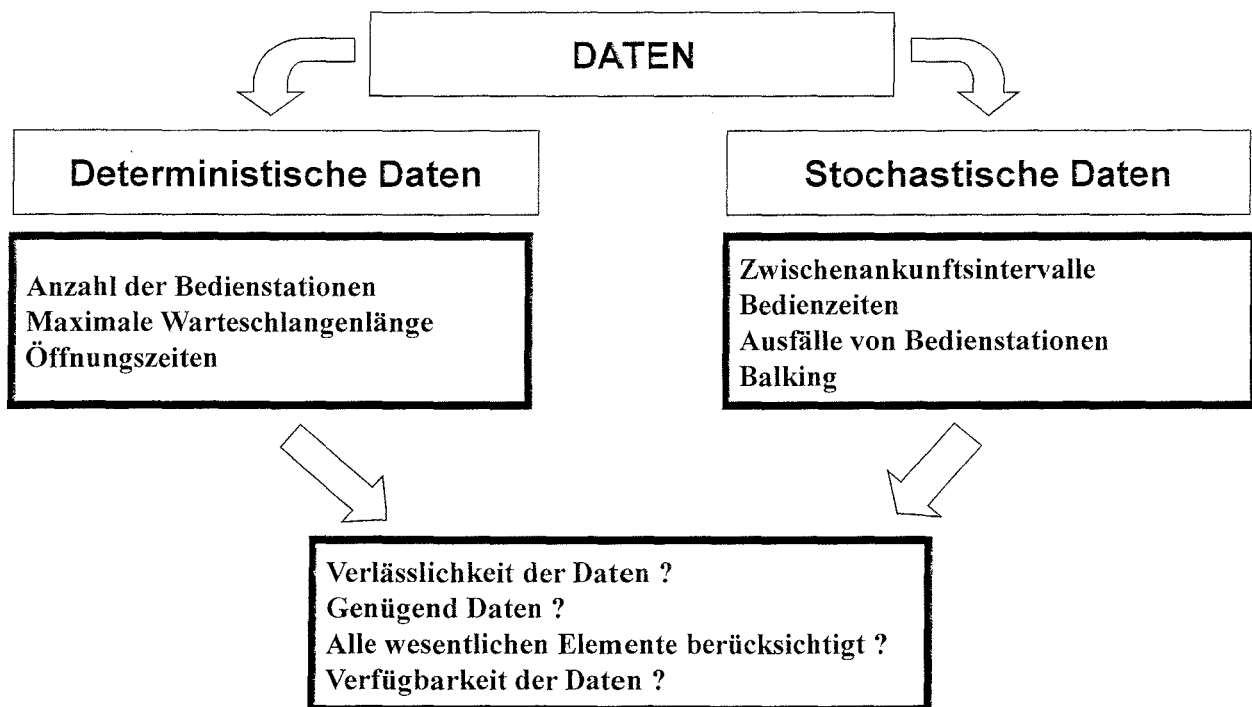
Beim Design der Experimente

Für die Interpretation der Ergebnisse

Statistik und Simulation



Statistik und Simulation



Statistik und Simulation



Lagemaße

Mittelwert (mean)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Median $x_{0.5}$

Modus \tilde{x}

Streuungsmaße

Varianz (variance)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Wölbung (kurtosis)

>0: spitzer als Normalverteilung (leptokurtisch)

<0: abgeplatteter als Normalverteilung (platykurtisch)

Statistik und Simulation

◆ Beispiel

Statistik der Zwischenankunftsintervalle

	Anzahl der Ankünfte	Mittelwert (min)	Standardabweichung
Montag	99	1.37	1.53
Dienstag	74	2.00	2.36
Mittwoch	68	2.04	1.92
Donnerstag	61	2.23	2.48

Vereinfachung des Modells

Montag	99	1.37	1.53
Di, Mi, Do	203	2.08	2.25

Statistik und Simulation

◆ Beispiel

Zapfsäule	Anzahl Kunden	Mittelwert (min)	Standardabweichung
1	62	5.58	3.55
2	48	5.48	2.83
3	45	6.21	4.88
4	56	7.36	3.86
5	48	8.07	7.02
6	46	6.74	3.83

Vereinfachung des Modells

1 bis 6	305	6.54	4.54
---------	-----	------	------

Da Standardabweichungen in allen Fällen relativ groß

Statistik und Simulation

◆ Grafische Darstellungen

Wesentliche Aufgabe ist die Darstellung der Verteilung der Daten über einen bestimmten Bereich



Histogramme lassen leicht erkennen, ob die Verteilung symmetrisch ist oder eine Schiefe (skewness, Moment 3. Ordnung) aufweist

>0: linkssteil (positive Schiefe) : Mittelwert > Median > Modus

0: symmetrisch

<0: rechtssteil (negative Schiefe) : Mittelwert < Median < Modus

Für den Vergleich verschiedener Datenmengen eignen sich Box-Plots



Diese Darstellung lässt Ausreißer und eine vorhandene Schiefe gut erkennen

Statistik und Simulation

◆ Beispiel

Die nachstehende Tabelle zeigt die Servicezeiten (in Minuten)
an der Zapfsäule 2 an einem Dienstag

4.33	2.18	2.52	16.35	17.13	17.13	8.27	3.62	6.62
42.37	9.03	3.10	5.88	2.70	2.23	5.82	4.33	

Errechnen Sie den Mittelwert und den Median

$$\bar{x} = \frac{153.61}{17} = 9.04 \text{ Minuten}$$

2.18	2.23	2.52	2.70	3.10	3.62	4.33	4.33	5.82
5.88	6.62	8.27	9.03	16.35	17.13	17.13	42.37	

Statistik und Simulation

Der Mittelwert (9.04) ist größer als der Median (5.82), was darauf hinweist,
dass die Daten rechts schief sind, was aber auf den Ausreißer (42.37)
zurückzuführen ist



Quantifizierung eines Ausreißers

Untere Grenze: $Q_1 - 1.5 (Q_3 - Q_1)$

Obere Grenze: $Q_3 + 1.5 (Q_3 - Q_1)$

Q_1 : Unteres Quartil

Q_3 : Oberes Quartil

Die Box in einem Box-Plot repräsentiert 50 % der Daten
mit den Grenzen Q_1 und Q_3 . Die mittlere Linie gibt den Median wieder
und lässt die Schiefe erkennen.

Ausreißer werden durch einen Stern gekennzeichnet

Statistik und Simulation

◆ Beispiel. Anfangsgehälter von FH-Absolventen

Absolvent	Einstiegsgehalt (in €)
1	3325
2	2755
3	3050
4	2710
5	2880
6	2940
7	3130
8	2950
9	2890
10	2850
11	2920
12	2880

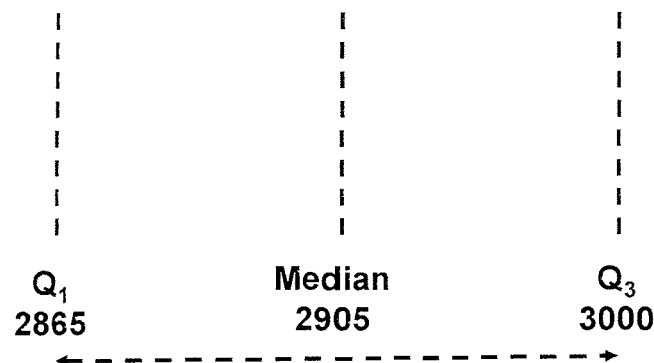
Stellen Sie bitte die Daten als Box-Plot dar



Statistik und Simulation

Daten sortiert

2710 2755 2850 2880 2880 2890 2920 2940 2950 3050 3130 3325

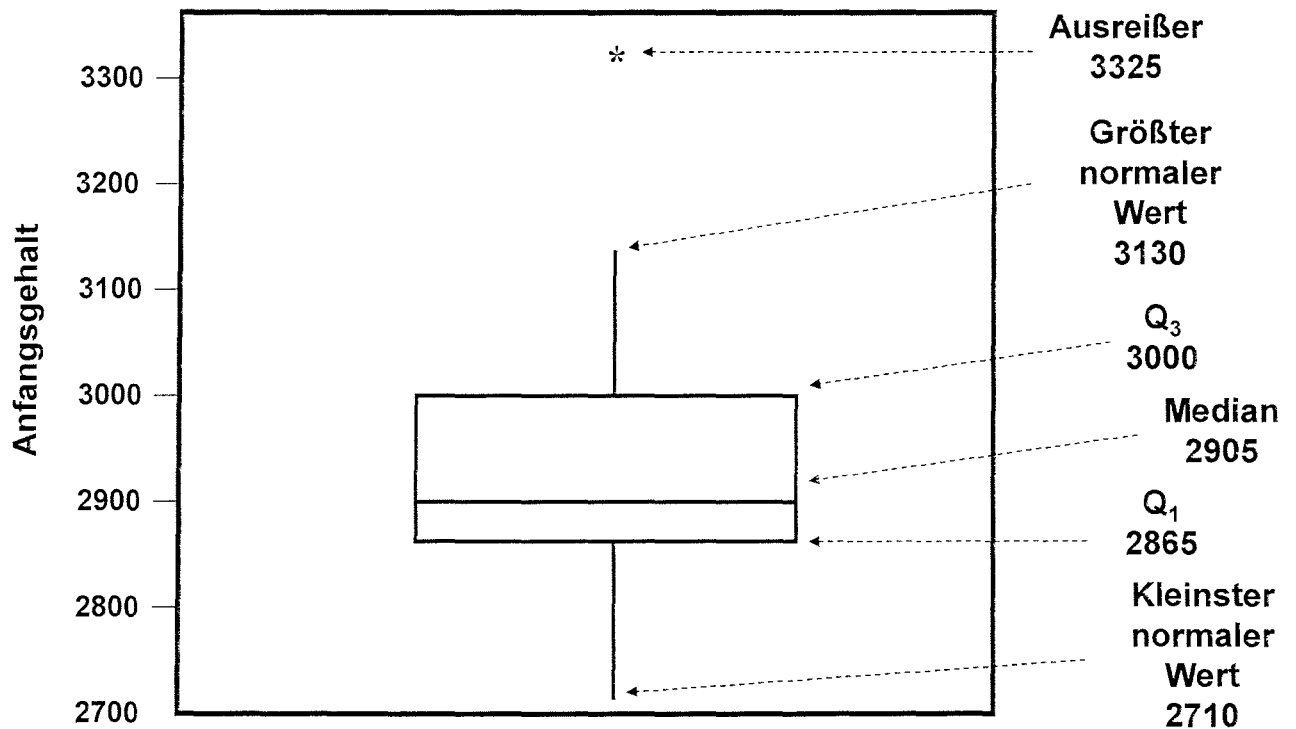


$$Q_3 - Q_1 = 135$$

Untere Grenze: $2865 - 1.5(135) = 2662,5$

Obere Grenze: $3000 + 1.5(135) = 3202,5$





Statistik und Simulation

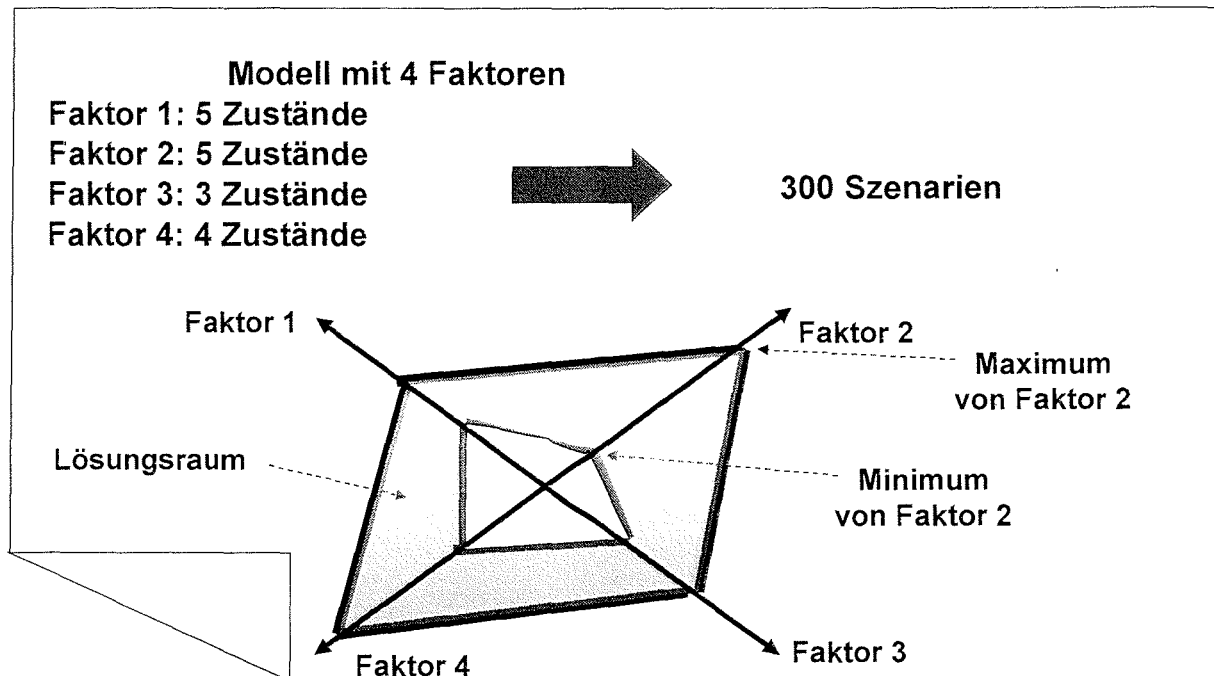
◆ ANPASSUNGSTESTS MIT CRYSTAL BALL (Goodness-of-fit tests)

Chi-Quadrat: Ein p-Wert > 0.5 bedeutet eine gute Anpassung

Kolmogorov-Smirnov (K-S): Ein Wert < 0.03 bedeutet eine gute Anpassung

Anderson-Darling: Ähnlich wie K-S, gewichtet aber die Ränder der Verteilung stärker als jene im mittleren Bereich der Verteilung

Ein Wert < 1.5 bedeutet eine gute Anpassung



Statistik und Simulation

Stichproben dienen dem Zweck, Schätzungen der Parameter einer Grundgesamtheit zu erhalten

Die Parameter der Stichprobe liefern Punktschätzungen für die ausgewählte Stichprobe, geben aber keine Auskunft über die Genauigkeit dieser Schätzungen

Die Validierung soll aber überprüfen, ob die Ergebnisse, die unser Modell erzeugt, mit den Werten des realen Systems überein stimmen

Wenn mehrere Stichproben untersucht werden, so ist es eher unwahrscheinlich, dass beispielsweise die errechneten Mittelwerte überein stimmen

Statistik und Simulation

Als Ergebnis erhält man eine Stichprobenverteilung, die bei genügend großer Stichprobe (> 30) annähernd normalverteilt ist

➤ Die Stichprobenverteilung weist folgende Eigenschaften auf:

1. Das Mittel der Stichprobenverteilung ist gleich dem Mittel der Population μ

$$m_x = m$$

2. Die Standardabweichung der Stichprobenverteilung nennt man den Standardfehler des Mittels und ist gegeben durch

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Stichprobe ein Mittel innerhalb eines spezifizierten Bereich hat, ergibt sich durch

$$Z = \frac{\bar{x} - m}{s_{\bar{x}}}$$



Statistik und Simulation

◆ Beispiel

Das Gewicht eines Produkts ist normal verteilt mit einem Mittelwert von 56.8 Gramm und einer Standardabweichung von 5.4 Gramm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Stichprobe mit $n = 16$ ein mittleres Gewicht von mindestens 58 Gramm hat?

Für den Standardfehler des Mittels bzw. Z erhält man

$$s_{\bar{x}} = \frac{5.4}{\sqrt{16}} = 1.35$$

$$Z = \frac{58 - 56.8}{1.35} = 0.889$$

Aus der Tabelle ergibt sich für $P(Z \geq 0.889)$ der Wert 0.1867 (18.67%)



◆ Konfidenzintervalle

Der in einer Stichprobe errechnete Mittelwert ist Fehler behaftet, wobei dieser Fehler von der Stichprobengröße abhängt

Konfidenzintervalle liefern einen Genauigkeitsgrad in Bezug auf die Schätzung des Mittelwertes einer Population

Gesucht wird ein Intervall, in dem der wahre Mittelwert erwartungsgemäß liegen sollte

Konfidenzintervalle sind dann wertvoll, wenn ein Output eines Modells mit Beobachtungen eines realen Systems zu vergleichen sind

Die Größe dieses Intervalls hängt nicht nur vom Standardfehler, sondern auch von der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, dass das Intervall den wahren Wert enthält (üblicherweise 95% oder 99%)



Einem z-Wert von ± 1.96 entsprechen 2.5% (0.025) auf jeder Seite der Verteilung. Die Summe (5%) bezeichnet man mit α , wodurch sich das Konfidenzintervall $1 - \alpha$ ergibt

$$\pm z = \frac{\bar{x} - m}{S_{\bar{x}}}$$

Durch Umformung erhält man das Konfidenzintervall des wahren Mittels μ

$$m = \bar{x} \pm z S_{\bar{x}}$$

VORAUSSETZUNG:

Die Standardabweichung der Population ist bekannt



◆ Beispiel

Ein Kunde kauft Produkte des im vorhergehenden Beispiel genannten Unternehmens, wiegt zufällig 18 Stück und erhält als mittleres Gewicht 55.5 Gramm. Die Standardabweichung ist bekannt (5.4 Gramm). Wie groß ist das 95% Konfidenzintervall des wahren mittleren Gewichts ?

Für den Standardfehler des Mittels erhält man

$$s_{\bar{x}} = \frac{5.4}{\sqrt{18}} = 1.27$$

$$m = \bar{x} \pm Z s_{\bar{x}} = 55.5 \pm 1.96 \cdot 1.27 = 55.5 \pm 2.49$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% wird der wahre Mittelwert des Gewichts zwischen 53.01 und 57.99 Gramm liegen

◆ Hypothesentests

Sind wichtig im Zusammenhang mit der Frage, ob das Ergebnis einer Stichprobe von einer Population mit einem bekannten Mittelwert kommen kann

Hypothesentests machen eine Annahme (Nullhypothese H_0) und versuchen diese zu widerlegen

Die Akzeptanz der Nullhypothese beweist nicht, dass diese wahr ist, sondern nur, dass wir nicht genügend Evidenzen haben, sie zu verwerfen

Das Verwerfen der Nullhypothese besagt, dass die Ergebnisse der Stichprobe nicht mit der Hypothese übereinstimmen und es wird daher die alternative Hypothese (Gegenhypothese) H_1 akzeptiert

Statistik und Simulation

Replikation	Ankünfte/Stunde	Durchschnittliche Bedienzeit (\bar{x}) (Minuten)
1	51	2.79
2	40	1.12
3	45.5	2.24
4	50.5	3.45
5	53	3.13
6	49	2.38
Stichprobenmittel \bar{x}		2.52
Standardabweichung		0.81

Statistik und Simulation

$$H_0: E(x) = 4.3 \text{ Minuten}$$

$$H_1: E(x) \neq 4.3 \text{ Minuten}$$

Konfidenzbereich $\alpha = 0.05$, Stichprobenumfang $n = 6$

Für den zweiseitigen Test suche den kritischen Wert aus der t -Tabelle

$$t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 5} = 2.571$$

H_0 wird verworfen, wenn $|t| > t_{\alpha/2, n-1}$

$$t = \frac{\bar{x} - m}{s_{\bar{x}}} \quad \text{mit} \quad s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{2.52 - 4.3}{0.81/\sqrt{6}} = -5.38$$

Da $|t| = 5.38 > t_{\alpha/2, n-1} = 2.571$ wird H_0 verworfen

Replikation	Ankünfte/Stunde	Durchschnittliche Bedienzeit (x) (Minuten)
1	51	5.37
2	40	1.98
3	45.5	5.29
4	50.5	3.82
5	53	6.74
6	49	5.49
Stichprobenmittel \bar{x}		4.78
Standardabweichung		1.66

Statistik und Simulation

$$H_0: E(x) = 4.3 \text{ Minuten}$$

$$H_1: E(x) \neq 4.3 \text{ Minuten}$$

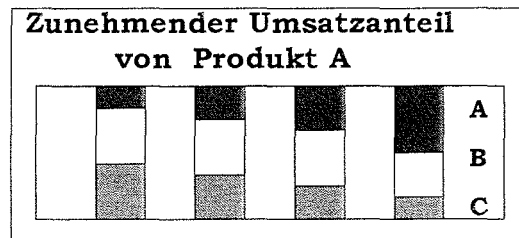
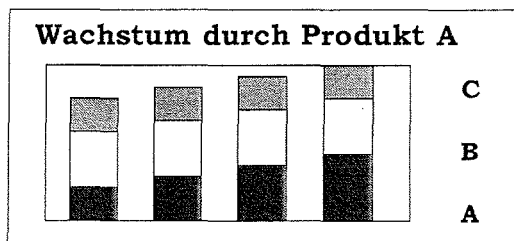
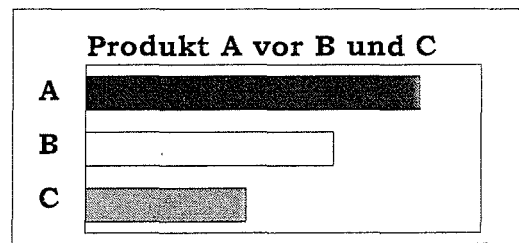
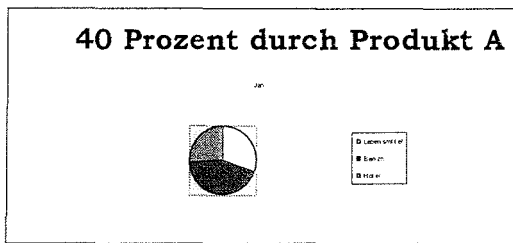
Konfidenzbereich $\alpha = 0.05$, Stichprobenumfang $n = 6$

$$t = \frac{4.78 - 4.3}{1.66 / \sqrt{6}} = 0.708$$

Da $|t| = 0.708 < t_{\alpha/2, n-1} = 2.571$ wird H_0 nicht verworfen

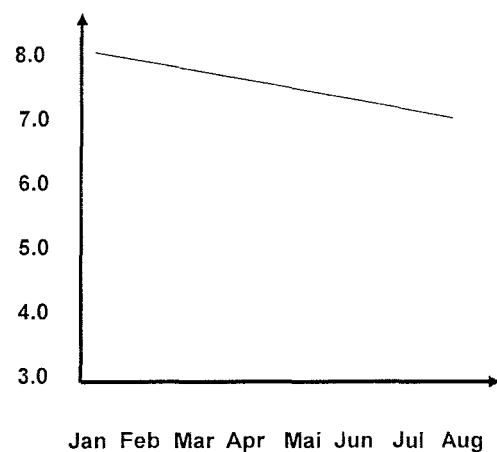
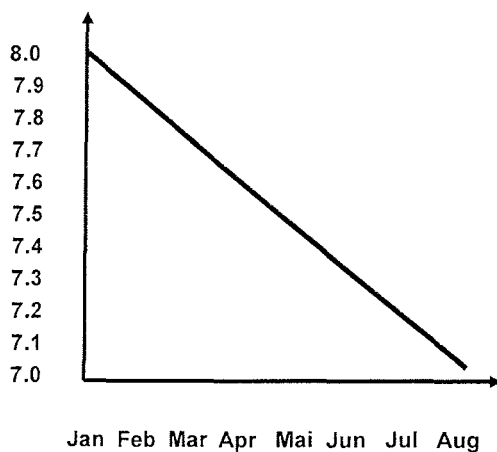
Statistik und Simulation

◆ Richtige Diagrammtypen einsetzen

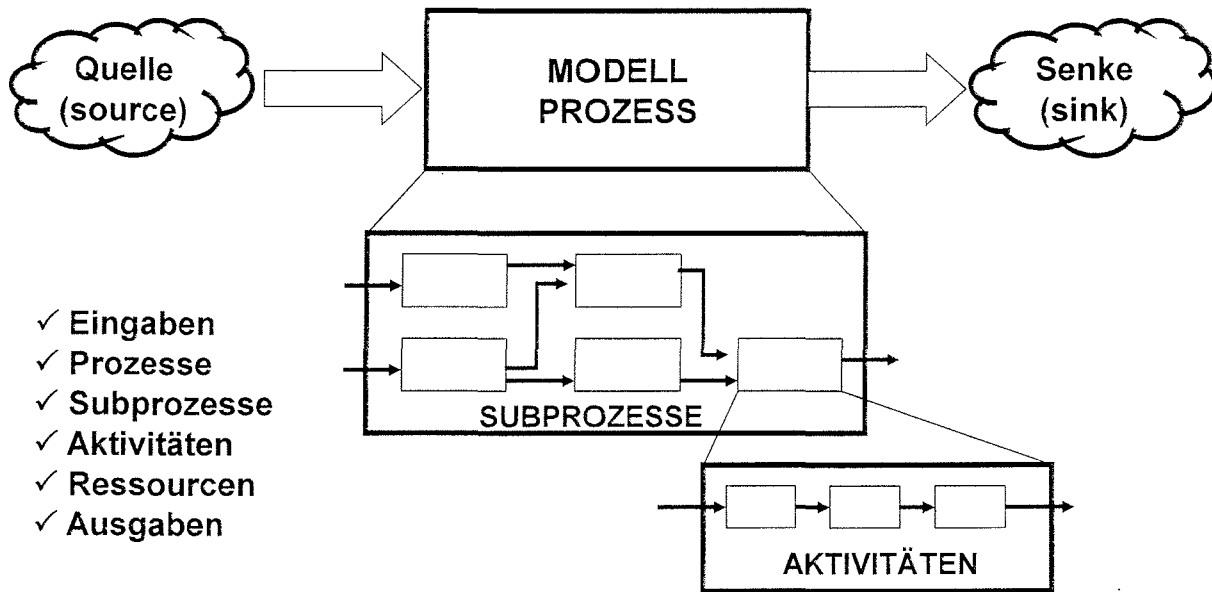


Statistik und Simulation

◆ Liniendiagramm (keine Manipulationen !)



Begriffswelt



Diskrete Simulation

Hauptanwendungsgebiet: Warteschlangenmodelle

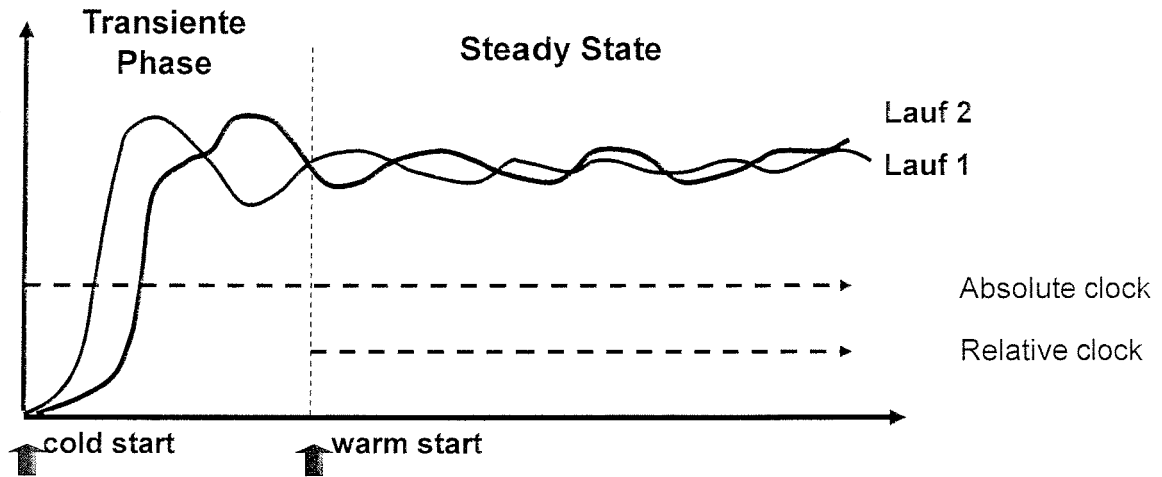
Unterschiede zur analytischen Warteschlangentheorie:

- Beliebige empirische und analytische Verteilungen
- Behandlung kaskadischer Modelle
- Transiente Phase und/oder Steady State Zustand
- Auch komplexe Modelle leicht erstellbar

Diskrete Simulation

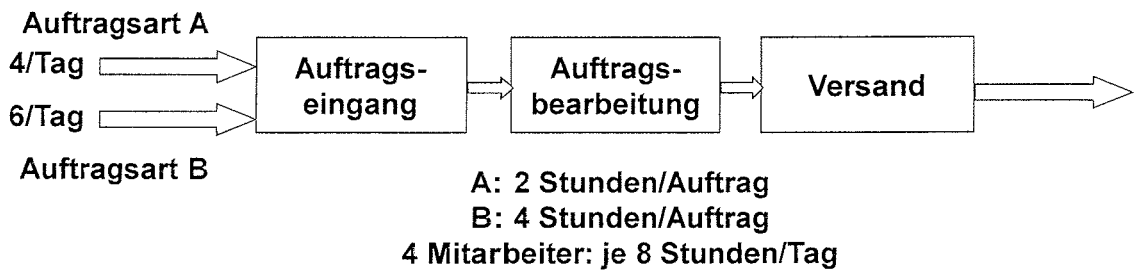
Transiente Phase: Einschwingverhalten

Steady State: Zustand nicht mehr abhängig von den Anfangsbedingungen



Diskrete Simulation

Die Nichtberücksichtigung stochastischer Einflüsse bei dynamischen Prozessen führt zu falschen Ergebnissen



Auftragsart	Anzahl (Pro Tag)	Dauer (in Stunden)	Aufwand (in Stunden)	
A	4	2	8	
B	6	4	24	SUMME: 32
Mitarbeiter	Anzahl	Stunden/Tag	Kapazität/Tag	Auslastung
	4	8	32	100%

Diskrete Simulation

Elemente der Simulationssprache GPSS

► TRANSAKTIONEN (transactions, Xactions)

„Bewegte“ Einheiten, die Zustandsänderungen auslösen

- ▷ Interne Transaktionsnummer
- ▷ Priorität
- ▷ Geburtsstunde (Mark Time)
- ▷ Parameter

► EINRICHTUNGEN

- ▷ Facility

Binäre Einrichtungen mit einer Kapazität 1(frei – belegt)

- ▷ Storage

Einrichtungen mit einer Kapazität ≥ 1 (leer – teilweise belegt – voll)

- ▷ Switch

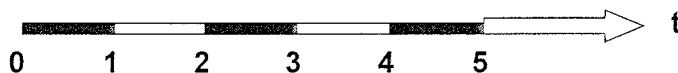
Schalter haben zwei Zustände (Ein – Aus)

Diskrete Simulation

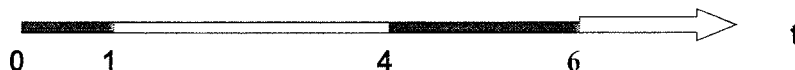
► UHR (clock)

Repräsentiert die Zeit im Modell

- ▷ Next Time Logic (zeitorientierte Logik): fixes Inkrement (äquidistant)



- ▷ Next Event Logic (ereignisorientierte Logik): variables Inkrement



► ZUFALLSZAHLN (random numbers)

Zufallszahlengeneratoren erzeugen gleichverteilte Pseudozufallszahlen im Intervall $[0,1)$ oder in einem vorgegebenen Intervall $[a,b]$

► ZUSTANDSVARIABLEN (System Numerical Attributes – SNAs)

Auf die Zustandsvariablen, die vom Programm verwaltet werden, kann über mnemotechnische Abkürzungen zugegriffen werden

Diskrete Simulation

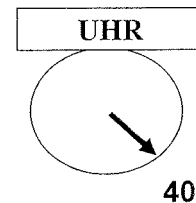
► KETTEN (chains)

Transaktionen werden mit Hilfe von Listen verwaltet

▷ Current Events Chain (CEC)

Enthält alle Transaktionen, deren Ereigniszeit (EZ) gleich dem momentanen Stand der Uhr (C1) ist. Innerhalb der CEC werden die Transaktionen nach ihrer Priorität gereiht

Nummer	Mark Time	EZ	Priorität
17	15	40	90
5	7	40	85
22	30	40	70
12	12	40	65
18	22	40	20

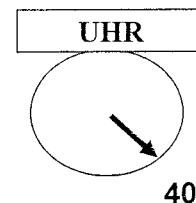


Diskrete Simulation

▷ Future Events Chain (FEC)

Enthält alle Transaktionen, deren Ereigniszeit (EZ) größer als der momentane Stand der Uhr (C1) ist. Innerhalb der FEC werden die Transaktionen nach ihrer Ereigniszeit gereiht

Nummer	Mark Time	EZ	Priorität
1	2	48	10
4	6	55	15
2	3	55	12
6	8	62	65
15	13	73	70



▷ User Chains

Ermöglichen die Realisierung benutzerspezifischer Warteschlangendisziplinen

Diskrete Simulation

► GPSS-BLÖCKE

Modifizierbare Unterprogramme

Sie bilden mit den Steueranweisungen und den Definitionen den Input

► QUELLE/SENKE

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	GENERATE	Mittelwert	Streuung	Zeit vor der Erzeugung der ersten Transaktion	Anzahl der Transaktionen	Priorität
	TERMINATE	Dekrement für Terminierungszähler	After so many decrements, the simulation ends			

L: Location (Label, Adresse eines Blocks)

Diskrete Simulation

► FACILITY

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	SEIZE	Name/Nr. Facility	Resource lock			
	RELEASE	Name/Nr. Facility	Resource unlock			

► STORAGE

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	ENTER	Name/Nr. Speicher	Gewicht			
	LEAVE	Name/Nr. Speicher	Gewicht			
N	STORAGE	Kapazität				

N: Name (Speicher, Tabelle, Funktion,...)

Diskrete Simulation

▷ BEDIENZEIT und WARTESCHLANGEN

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	ADVANCE	Mittelwert	Streuung			
	QUEUE	Name/Nr. des Queue	Gewicht			
	DEPART	Name/Nr. des Queue	Gewicht			
N	QTABLE	Name der Queue	Obere Grenze 1.Klasse	Breite der Klassen	Anzahl der Klassen	

Diskrete Simulation

▷ LOGIK

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	TRANSFER	, .xxx BOTH	Adresse Adresse Adresse	Adresse Adresse		
	TEST Vo	SNA	SNA	[Adresse]		

Vo: Vergleichsoperator: E, NE, G, GE, L, LE

▷ TABELLEN

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	TABULATE	Name/Nr. der Tabelle	Gewicht			
N	TABLE	SNA RT IA	Obere Grenze 1.Klasse	Breite der Klassen	Anzahl der Klassen	

Diskrete Simulation

Parameters are local values,
Savevalues are global values.

▷ PAMETER und SAVEVALUES

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	MARK	Parameter Nr.	Set points to calculate intervals from "marked" points within the simulation.			
	ASSIGN	Parameter Nr. [+/-]	Wert	[Funktions-Nr.]		
	SAVEVALUE	Savevalue-Nr. [+/-]	Wert			
	INITIAL	Schalter/ Savevalue/ Matrix	Wert	Allows setting values at the start of the simulation.		

Diskrete Simulation

▷ ASSEMBLY SETS

Menge aller Transaktionen, die von derselben Originaltransaktion stammen

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	SPLIT	Anzahl Kopien	Adresse Kopien	Parameter-Nr.	Branch one transaction into two copies	
	MATCH	Adresse korresp. Match-Bl.	Synchronize transaction blocks together			
	ASSEMBLE	Anzahl zu vereinig. Transakt.	Combine transactions together. Has a storage capacity of 1. After splitting a transaction, one goes in to Assemble and the other is lost.			
	GATHER	Anzahl zu sammelnd. Transakt.				

Diskrete Simulation

▷ STEUERANWEISUNGEN

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	START	Term.Count	[NP]			
	RESET					
	CLEAR					

▷ DEFINITIONEN

L	OPERATION	A	B	C	D	E
	FUNCTION	Argument (SNA)	Typ			
	VARIABLE	Arithmet. Ausdruck				
	FVARIABLE	Arithmet. Ausdruck				

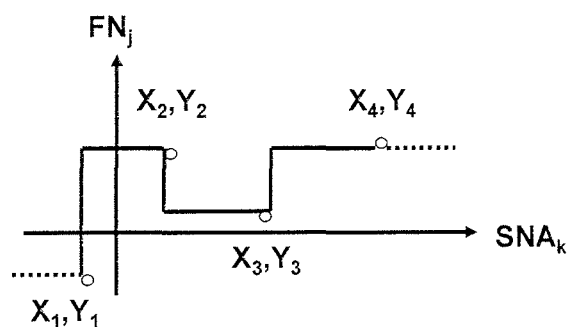
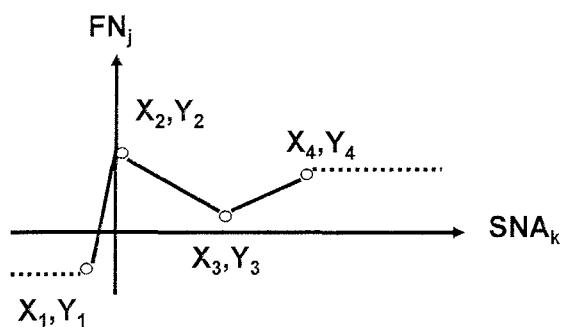
Diskrete Simulation

FUNKTIONSTYPEN

Kontinuierlich: Cn (continuous)

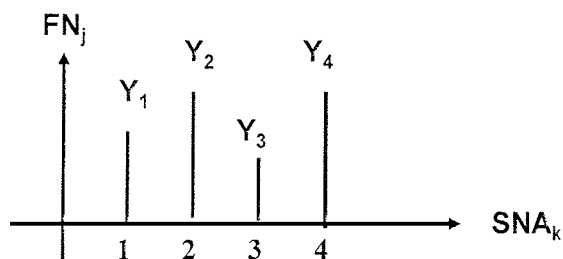
Diskret: Dn (discrete)

n: Anzahl der Stützpunkte

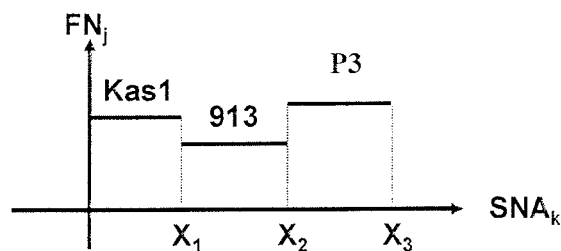


Diskrete Simulation

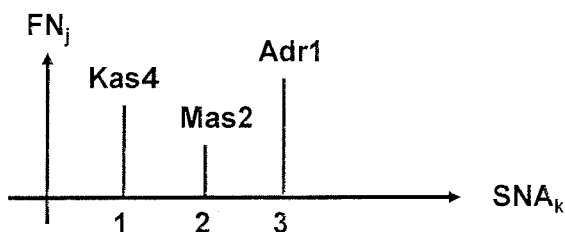
Ln (list, Listenfunktion)



En (diskret mit Attributwerten)

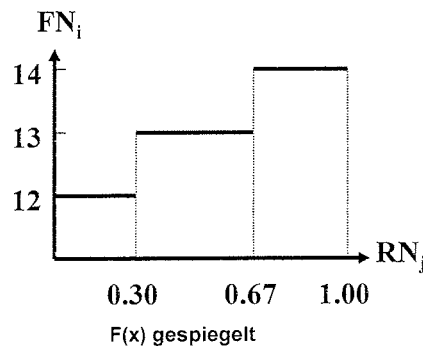
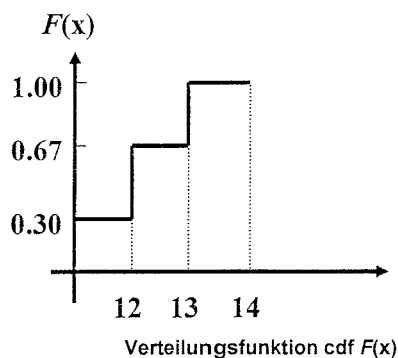
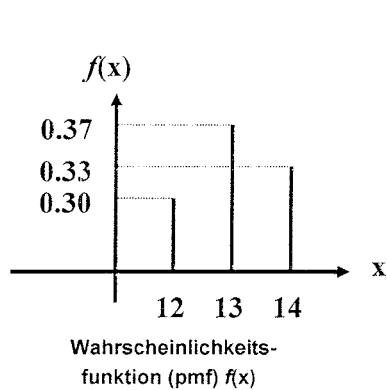


Mn (Listenfunktion mit Attributwerten)



Diskrete Simulation

Simulation von externen Plattenspeichern



Plattenadresse	Zugriffswahrscheinlichkeit
12	0.30
13	0.37
14	0.33

Platte FUNCTION RN8,D3
0.3,12/0.67,13/1.0,14

- Potential issues with this simulation:
- How customers approach the queues is not realistic
 - Not every customer will take a cart
 - Swapping between queues is not accounted for
 - Distribution is not realistic, exponential would be more appropriate
 - Peak times are not accounted for
 - Not every express customer will use the express register

Diskrete Simulation

SIMULATION EINES SUPERMARKTS

Die Zwischenankunftszeiten der Kunden sind gleichverteilt im Intervall [0s,60s]. Jeder Kunde nimmt sich zwingend einen Einkaufswagen. Ist kein Wagen frei, so wartet der Kunde. 70 % der Kunden (reguläre Kunden) brauchen für den Einkauf zwischen 10 und 30 Minuten, der Rest sind Expresskunden, die sich zwischen 3 und 7 Minuten im Markt aufhalten und für die eine eigene Expresskassa zur Verfügung steht. Die Abfertigung liegt gleichverteilt im Intervall [25s,65s]. Für die regulären Kunden gibt es drei Kassen, wobei die mit der kürzesten Warteschlange gewählt wird. Die Abfertigung liegt gleichverteilt im Intervall [45s,105s]. 6 von 10 Kunden nehmen den Einkaufswagen mit zum Parkplatz. Dadurch wird der Einkaufswagen erst nach weiteren 1 bis 3 Minuten frei.

Der Betreiber des Supermarktes ist an folgenden Informationen interessiert:

- Auslastung der Kassen, Länge der Warteschlangen und Wartezeiten
- Verteilung der Aufenthaltszeiten im Markt (reguläre Kunden bzw. Expresskunden)
- Stellt die Anzahl der Einkaufswagen (40 Stück) einen Engpass dar?



Diskrete Simulation



MODELLANSATZ	VERBESSERUNGEN
<p>Kunden treffen gleichverteilt ein Verteilung bleibt immer gleich Jeder Kunde nimmt einen Einkaufswagen Kein Kunde geht wegen zu langer Wartezeiten weg Keine Bedienstände im Supermarkt Vorgegebene Einkaufszeiten</p>	<p>Exponential- oder emp. Verteilung Tages-/Wochen-/Monats-/Jahreslast Kunden gehen auch ohne Einkaufswagen in den Supermarkt Kunden verzichten auf Einkauf, wenn die Wartezeiten zu lang sind Bedienstände berücksichtigen, Layout Einkaufszeiten abhängig von der Anzahl der Waren und der Anzahl der Kunden (Staus)</p>



Diskrete Simulation

MODELLANSATZ	VERBESSERUNGEN
<p>Anzahl der Personen in der Warteschlange als Auswahlkriterium</p> <p>Kein Wechsel zwischen den Kassen</p> <p>Alle Kassen sind immer besetzt</p> <p>Kein Ausfall einer Kassa</p> <p>Vorgegebene, gleichverteilte Bedienzeiten an der Kassa</p> <p>Kunden werden der Expresskassa bzw. den Normalkassen zugeordnet</p> <p>Individuelle Unterschiede unberücksichtigt</p>	<p>Personen und Anzahl der Waren, Schnelligkeit der Kassiererin,....</p> <p>Wechsel (teilweise) möglich</p> <p>Unterschiede über den Tag (Teilzeit)</p> <p>Ausfälle simulieren</p> <p>Bedienzeiten korrelieren mit der Anzahl der Waren, exponentialverteilt</p> <p>Kunden werden sich an diese Vorgaben nicht halten</p> <p>Unterschiede (Kassiererinnen, Kunden)</p>

Diskrete Simulation

MODELLANSATZ	VERBESSERUNGEN
<p>Kunde fragt alle Kassen ab</p> <p>Einkaufswagen werden wieder zurückgegeben</p> <p>Abbruch der Simulation nach einer bestimmten Anzahl von Kunden</p>	<p>Kunde überblickt nur eine kleine Anzahl der Kassen und wählt aus dieser Untermenge aus „Schwund“</p> <p>Abbruch nach einer bestimmten Zeit</p>

► WARTESCHLANGENPROBLEME

- Datenfernverarbeitungssysteme
- Implementierung von Rechnern
- Supermärkte
- Kassenhallen
- Informationsflüsse
- Business Reengineering
- Personenflüsse
- Materialflüsse (Supply Chains: hoher Servicegrad bei geringen Kosten)
- Job Shop Modelle/Produktionssysteme
- Lagerhaltungsmodelle
- Liftsteuerungen
- Flughäfen

Diskrete Simulation

► MONTE CARLO SIMULATIONEN

Rundreiseprobleme (TSP)

Ablaufstochastische Netzpläne

Abbaupläne im Bergbau

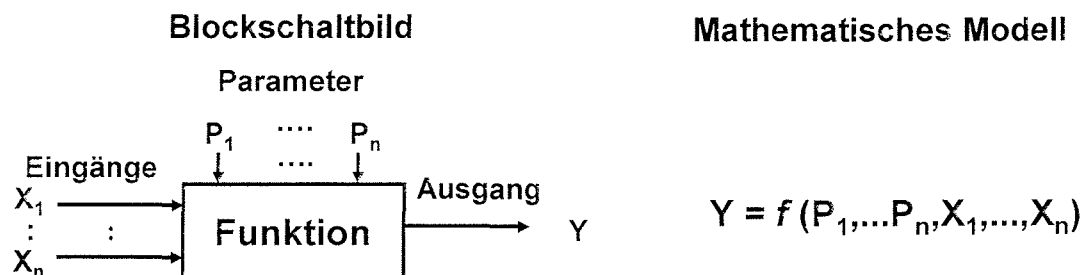
Entwicklung von Medikamenten

IT - Projekte

Umstellung auf elektronisches Grundbuch

Kontinuierliche Simulation

Ausgangspunkt einer kontinuierlichen Simulation ist entweder ein
Blockschaltbild oder ein mathematisches Modell
(Differentialgleichungssystem)



Kontinuierliche Simulation

Die blockorientierten Simulationsprogramme beruhen oftmals auf der
Programmiersprache FORTRAN (FORMula TRANslator)

Die Anweisungen lassen sich in drei Gruppen einteilen:

▷ **Strukturanweisungen**

FORTRAN-Anweisungen

Blöcke

▷ **Datenanweisungen**

Anfangsbedingungen

Parameter

Konstante [Constants can be changed in subclasses in FORTRAN?](#)

▷ **Steueranweisungen**

Übersetzung

Ausführung (Schrittweite, Simulationsmethode, ...)

Ausgabe (numerisch, grafisch, Ausgabeschrittweiten,...)

Kontinuierliche Simulation

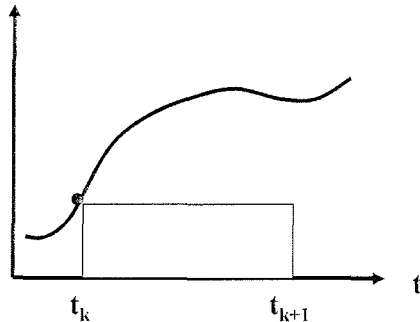
▷ Integration

$Y = \text{INTGRL}(\text{IC}, X)$

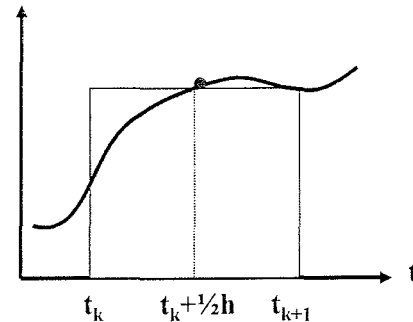
IC: Initial Conditions

$$y = \int_{t_0}^t x dt + y(t_0)$$

Rechteckregel

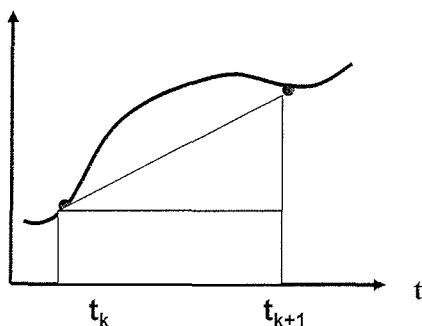


Mittelpunktregel

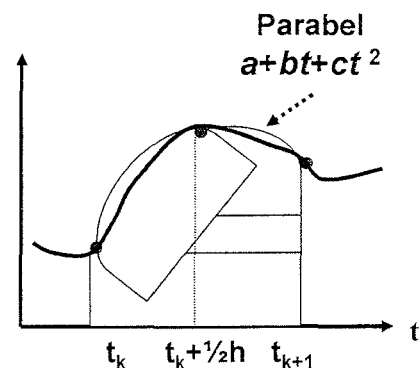


Kontinuierliche Simulation

Trapezregel



Simpson-Regel



Kontinuierliche Simulation

▷ Halteglied

$Y = \text{Z HOLD } (X1, X2)$

$y = x2$ für $x1 > 0$

$y = \text{letzter Wert von } x2 \text{ für } x1 \leq 0$

▷ Unempfindlichkeit

$Y = \text{DEADSP } (P1, P2, X)$

$y = 0$ für $p1 \leq x \leq p2$

$y = x - p2$ für $x > p2$

$y = x - p1$ für $x < p1$

▷ Totzeit

$Y = \text{DELAY } (N, P, X)$

$y(t) = x(t-p)$ für $t \geq p$

$y = 0$ für $t < p$

P: Verzögerung

N: Anzahl der Stützpunkte in P

▷ Begrenzer

$Y = \text{LIMIT } (P1, P2, X)$

$y = p1$ für $x < p1$

$y = p2$ für $x > p2$

$y = x$ für $p1 \leq x \leq p2$

Kontinuierliche Simulation

▷ Analogrechner

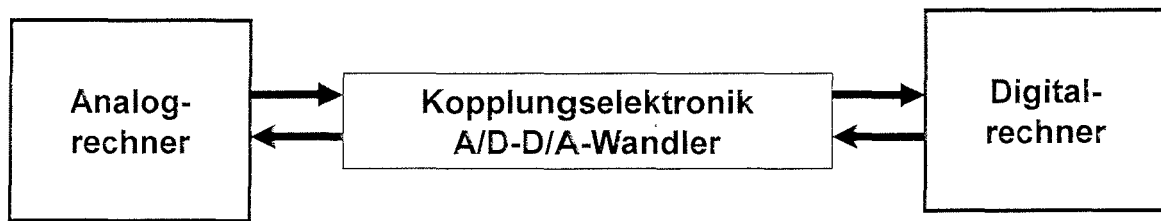
Vorteile	Nachteile
Parallelität	Begrenzte Ein-/Ausgabe Begrenzte Genauigkeit Begrenzte Speichermöglichkeiten Hardware abhängig von Problemgröße

▷ Digitalrechner

Vorteile	Nachteile
Hohe Genauigkeit Vielfältige Ein-/Ausgabe Hohe Speicherkapazität Hardware unabhängig von Problemgröße	Sequentielle Arbeitsweise Integrationsfehler

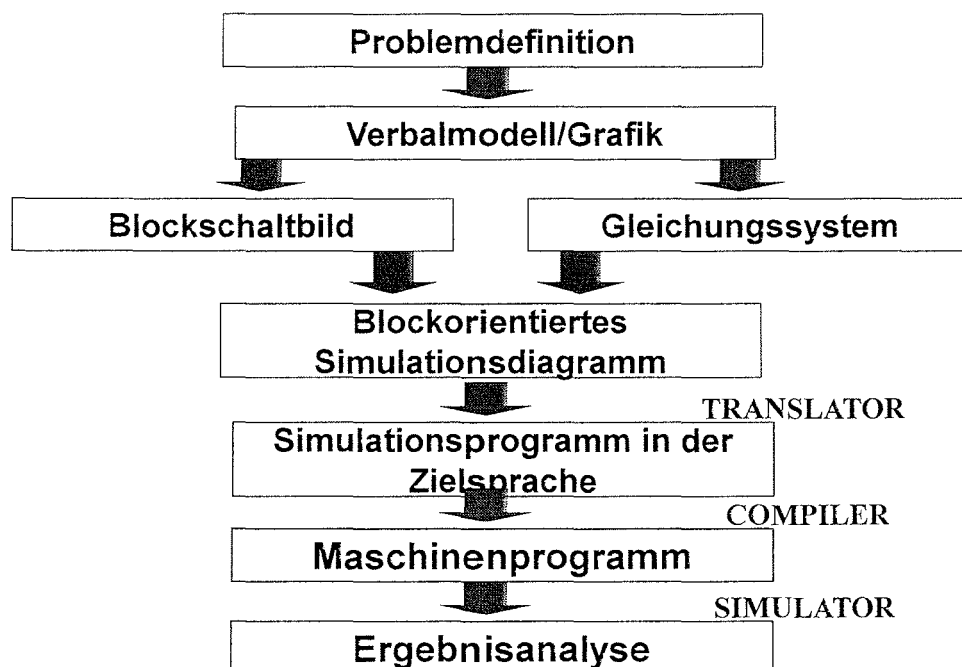
Kontinuierliche Simulation

▷ Hybridrechner



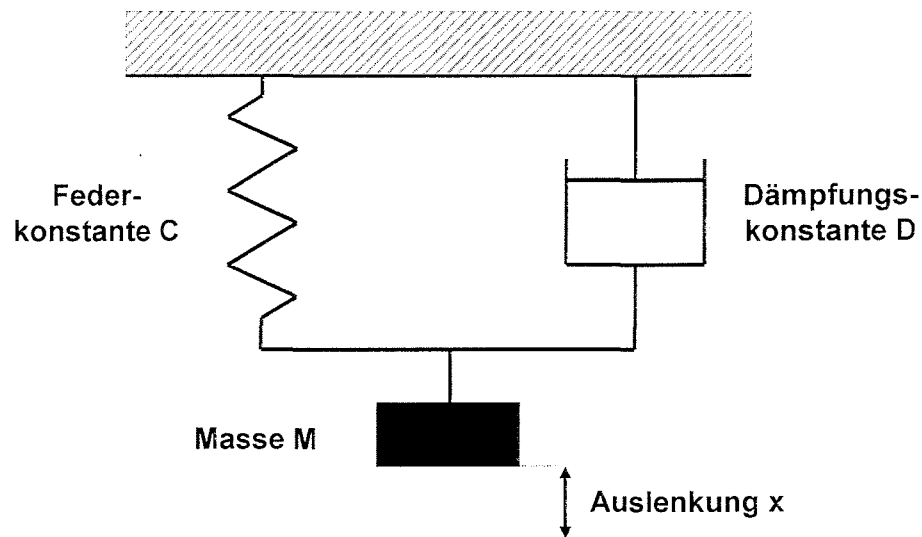
Kontinuierliche Simulation

▷ Vorgehensweise



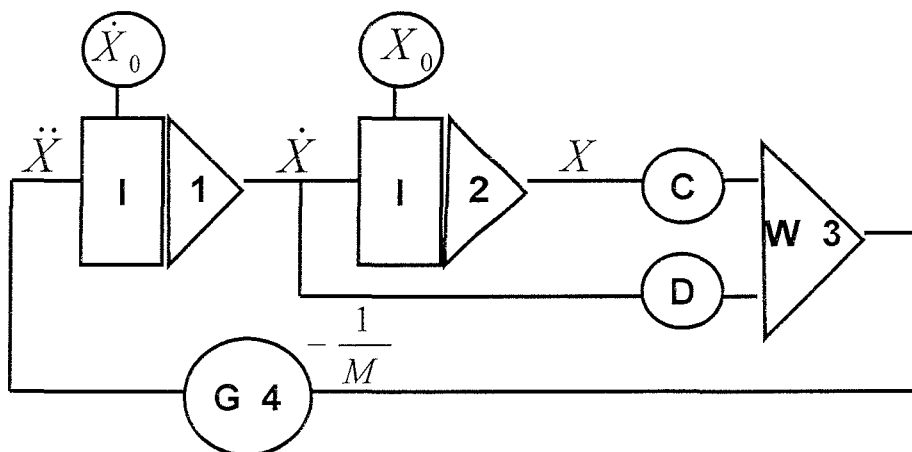
Kontinuierliche Simulation

GEDÄMPFTES FEDER-MASSE-SYSTEM



Kontinuierliche Simulation

Blockschaltbild



Modellgleichung
$$\ddot{X} = -\frac{1}{M}(D\dot{X} + CX)$$

Kontinuierliche Simulation

Blockorientiertes Simulationsdiagramm

TITLE GEDÄMPFTES FEDER-MASSE-SYSTEM

*STRUKTURANWEISUNGEN

XP=INTGRL(XP0,X2P)

X=INTGRL(X0,XP)

X2P=-D*XP/M-C*X/M

*DATENANWEISUNGEN

PARAMETER D=0.3,M=1.76,C=4.0

INCON X0=1.0,XP0=0.0

STEUERANWEISUNGEN

PRINT X,XP,X2P

PRTPLT X

TIMER DELT= 0.1,FINTIM=20.0,PRDEL=1.0,OUTDEL=1.0

METHOD SIMP

END

STOP

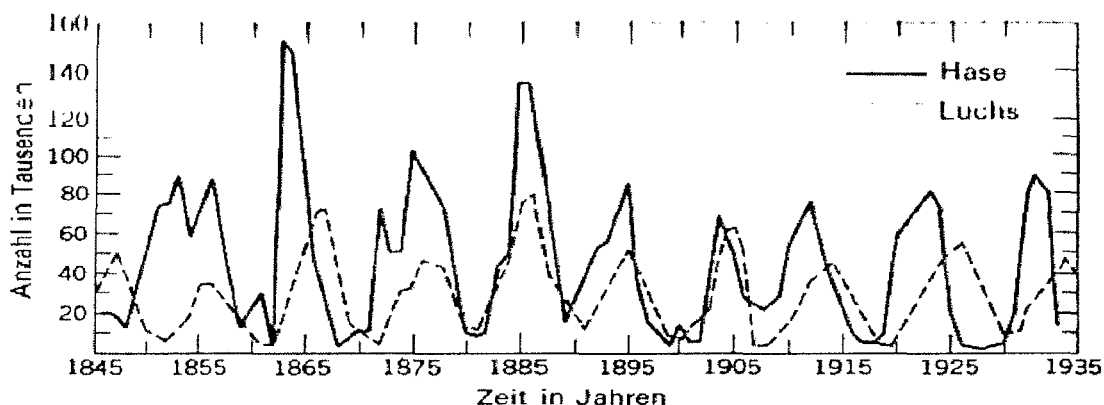
ENDJOB

Kontinuierliche Simulation

RÄUBER-BEUTE-MODELLE

In einem Areal leben Luchse (Räuber) und Hasen (Beute)

Die Populationsgrößen zeigen periodische Schwankungen, die aus den Aufzeichnungen in den Jahren von 1845 bis 1935 der Hudson Bay Company deutlich sichtbar sind



Kontinuierliche Simulation

A. Lotka (1920) und V. Volterra (1931) haben sich mit Populationsdynamiken beschäftigt. Das Lotka-Volterra-Modell beschreibt eine Räuber-Beute-Dynamik, bei der die Beutetiere N nur durch die Räuber M verringert werden, während die Vermehrung der Räuber nur von der Anzahl der Beutetiere N abhängt. b_N bzw. b_M beschreiben die natürlichen Sterberaten.

$$\begin{aligned} dN / dt &= (a_N - b_N M) N \\ dM / dt &= (a_M N - b_M) M \end{aligned}$$

.....

DERIVATIVE

n1p = an*n-bn*n*m

m1p = am*n*m-bm*m

n = integ(n1p,n10)

m = integ(m1p,m10)

END

.....

ACSL-Programm (Advanced Continuous Simulation Language)

Kontinuierliche Simulation

ANWENDUNGEN

Schwingungsprobleme bei Kraftfahrzeugen (Radaufhängung)

Entwicklung von Automatikgetrieben

Verwindungsprobleme bei Traktoren

Strömungsverhalten von Karosserien

Verformung von Fahrzeugen bei Unfällen

Flugbahnregelungen

Schleudersitz-Untersuchungen

Entwurf von Hubschrauber-Rotoren

Ausbeutung von Erdgasvorkommen

Regel- und Sicherheitssysteme eines Reaktors

Anlagenbau: mechanische, chemische und thermische Prozesse

Kontinuierliche Simulation

Temperaturprofile bei Hitzeschildern

Magensaftproduktion

Darmperistaltik

Liquiditätsmodelle

Wechselwirkungen zwischen einem

Unternehmen und seinem Markt

Preispolitische Modelle

Nichtlineare Optimierungsprobleme
(Gradientenverfahren)

Ökologische Modelle

Systemdynamik

SYSTEM DYNAMICS

Systemdynamik (System Dynamics) ist die Simulation

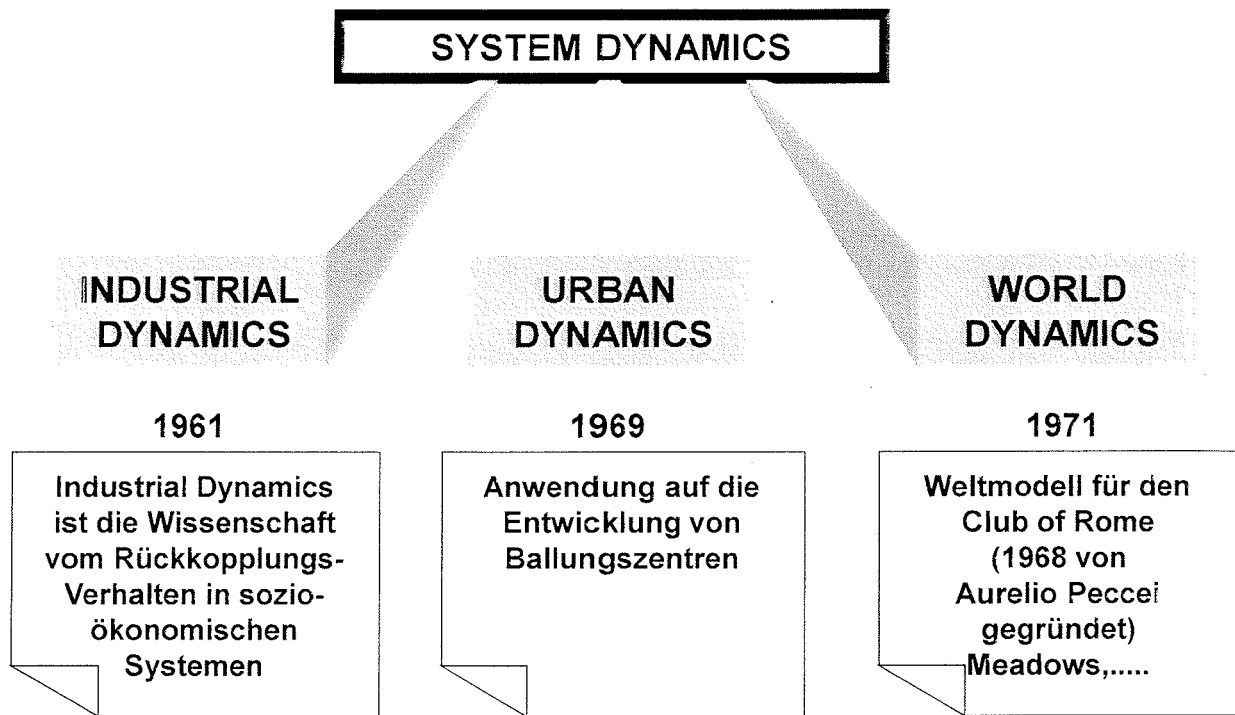
- ▶ komplexer,
- ▶ zeitdiskreter,
- ▶ nichtlinearer,
- ▶ dynamischer



Systeme mit Rückkopplungsschleifen.

Jay Forrester (1958)

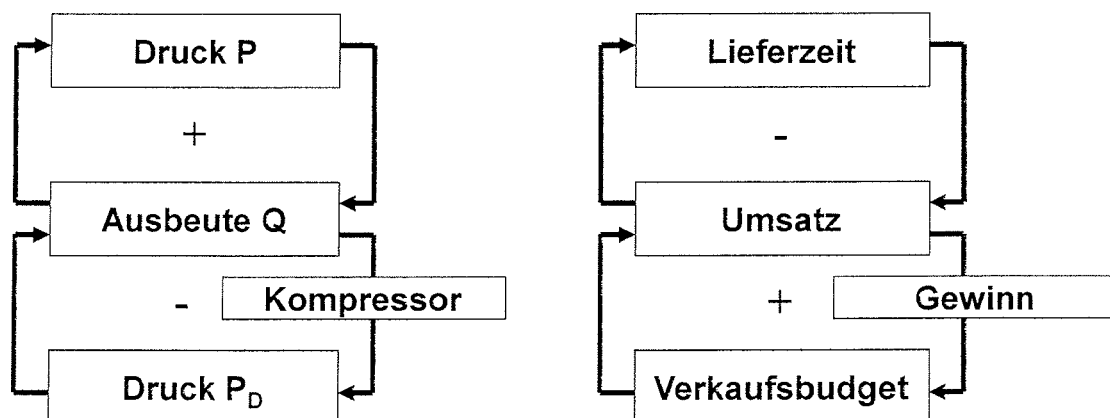
Systemdynamik



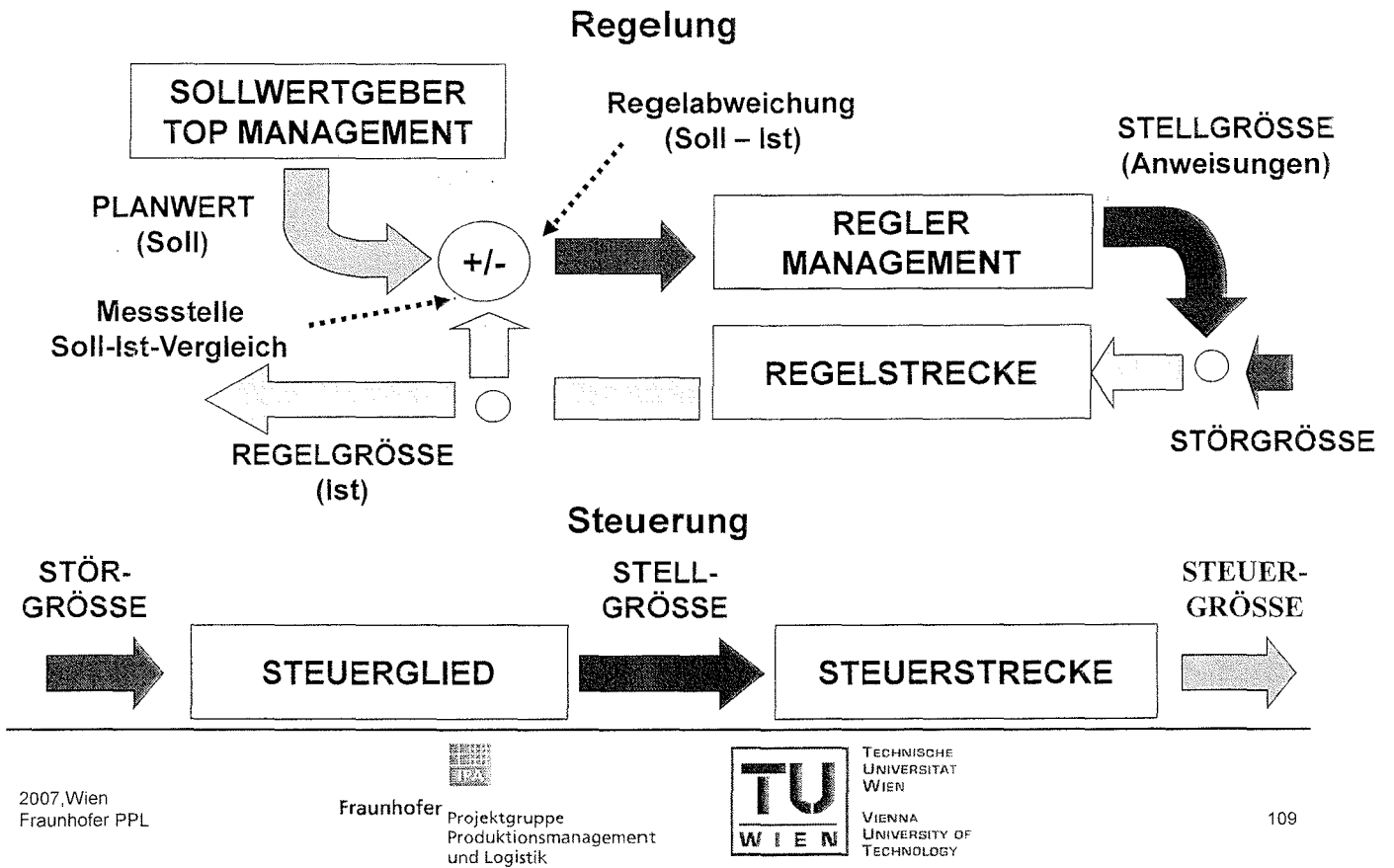
Systemdynamik

Industrial Dynamics

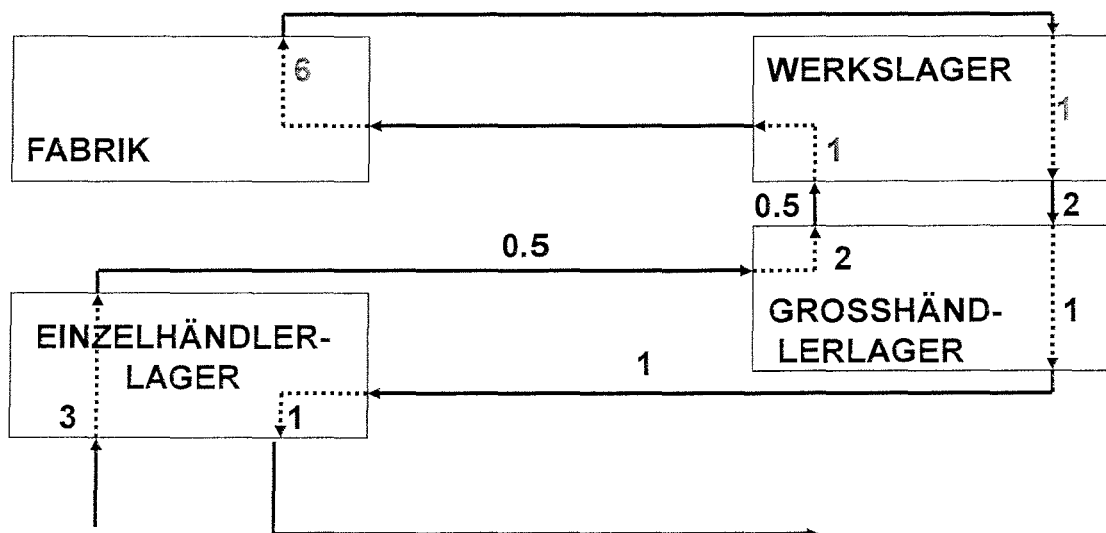
Übertragung von Erkenntnissen aus technischen Regelkreisen auf ökonomische Prozesse



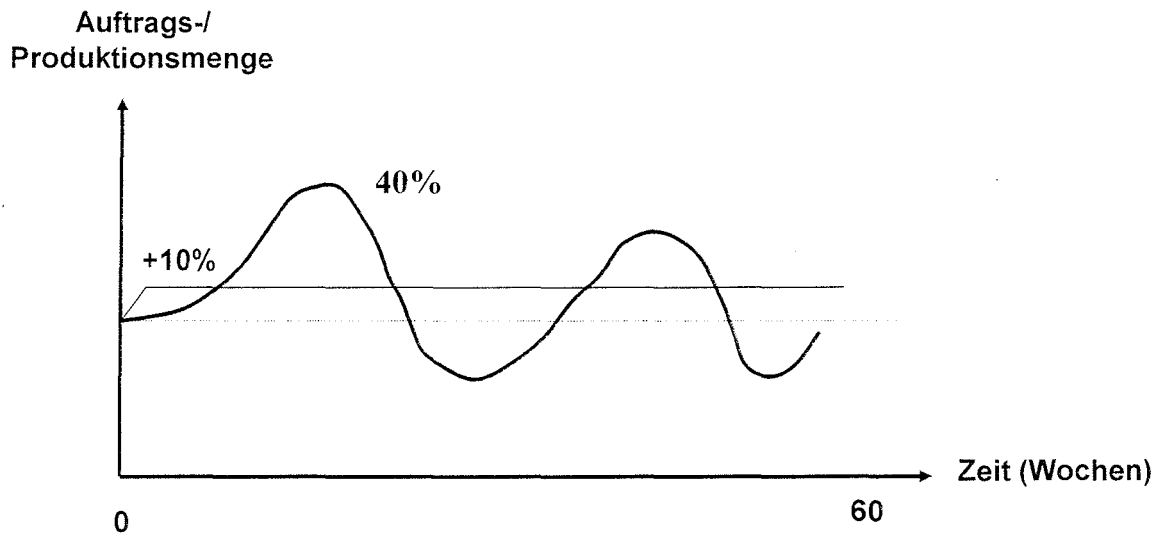
Systemdynamik



Systemdynamik



Systemdynamik



Informationsflusszeiten gegen Null bringen

Systemdynamik

► Material-/Informationsflüsse



► Zustandsvariable (levels, reservoirs)



► Zustandsänderungen (Raten, rates)



► Konstante



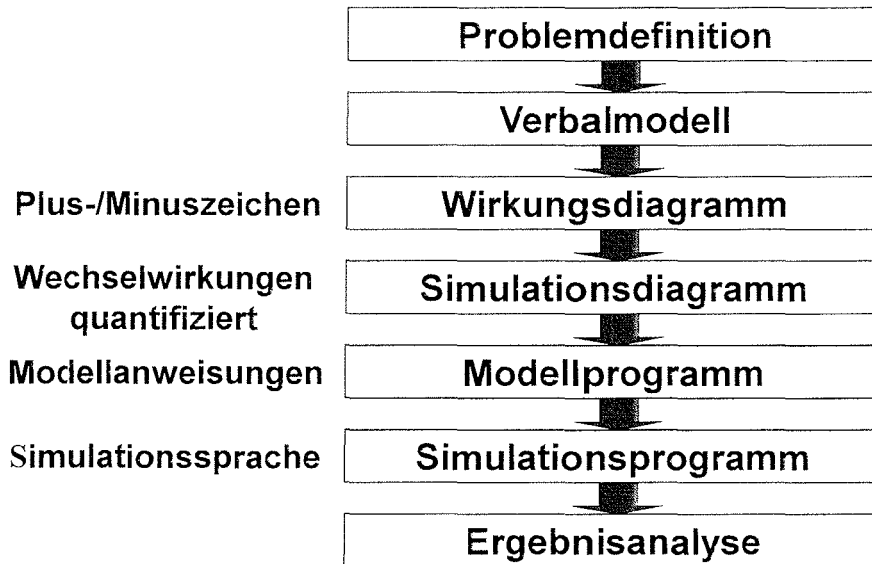
► Hilfsvariable



► Quelle/Senke

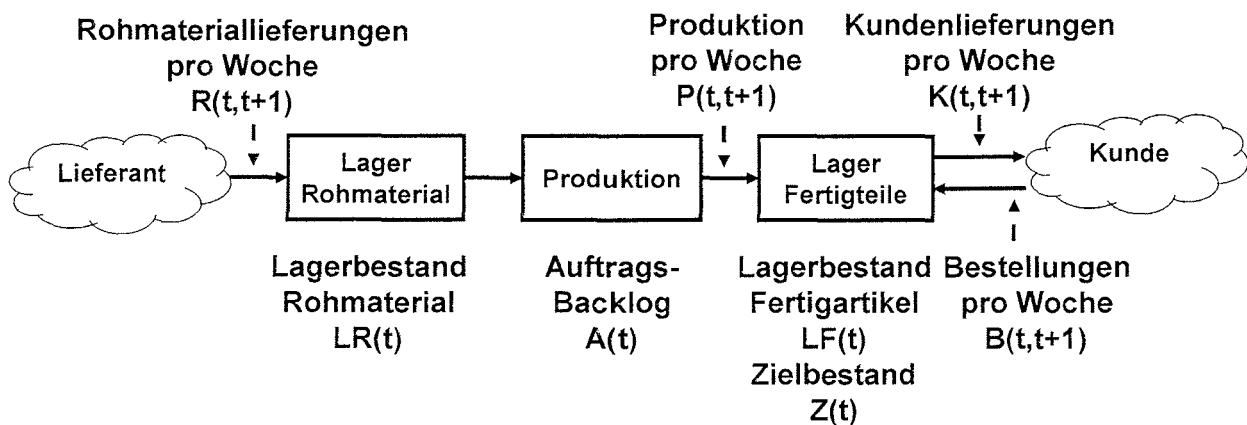


Vorgehensweise



Systemdynamik

Supply Chain - Modell



Modellgleichungen

► Auftragsbacklog

$$A(t+1) = A(t) + B(t,t+1) - K(t,t+1) \quad (1)$$

► Zielbestand (5 durchschnittliche Wochen)

$$Z(t+1) = (5/4)(B(t,t+1) + B(t-1,t) + B(t-2,t-1) + B(t-3,t-2)) \quad (2)$$

► Lagerbestand Rohmaterial

$$LR(t+1) = LR(t) + R(t,t+1) - P(t,t+1) \quad (3)$$

► Lagerbestand Fertigartikel

$$LF(t+1) = LF(t) + P(t,t+1) - K(t,t+1) \quad (4)$$

► Kundenlieferungen

$$\begin{aligned} K(t,t+1) &= A(t) \quad \text{wenn } A(t) < LF(t) \\ &= LF(t) \quad \text{sonst} \end{aligned} \quad (5)$$

► Rohmateriallieferungen

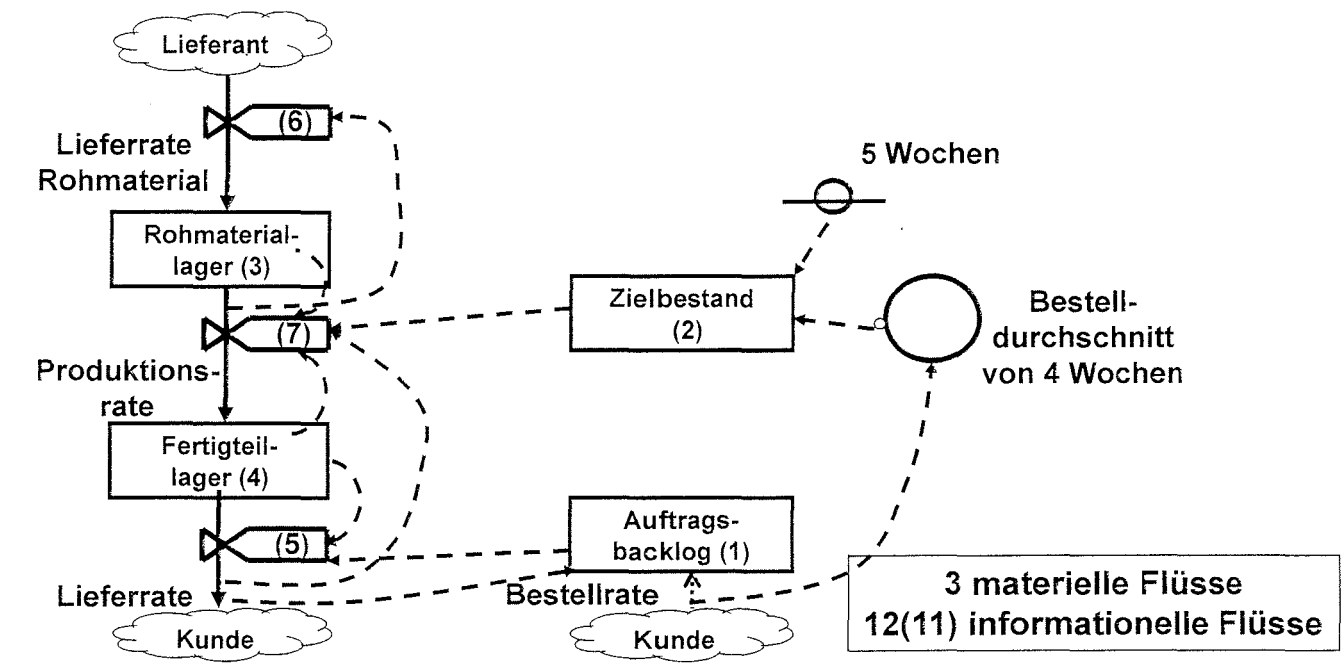
$$R(t,t+1) = P(t-1,t) \quad (6)$$

Systemdynamik

► Produktion

$$\begin{aligned} P(t,t+1) &= Z(t) - LF(t) + K(t,t+1) \quad \text{wenn } 0 < P(t,t+1) < LR(t) \\ &= 0 \quad \text{wenn } P(t,t+1) < 0 \\ &= LR(t) \quad \text{wenn } P(t,t+1) > LR(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Diagramm

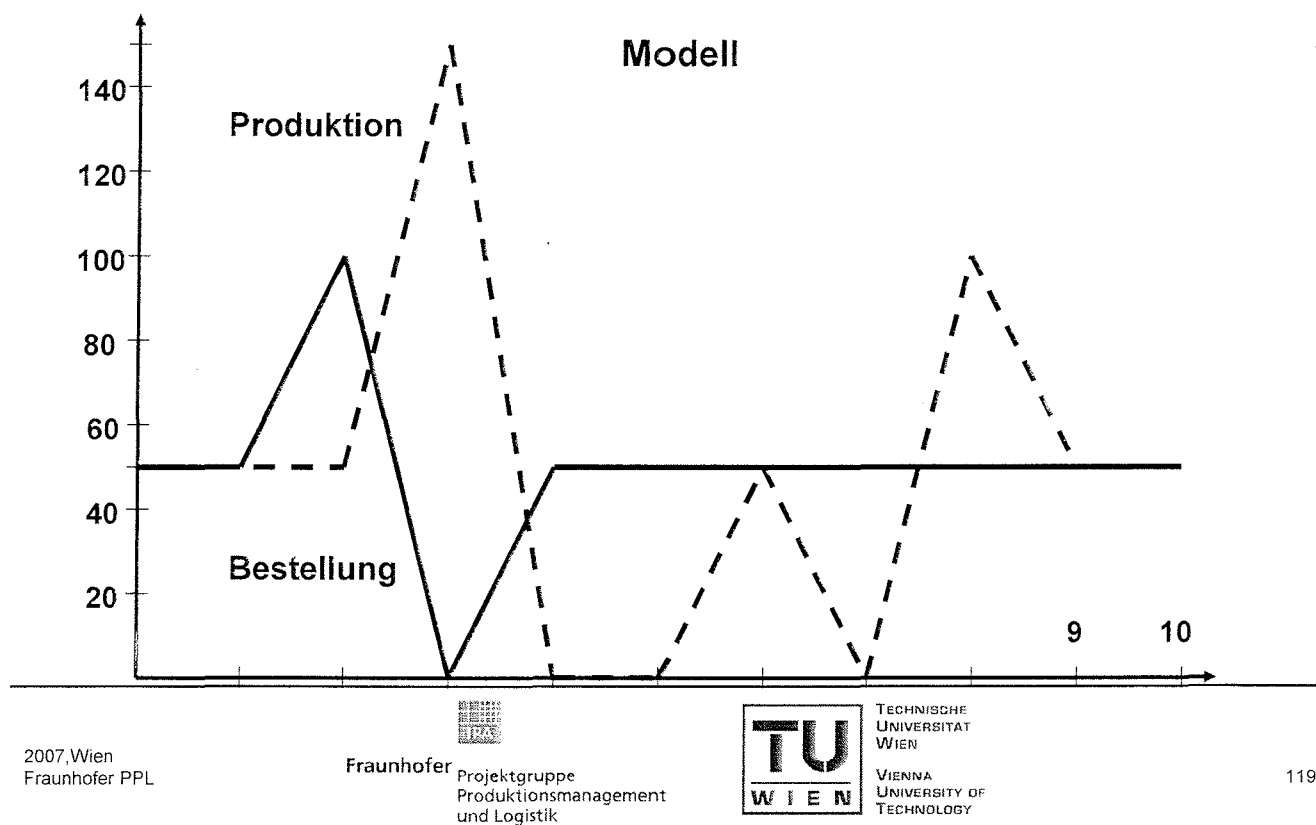


Systemdynamik

Durchrechnung des Modells

t	B	A	Z	LF	LR	R	P	K
1	50	50	250	250	150	50	50	50
2	100	100	250	250	150	50	50	50
3	0	0	250	300	50	50	150	100
4	50	50	250	300	200	150	0	0
5	50	50	250	250	200	0	0	50
6	50	50	250	250	150	0	50	50
7	50	50	250	200	200	50	0	50
8	50	50	250	250	100	0	100	50
9	50	50	250	250	150	100	50	50
10	50	50	250	250	150	50	50	50

Anfangswerte



Modellrevision

► Rohmateriallieferungen

$$R(t, t+1) = B_T * (Z(t)/LF(t)) \quad (6')$$

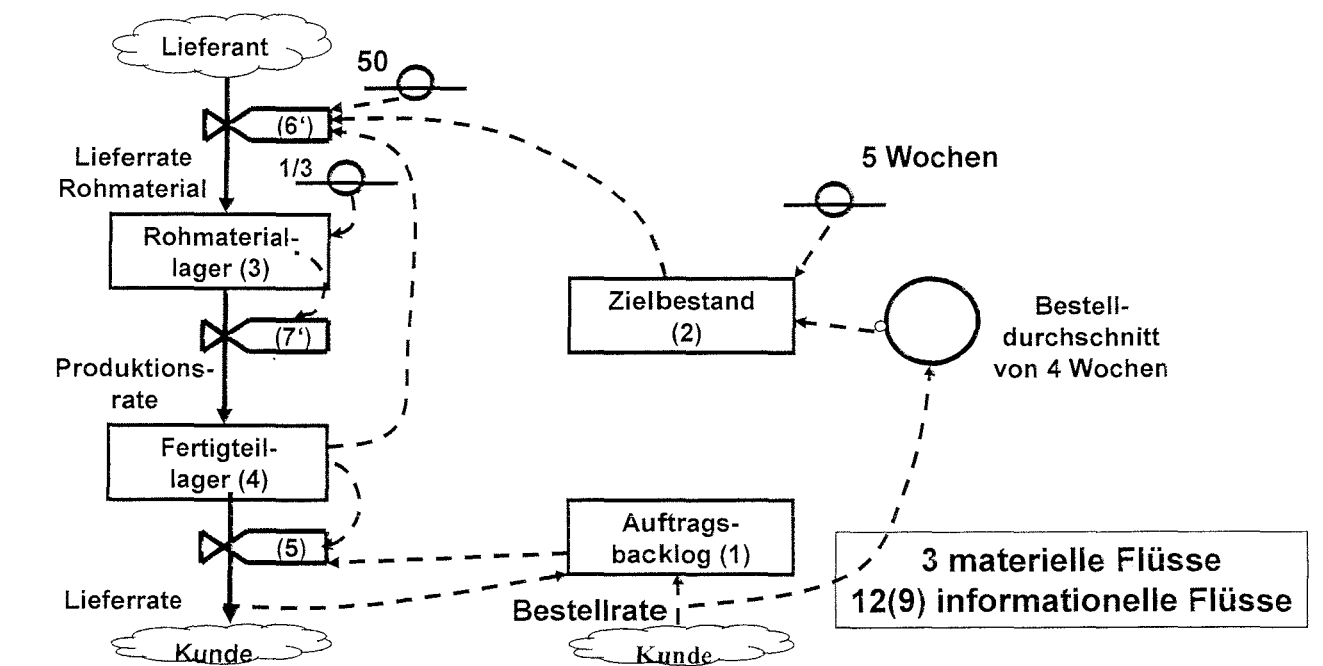
B_T : typische Bestellrate (z.B.: 50)

► Produktion

$$P(t, t+1) = LR(t)/3 \quad (7')$$

Systemdynamik

Diagramm des revidierten Modells

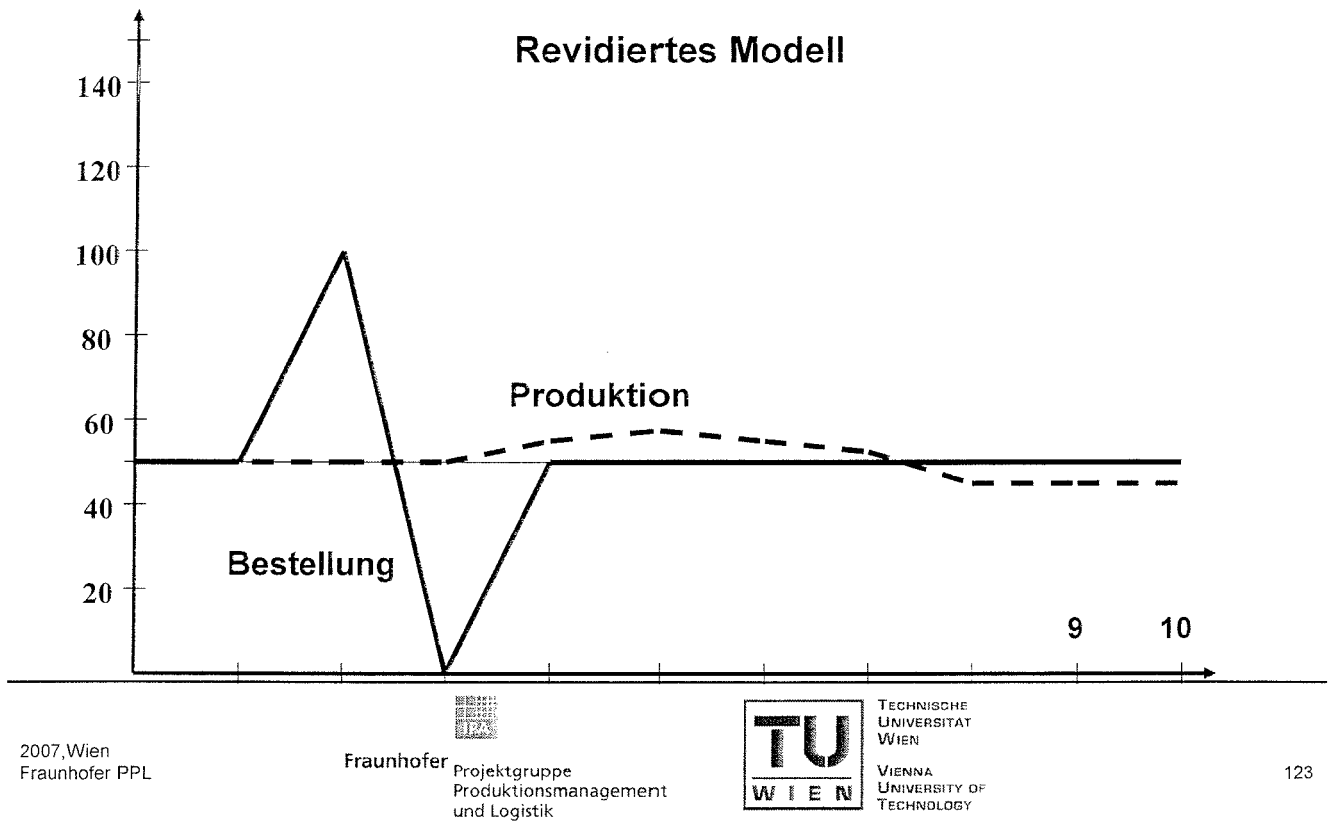


Systemdynamik

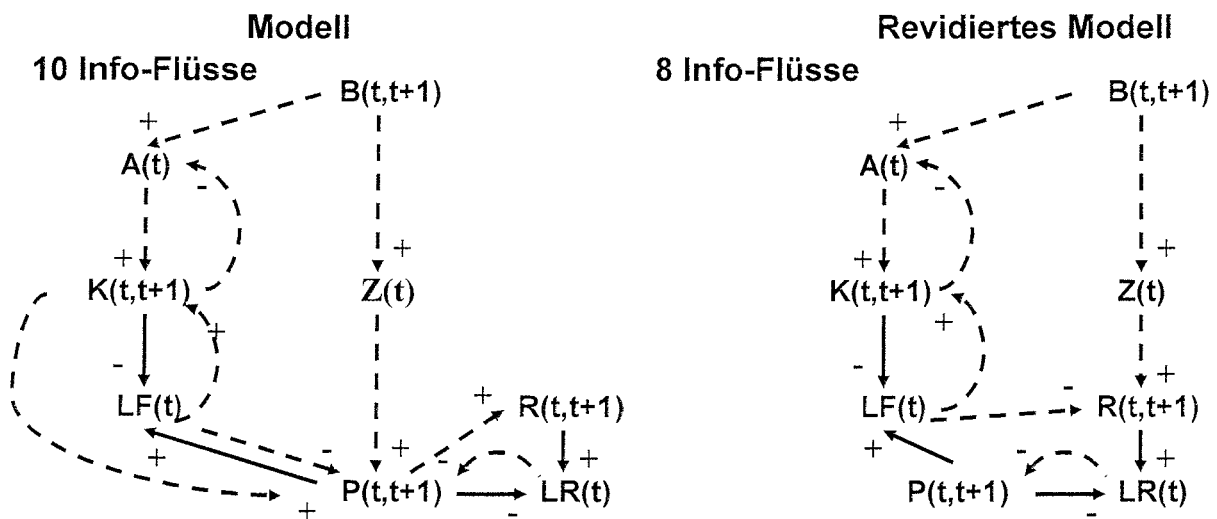
Durchrechnung des revidierten Modells

t	B	A	Z	LF	LR	R	P	K
1	50	50	250	250	150	50	50	50
2	100	100	250	250	150	50	50	50
3	0	0	250	200	163	63	50	100
4	50	50	250	254	171	63	54	0
5	50	50	250	261	175	49	57	50
6	50	50	250	265	157	48	54	50
7	50	50	250	268	140	35	52	50
8	50	50	250	264	140	47	47	50
9	50	50	250	261	141	47	47	50
10	50	50	250	258	142	48	47	50

Anfangswerte



Vergleich der Wirkungsdiagramme



Anwendungen



- ▶ Simulation von Unternehmensbereichen
- ▶ Simulation ganzer Unternehmungen
- ▶ Supply Chain - Modelle
- ▶ Business Process Reengineering

- ▶ Populationsmodelle
- ▶ Ökologische Modelle

- ▶ Weltmodelle

Club of Rome

- Gründung 1968 durch Aurelio Peccei (Fiat und Olivetti) und Alexander King (Direktor für Wissenschaft, Technologie und Erziehung der OECD)
- „The Club of Rome is an informal, multinational, non political group of scientists, economists, planners, educators, and business leaders“
- Besteht aus maximal 100 Mitgliedern
- 1969 Entwicklung der Weltmodelle (Hasan Osbekhan, ab 1970 durch das MIT : Jay Forrester, D. L. Meadows)
- 1972: Dennis L. Meadows et al.: „Die Grenzen des Wachstums“ (1973 Friedenspreis des Deutschen Buchhandels)

Das Weltmodell enthält fünf makroökonomische Größen:

- Bevölkerung
- Kapital
- Nahrungsmittel
- Rohstoffvorräte
- Umweltverschmutzung



WELTMODELL

Kontinuierliche Modellierung mit CSMP
auf der Basis des Originalmodells in DYNAMO
(J. W. Forrester „World Dynamics“)

• Datenanweisungen

PARAMETER BRN1=0.04,NRUN1=1,FC1=1,CIGN1=0.05,POLN1=1,DRN1=0.028,...
CIDN1=0.025

CONSTANT
21 Konstanten

INCON
5 Anfangsbedingungen

* Dynamischer Teil

FUNCTION
22 Funktionen

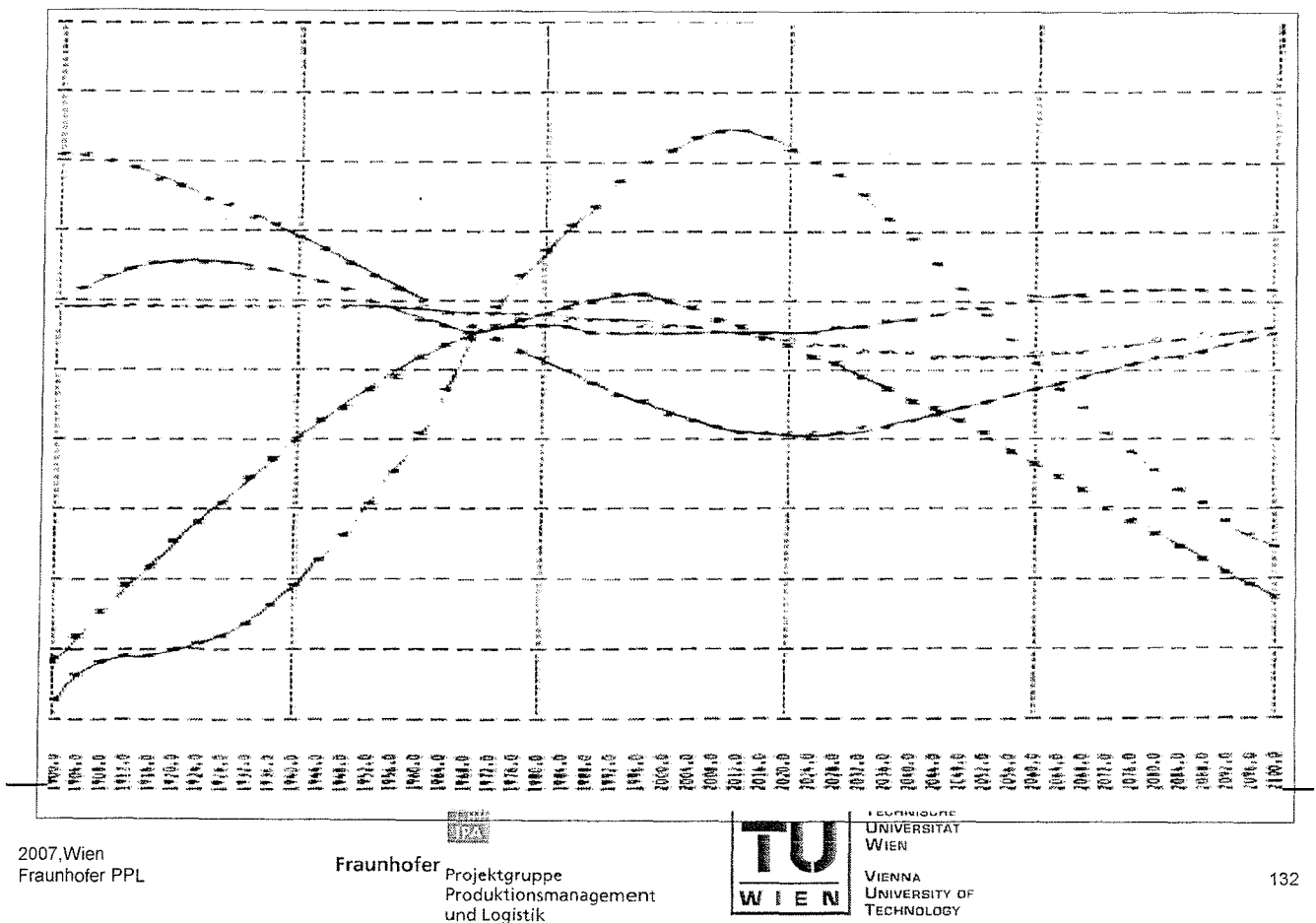
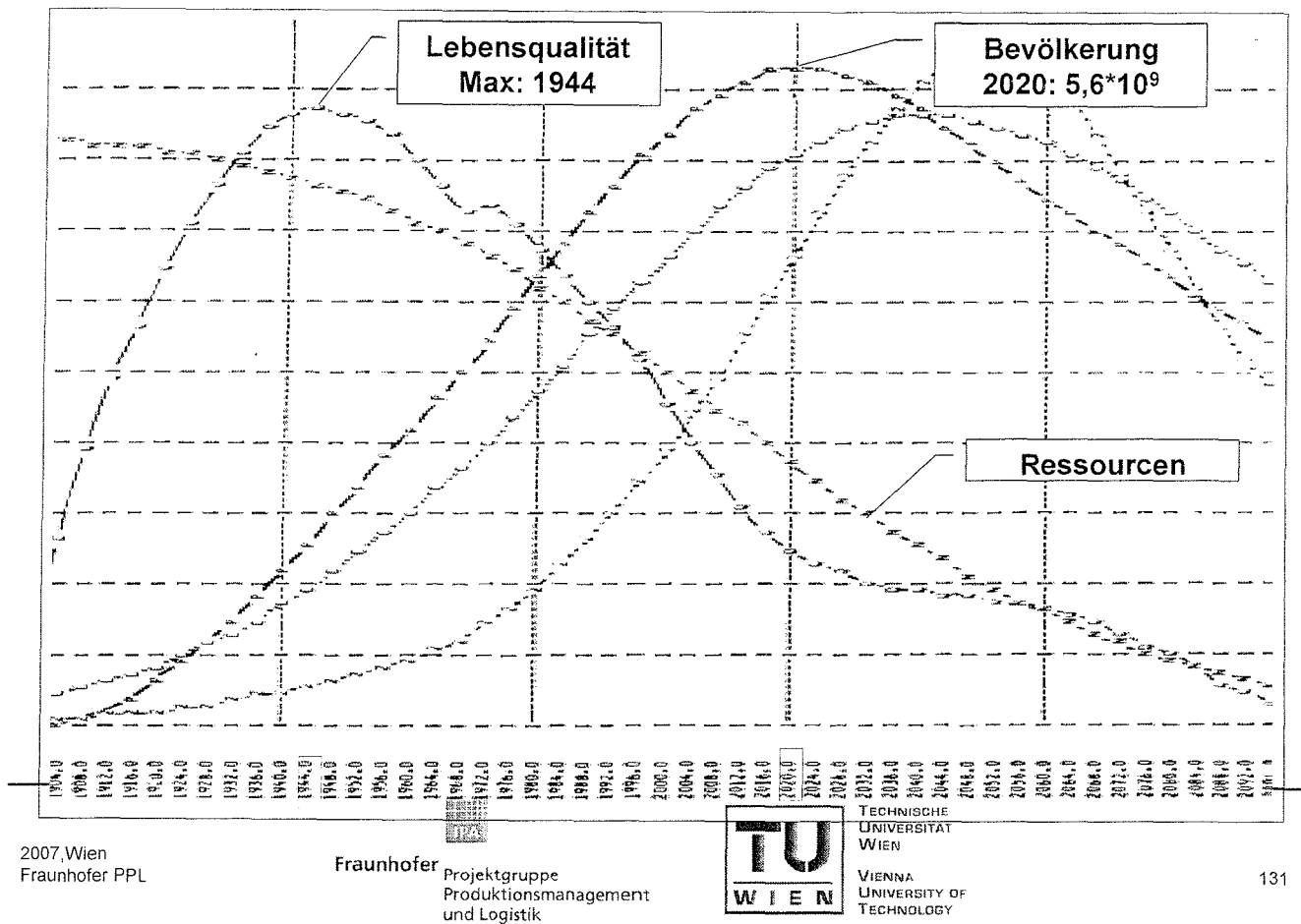


$P = \text{INTGRL}(PI, (BR - DR))$
 $NR = \text{INTGRL}(NRI, (-NRUR))$
 $CI = \text{INTGRL}(CII, (CIG - CID))$
 $POL = \text{INTGRL}(POLI, (POLG - POLA))$
 $CIAF = \text{INTGRL}(CIAFI, CIAFDT)$
 $CIAFDT = (CFIFR * CIQR - CIAF) / CIAFT$
 $BR = P * \text{INSW}((\text{TIME} - \text{SWT1}), BRN, BRN1) * BRFM * BRMM * BRCM * BRPM$
 $NRUR = P * \text{INSW}((\text{TIME} - \text{SWT2}), NRUN, NRUN1) * NRMM$
 $DR = P * \text{INSW}((\text{TIME} - \text{SWT3}), DRN, DRN1) * DRMM * DRPM * DRFM * DRCM$
 $CIG = P * \text{INSW}((\text{TIME} - \text{SWT4}), CIGN, CIGN1) * CIM$
 $CID = CI * \text{INSW}((\text{TIME} - \text{SWT5}), CIDN, CIDN1)$
 $POLG = P * \text{INSW}((\text{TIME} - \text{SWT6}), POLN, POLN1) * POLCM$
 $FR = FPCI * FCM * FPM * \text{INSW}((\text{TIME} - \text{SWT7}), FC, FC1) / FN$
 $POLA = POL / POLAT$
 $MSL = ECIR / ECIRN$
 $ECIR = CIR * (1 - CIAF) * NREM / (1 - CIAFN)$
 $NRFR = NR / NRI$
 $CR = P / (LA * PDN)$
 $CIRA = CIR * CIAF / CIAFN$
 $CIR = CI / P$
 $POLR = POL / POLS$
 $QL = QLS * QLM * QLC * QLF * QLP$

22 Strukturanweisungen

• Steueranweisungen

$\text{TIMER FINTIM} = 2100, \text{TIME} = 1900, \text{DELT} = 0.2, \text{OUTDEL} = 4$
 METHOD TRAPZ
 $\text{OUTPUT } P, \text{POLR}, CI, QL, NR$
 $\text{PAGE NTAB} = 0, \text{SYMBOL} = (P, 2, C, Q, N)$
 $\text{OUPUT } FR, MSL, QLC, QLP, CIAF$
 $\text{PAGE NTAB} = 0, \text{SYMBOL} = (F, M, 4.5, A), \text{GROUP} = 4$
 END
 STOP



Kritik am Weltmodell:

- Zu schmale Datenbasis
- Modell reagiert zu sensitiv auf Anfangsbedingungen
- Anfangsbedingungen sind nicht empirisch abgesichert
- Übervereinfachung
- Fehlerhafte ökonomische Annahmen (Preismechanismen und Innovationen werden nicht entsprechend berücksichtigt)
- Entwicklungsländer sahen in dem Trend zum Null-Wachstum eine Verfestigung des Status quo und damit eine Behinderung ihrer zukünftigen Entwicklungschancen
- Studie ist ein „hohles und irreführendes Werk“ (New York Times)
- „altmodischer Unsinn“ (The Economist)

Systemdynamik

PRODUKT	ANBIETER	WEB-ADRESSE
DYNAMO	Pugh-Robertson Associates	
iTHINK	High Performance Systems	www.hps-inc.com
Powersim	Powersim AS	www.powersim.no
Stella	High Performance Systems	www.hps-inc.com
Vensim	Ventana Systems, Inc.	www.vensim.com

Systemplanung und Simulation

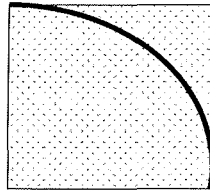
Literatur

- Banks,J.:(Ed.):** Handbook of Simulation. John Wiley & Sons, 1998
- Banks,J./Carson,J.S./Nelson,B.L./Nicol,D.M.:** Discrete-Event System Simulation. Pearson Education International,2001
- Bobillier,P.A./Kahan,B.C./Probst,A.R.:** Simulation with GPSS and GPSS V. Prentice-Hall, 1976
- Bossel,H.:** Systemdynamik. Vieweg, 1987
- Bossel,H.:** Systeme, Dynamik, Simulation. Modellbildung, Analyse und Simulation komplexer Systeme. Books on Demand GmbH, 2004
- Bratley,P./Fox,B.L./Schrage,L.E.:** A Guide to Simulation. Springer, 1987
- Breitenecker,F./Ecker,H./Bausch-Gall,I.:** Simulieren mit ACSL. Eine Einführung in die Modellbildung, numerischen Methoden und Simulation. Vieweg, 1993
- Coyle,R.G.:** System Dynamics Modelling. A Practical Approach. Chapman & Hall,1996
- Evans,J.R./Olson,D.L.:** Introduction to Simulation and Risk Analysis. Prentice Hall, 2002
- Fishman,G.S. :** Monte Carlo. Concepts, Algorithms, and Applications. Springer-Verlag, 1996
- Forrester,J.W.:** Industrial Dynamics. M.I.T.-Press, 1961
- Forrester,J.W.:** Grundzüge der Systemtheorie. Gabler, 1972
- Gharajedagi,J.:** Systems Thinking. Managing Chaos and Complexity: A Platform for Designing Business Architecture. Elsevier, 2006
- Gordon.G.:** Systemsimulation. Oldenbourg, 1972
- Harrington,H.J./Hoffherr,G.D./Reid, Jr.,R.P.:** Statistical Analysis Simplified. McGraw-Hill, 1998
- Harrington,H.J./Tumay,K.:** Simulation Modeling Methods. McGraw-Hill,2000
- Hering,E./Hermann,A./Kronmüller,E.:** Unternehmenssimulation mit dem PC. Vieweg, 1989
- Kelton,W.D./Sadowski,R.P./Sadowski,D.A.:** Simulation with Arena. McGraw-Hill,1998
- Kuhn,A./Rabe,M.(Hrsg.):** Simulation in Produktion und Logistik: Fallbeispielsammlung. Springer-Verlag, 1998
- Law,A.M./Kelton,W.D.:** Simulation Modeling and Analysis. McGraw-Hill, 2000 (1982)
- Liebl,F.:** Simulation. Problemorientierte Einführung. R. Oldenbourg Verlag, 1995
- Ludewig,J.:** Simulationsmodelle ganzer Unternehmungen. Gabler, 1975
- Rathbauer,H.:** Angewandte Simulation mit GPSS World for Windows. Logos Verlag, 2003
- Robinson,St.:** Simulation. The Practice of Model Development and Use. John Wiley & Sons, 2004
- Roberts,N./Anderson,D./Deal,R./Garet,M./Shaffer,W.:** Introduction to Computer Simulation. Addison-Wesley, 1983
- Schriber,T.J.:** Simulation Using GPSS. John Wiley & Sons, 1974
- Schriber,T.J.:** An Introduction to Simulation Using GPSS/H. John Wiley & Sons, 1991
- Sobol,I.M.:** Die Monte-Carlo-Methode. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1991
- Sterman,J.D.:** Business Dynamics. Systems Thinking and Modeling for a Complex World. McGraw-Hill, 2000
- Zeigler,B.P./Praehofer,H./T.G.Kim:** Theory of Modeling and Simulation. Integrating Discrete Event and Continuous Complex Dynamic Systems. Academic Press, 2000
- Zwicker,E.:** Simulation und Analyse dynamischer Systeme in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. De Gruyter, 1981

Monte Carlo Simulation

Geschichtlicher Rückblick

Georges Louis Leclerc, Graf von Buffon (1707 – 1788) , 1773



Das Verhältnis der Fläche des Viertelkreises zur Quadratfläche beträgt

$$\frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

Dieses Verhältnis lässt sich mittels einer Monte Carlo Simulation ermitteln

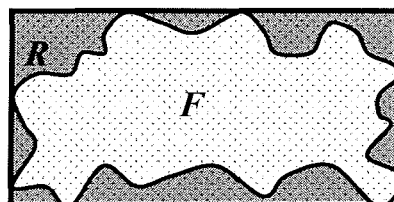
Das Verhältnis der Punkte im Viertelkreis zu der Anzahl der Punkte im Quadrat approximiert die Zahl $\pi/4$

For the exam: note the characteristics of the various distributions!

Monte Carlo Simulation

Stanislaw Ulam und John von Neumann

Ermittlung des Flächeninhalts F einer unregelmäßig begrenzten Fläche




Liegen m von n ermittelten Punkten innerhalb der Fläche F ,
so erhalten wir für F einen Schätzwert

$$F = R \frac{m}{n}$$

Monte Carlo Simulation

Zufallszahlen

► Mid-Square-Methode (John von Neumann)

XXXX²

 XX|XXXX|XX

Bruder Edvin (norwegisches Franziskanerkloster Tautra, 1240/1250)

Jede Zufallszahl X_{i+1} ist eindeutig durch die Zufallszahl X_i determiniert

4-stellige Zufallszahl  maximal 10000 Zufallszahlen

Zyklus: 2100 4100 8100 6100 2100

► Kongruenzmethoden

$$X_{i+1} = aX_i + c \pmod{m}$$

► Additiv: $a = 1$; $c = X_{i-k}$  $X_{i+1} = X_i + X_{i-k} \pmod{m}$

Monte Carlo Simulation

Fibonacci-Folge

Leonardo von Pisa, Filius von Bonacci, ca.1170-1240

Liber Abaci, 1202

Populationsdynamisches Modell

Monate	t = 0	t = 1	t = 2
	1 Hasenpaar	1 Hasenpaar geschlechtsreif	Geburt eines Hasenpaares
	1	1	2

Frage: Wie groß ist die Anzahl der Hasenpaare nach n Monaten?

$$k = 1$$

$$X_{i+1} = X_i + X_{i-1}$$

1 1 2 3 5 8 13 21

Monte Carlo Simulation

Stroboskopische Betrachtung

n	x_n	x_{n+1}/x_n	Dezimal
0	1	1/1	1.0
1	1	2/1	2.0
2	2	3/2	1.5
3	3	5/3	1.6666666
4	5	8/5	1.6
5	8	13/8	1.625
6	13	21/13	1.6153846
7	21	34/21	1.6190476
8	34	55/34	1.6176471

1.6180339887498948820...

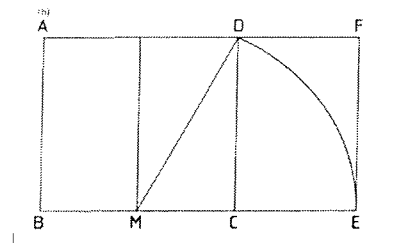
Goldener Schnitt

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.6180..$$

$(1-g) \cdot 360^\circ = 137.5$

Goldener Winkel



Monte Carlo Simulation

► Multiplikativ:

$$X_{i+1} = aX_i \pmod{m}$$

Durch eine geeignete Wahl der Parameter a und c und einen guten Startwert (seed) kann man Zyklen mit einer sehr langen Periode erzielen, im Extremfall sogar einen einzigen Zyklus, der hintereinander die Werte zwischen 0 und $m-1$ berührt, wobei alle Werte die Häufigkeit $1/m$ aufweisen.

Die Zahlenfolge erscheint zufällig, allerdings lässt sich die verborgene Deterministik relativ leicht enttarnen.

Beispiel:

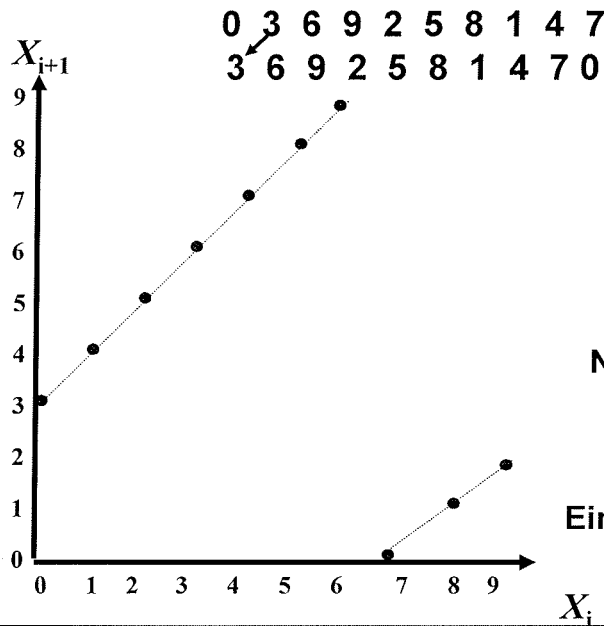
$$X_{i+1} = (X_i + 3) \pmod{m}$$

Mit $X_0 = 0$ erhalten wir die Folge

0 3 6 9 2 5 8 1 4 7 0

Monte Carlo Simulation

Die Unzulänglichkeiten treten zutage, wenn wir mit Hilfe des Zufallszahlengenerators Punkte in einem Quadrat auslosen wollen.



Zufallszahlengenerator erzeugt nur m von m^2 Möglichkeiten
Das Verhältnis beträgt $m/m^2 = 1/m$
Nur 90% der Punkte werden nicht realisiert



Einfacher Unabhängigkeitstest

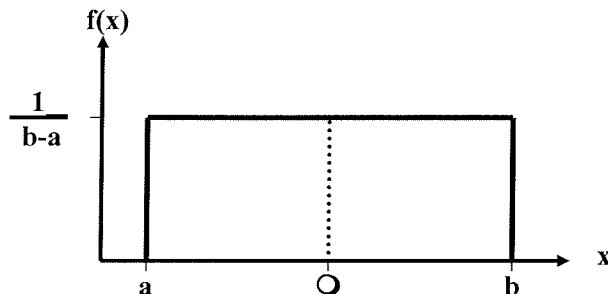
Prüfungsrelevant!

Monte Carlo Simulation

Verteilungen

► Gleichverteilung

Continuous distributions do not have mass but they do have density!
Discrete distributions have mass and no density.



$$m = \frac{a + b}{2}$$

$$s^2 = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Dichtefunktion (pdf)

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

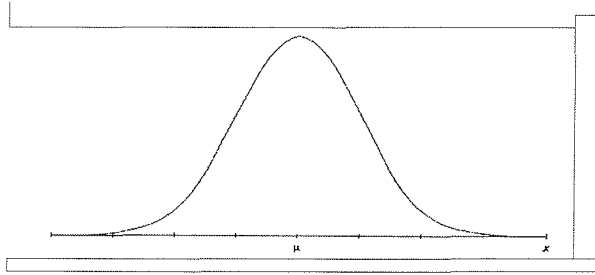
für $a \leq x \leq b$

Verteilungsfunktion (cdf)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{wenn } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{wenn } b < x \end{cases}$$

Monte Carlo Simulation

► Normalverteilung



Standardnormalverteilung

$$\mu = 0 \text{ und } \sigma = 1$$

Zentraler Grenzwertsatz

Die Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen mit derselben Verteilung (Verteilungsfunktion, μ und σ) ist asymptotisch normalverteilt

$$\bar{x} \gg N(m, s / \sqrt{n})$$

Dichtefunktion (pdf)

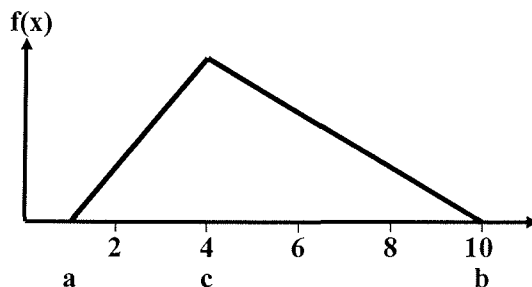
$$f(x) = \frac{e^{-(x-m)^2 / 2s^2}}{s \sqrt{2\pi}}$$

Verteilungsfunktion (cdf)

Es existiert keine geschlossene Form

Monte Carlo Simulation

► Dreiecksverteilung



$$m = \frac{a + b + c}{3}$$

$$s^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

Dichtefunktion (pdf)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & \text{wenn } a \leq x \leq c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & \text{wenn } c < x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

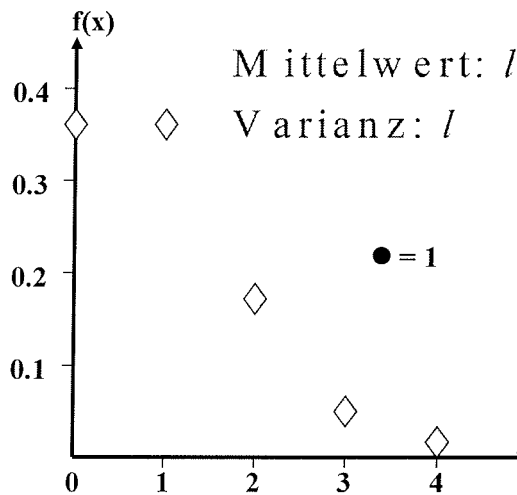
Verteilungsfunktion (cdf)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < a \\ \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & \text{wenn } a \leq x \leq c \\ 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & \text{wenn } c < x \leq b \\ 1 & \text{wenn } b < x \end{cases}$$

Monte Carlo Simulation

Verteilung der seltenen Ereignisse

► Poisson-Verteilung



Wahrscheinlichkeitsfunktion (pmf)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{sonst} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

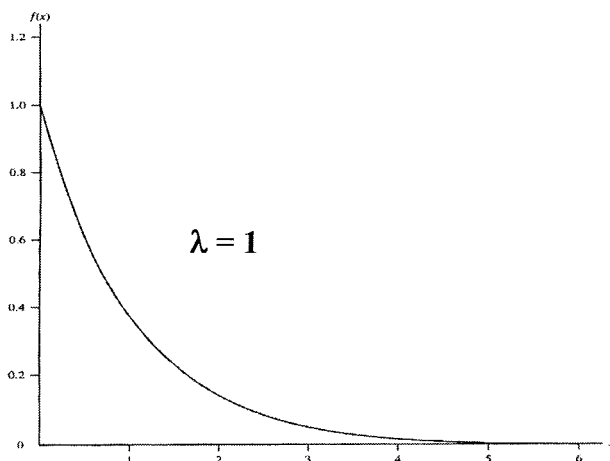
Verteilungsfunktion (cdf)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 0 \\ e^{-\lambda} \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k}{k!} & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$$

Monte Carlo Simulation

Sometimes used as a substitute for Poisson distribution

► Exponentialverteilung



Dichtefunktion (pdf)

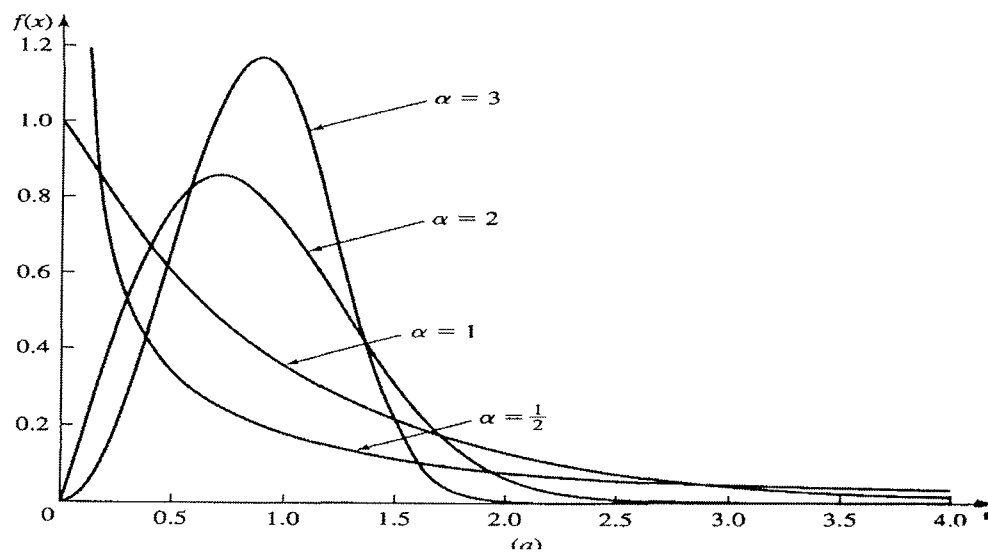
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion (cdf)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

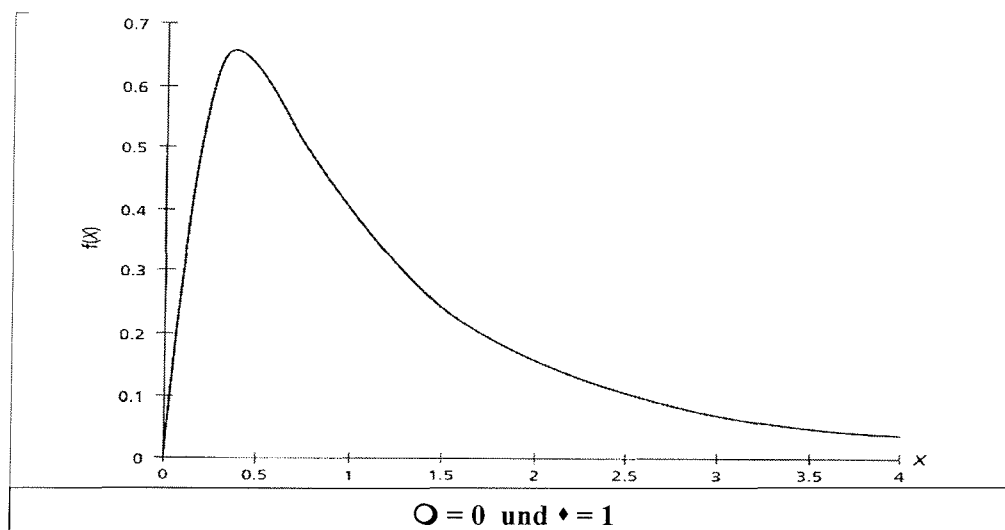
Monte Carlo Simulation

► Weibull-Verteilung



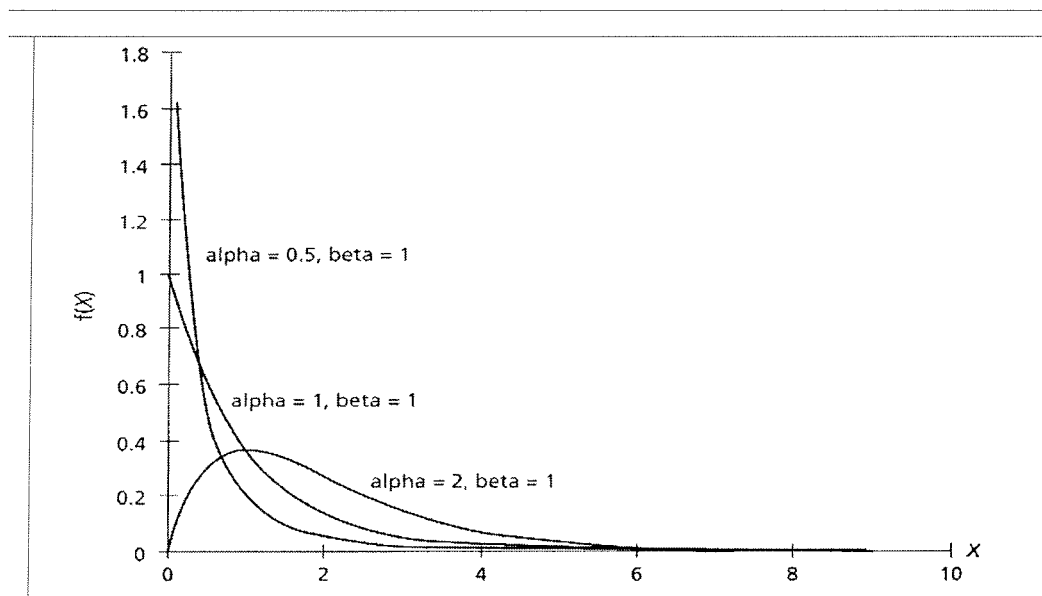
Monte Carlo Simulation

► Lognormal-Verteilung



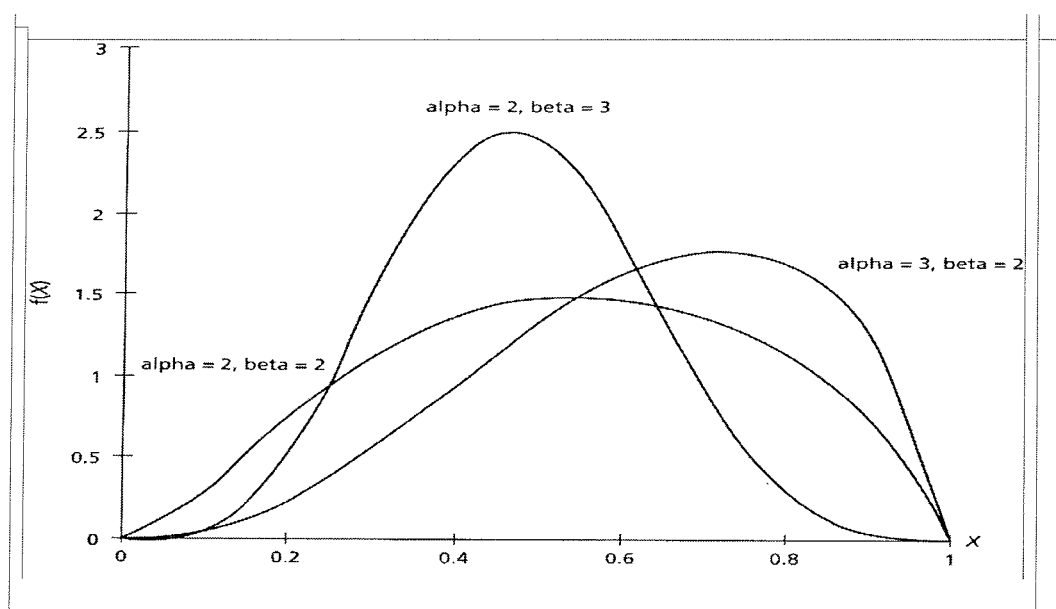
Monte Carlo Simulation

► Gamma-Verteilung



Monte Carlo Simulation

► Beta-Verteilung



Monte Carlo Simulation

Verwendung der Verteilungen

► Gleichverteilung

Zufallszahlengeneratoren liefern gleichverteilte Zufallszahlen mit $a=0$ und $b=1$
Wird dann verwendet, wenn man keine genauen Angaben über die tatsächliche Verteilung machen kann

► Normalverteilung

Kommt bei vielen natürlichen Phänomenen vor
Fehler und Bedienzeiten sind oft normalverteilt
Zentraler Grenzwertsatz

► Dreiecksverteilung

Oft als gute Approximation für andere Verteilungen verwendet
Bei unvollständigen Daten

► Poisson-Verteilung

Verteilung der seltenen Ereignisse
Beschreibt sehr gut Ankunftsrate (Anzahl von Ankünften in einem gegebenen Zeitintervall, Fehler pro lines of code, nachgefragte Mengen pro Zeitintervall,..)

Monte Carlo Simulation

► Exponentialverteilung

Ist eine Verteilung ohne Gedächtnis (memoryless)
Zwischenankunftszeiten sind oft exponentialverteilt (Ankünfte von Personen, Zeiten zwischen dem Auftreten von Fehlern)
Wird als Inverse der Poisson-Verteilung verwendet

► Weibull-Verteilung

Kann viele verschiedene Formen annehmen
Lebenszeiten von Maschinen
Oft anstelle der Exponentialverteilung eingesetzt

► Lognormal-Verteilung

Im Gegensatz zur Normalverteilung eine schiefe Verteilung
Phänomene, bei den große Werte kleine Wahrscheinlichkeiten haben und negative Werte unmöglich sind (Bearbeitungszeiten)
Tritt auf, wenn mehrere Normalverteilungen miteinander multipliziert werden

Monte Carlo Simulation

► Gamma-Verteilung

Oft für die Modellierung von Prozessen oder Reparaturzeiten von Maschinen verwendet

Liefert in manchen Fällen eine bessere Approximation als die Exponentialverteilung

Sonderfall: Erlang-Verteilung (α ganzzahlig und gleich dem Mittelwert)

► Beta-Verteilung

Sehr flexibel, Anwendung bei PERT



Monte Carlo Simulation

Transformationen

- ☞ Transformation gleichverteilter Zufallszahlen im Intervall $[0,1)$ in gleichverteilte Zufallszahlen in einem beliebigen Intervall $[a,b]$

$$U(0,1) \rightarrow U(a,b)$$

$$x = a + (b - a) \cdot RN$$

- ☞ Transformation gleichverteilter Zufallszahlen im Intervall $[0,1)$ in exponentialverteilte Zufallszahlen mit dem Mittelwert λ

Bei der Exponentialverteilung ist der Weg direkt über die Umkehrfunktion der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung möglich

Monte Carlo Simulation

Sei X eine Zufallsvariable mit der kumulierten Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Dann können Realisierungen von X mit Hilfe gleichverteilter Zufallszahlen RN über die Beziehung $X = F^{-1}(RN)$ erzeugt werden

F^{-1} ist die Umkehrfunktion von $F(x)$.

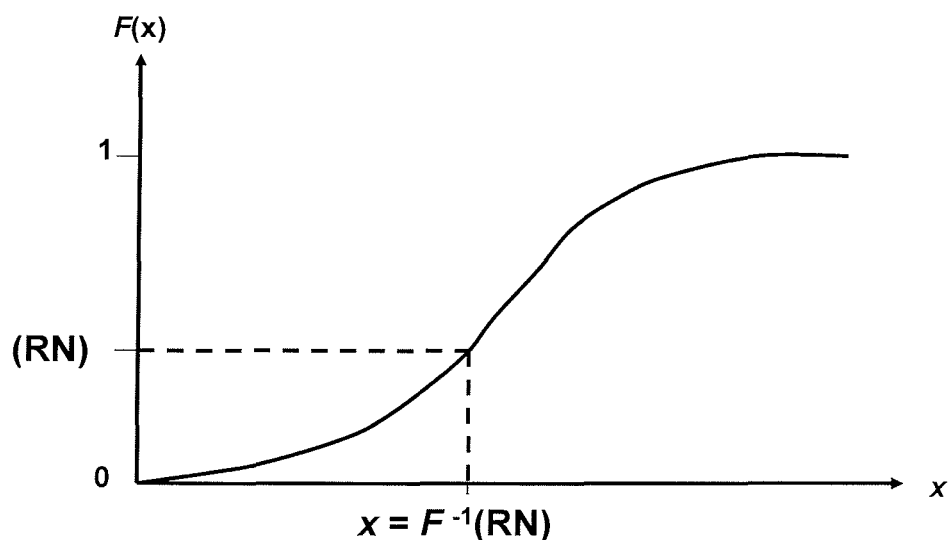
Die kumulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung (cdf) lautet:

$$x = 1 - e^{-\lambda y}$$

Die Auflösung der Gleichung nach y liefert :

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x) \quad \text{b z w .} \quad y = -\frac{1}{\lambda} \ln x$$

Monte Carlo Simulation



Monte Carlo Simulation

Anpassungstests

Eine wichtige Aufgabe besteht darin, zu überprüfen, ob vorliegende Daten einer bestimmten Verteilungsfunktion genügen (goodness-of-fit tests)

► Chi-Quadrat-(χ^2 -)Test

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_{bi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$$

f_{bi} = beobachtete Häufigkeit in der Zelle i

f_{ei} = erwartete Häufigkeit in der Zelle i

k = Anzahl der Zellen

Monte Carlo Simulation

Ist χ^2 kleiner als der kritische Wert in der Tabelle der χ^2 -Verteilung, so wird die Nullhypothese (H_0) akzeptiert

H_0 : die Stichprobendaten stammen von einer spezifizierten Verteilung

H_1 : die Stichprobendaten stammen nicht von einer spezifizierten Verteilung

Um den richtigen Wert in der Tabelle finden zu können, benötigt man die Anzahl der Freiheitsgrade, die folgendermaßen berechnet werden:

$$v = k - 1 - c$$

wobei k die Anzahl der Zellen und c die Anzahl der Parameter ist

Monte Carlo Simulation

Beispiel Zufallszahlengenerator U(0,1)

Untere Grenze der Zelle	Obere Grenze der Zelle	f_{bi}	f_{ei}	$\frac{(f_{bi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$
0.0	0.1	7	10	0.9
0.1	0.2	12	10	0.4
0.2	0.3	11	10	0.1
0.3	0.4	11	10	0.1
0.4	0.5	9	10	0.1
0.5	0.6	5	10	2.5
0.6	0.7	11	10	0.1
0.7	0.8	11	10	0.1
0.8	0.9	17	10	4.9
0.9	1.0	6	10	1.6
			χ^2	10.80

Monte Carlo Simulation

Da bei einer Gleichverteilung $c = 0$ und in unserem Fall $k = 10$ ist, ergibt sich für die Anzahl der Freiheitsgrade

$$v = k - 1 - c = 10 - 1 = 9$$

Der entsprechende Wert in der Tabelle ist bei einem Signifikanzniveau von 0.05 gleich 16.919

Da der χ^2 -Wert (10.80) kleiner ist als der Wert in der Tabelle (16.919) wird die Nullhypothese H_0 akzeptiert

Probleme ergeben sich dadurch, daß man bei diesem Test relativ viele Zellen (Kategorien) braucht, wobei jede Zelle zumindest 5 Beobachtungen enthalten sollte

Für kleine Stichproben wird daher oft der Kolmogorov-Smirnov (KS)-Test oder der Anderson-Darling-Test verwendet

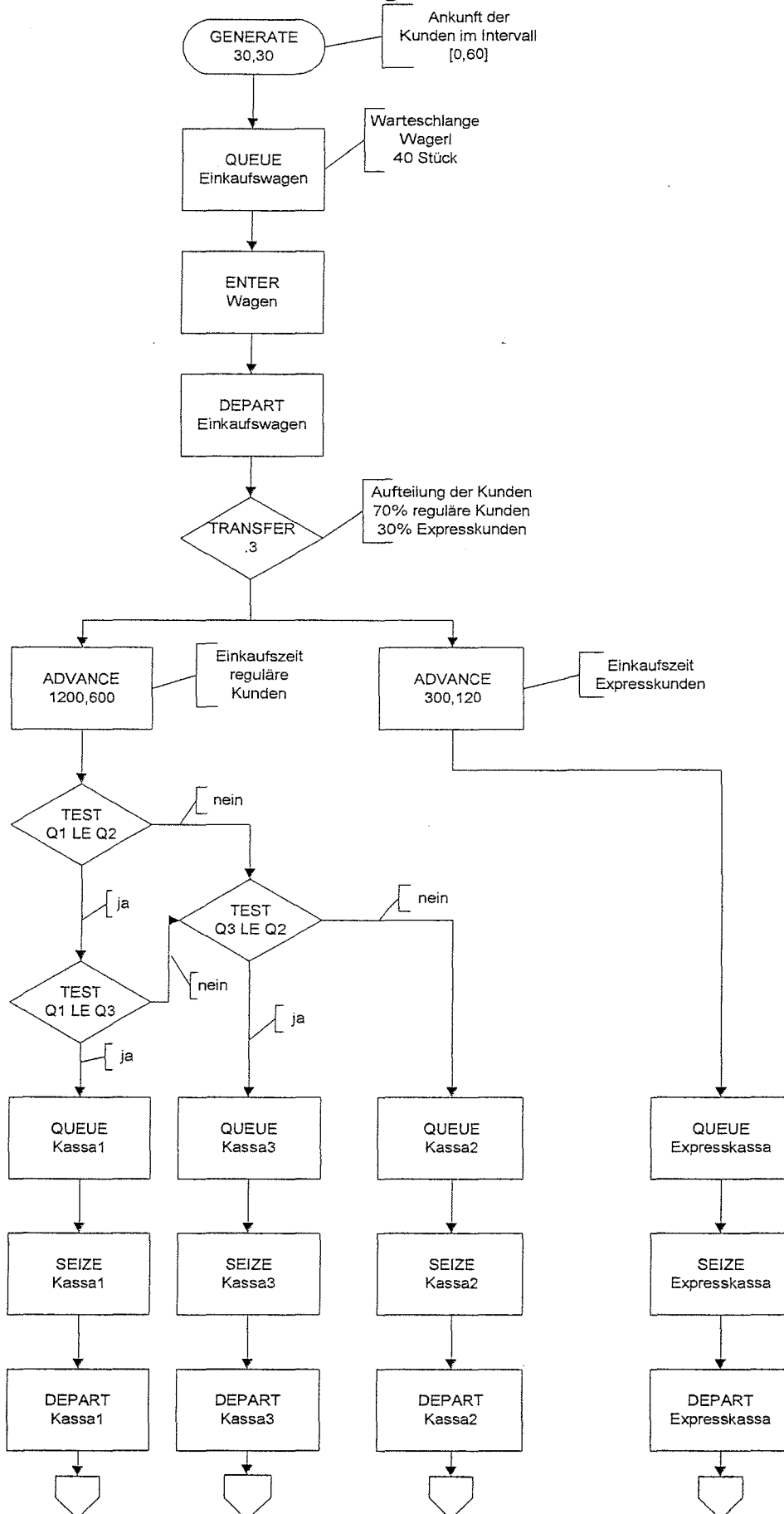

```

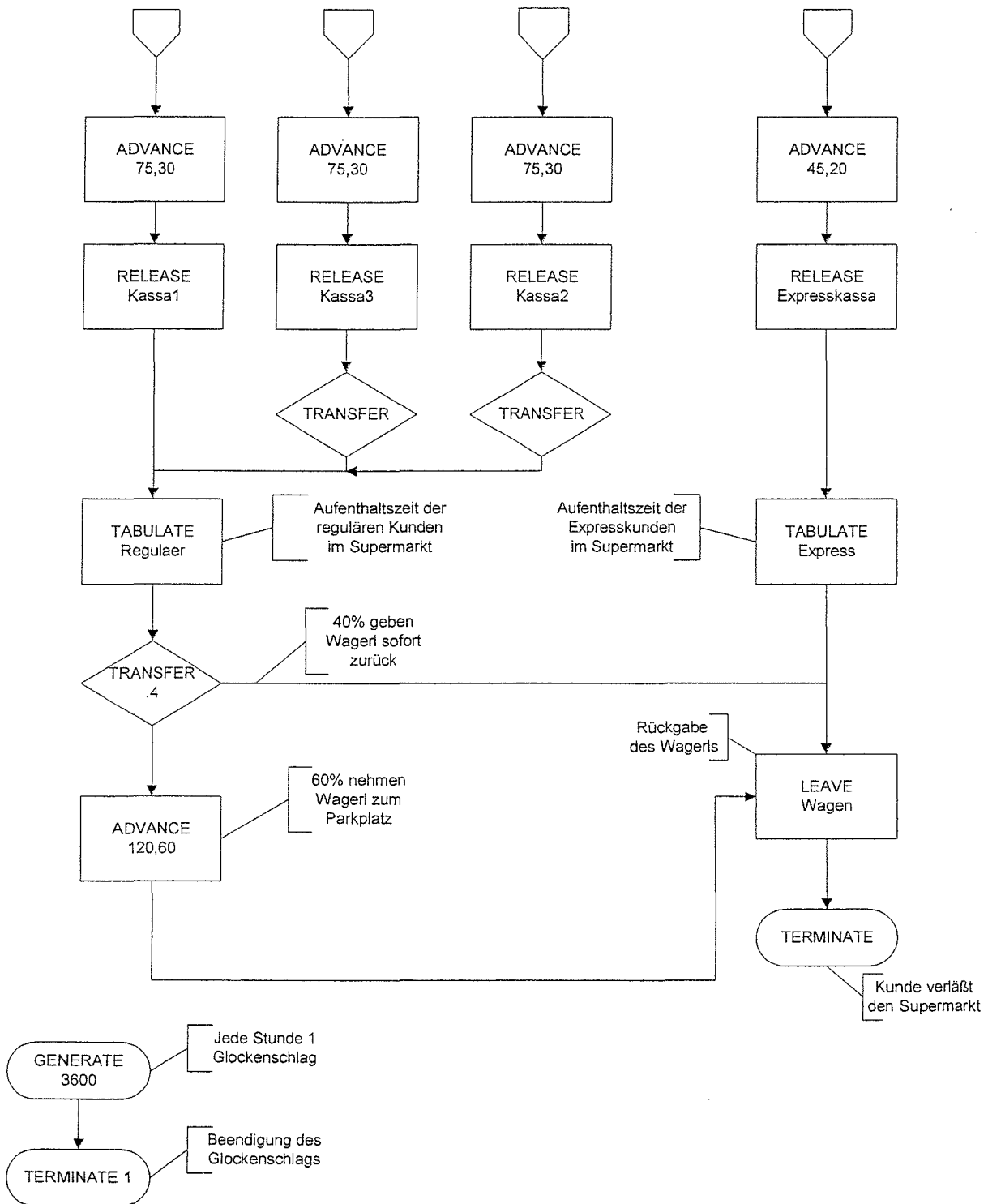
; GPSS World - Supermarkt.GPS.
*****
*
*                               Simulation eines Supermarkts
*                               Simulationszeit: Sekunden
*****
Wagen      STORAGE  40
Regulaer   TABLE  M1,600,30,50
Express    TABLE  M1,180,30,50
*****
Regul      GENERATE  30,30          ;Erzeugen der Kunden
2          QUEUE    Einkaufswagen  ;Warteschlange vor den Wagen
          ENTER     Wagen          ;Kunde nimmt einen Einkaufswagen
          DEPART    Einkaufswagen
          TRANSFER   .3,Regul,Expr
          ADVANCE    1200,600       ; Einkaufszeit der regulaeren Kunden
          TEST LE    Q$Kassal,Q$Kassa2,Vergl ;Vergleich Warteschlangen 1 und
3          TEST LE    Q$Kassal,Q$Kassa3,Vergl ;Vergleich Warteschlangen 1 und

          QUEUE     Kassal          ;Kunde nimmt Warteschlange vor Kassa 1
          SEIZE     Kassal
          DEPART    Kassal
          ADVANCE    75,30          ;Bedienzeit an Kassa 1
          RELEASE   Kassal          ;Freigabe der Kassa 1
Tab        TABULATE Regulaer       ;Aufenthaltszeit der regulaeren Kunden
          TRANSFER   .4,,Rueck      ;40 Prozent geben Wagen zurueck
          ADVANCE    120,60         ;60 Prozent nehmen Wagen zum Parkplatz
          TRANSFER   ,Rueck
Vergl      TEST LE    Q$Kassa3,Q$Kassa2,Que2 ;Vergleich Warteschlangen 2 und
3
Que3       QUEUE     Kassa3         ;Kunde nimmt Warteschlange vor Kassa3
          SEIZE     Kassa3
          DEPART    Kassa3
          ADVANCE    75,30          ;Bedienzeit an Kassa 3
          RELEASE   Kassa3         ;Freigabe der Kassa 3
          TRANSFER   ,Tab
Que2       QUEUE     Kassa2         ;Kunde nimmt Warteschlange vor Kassa2
          SEIZE     Kassa2
          DEPART    Kassa2
          ADVANCE    75,30          ;Bedienzeit an Kassa 2
          RELEASE   Kassa2         ;Freigabe der Kassa 2
          TRANSFER   ,Tab
Expr       ADVANCE    300,120       ;Einkaufszeit der Expresskunden
          QUEUE     Expresskassa    ; Kunde nimmt Expresskassa
          SEIZE     Expresskassa
          DEPART    Expresskassa
          ADVANCE    45,20          ;Bedienzeit an Expresskassa
          RELEASE   Expresskassa    ;Freigabe der Expresskassa
          TABULATE   Express        ;Aufenthaltszeit der Expresskunden
Rueck      LEAVE     Wagen          ;Rueckgabe des Einkaufswagens
          TERMINATE
*****
*                               Stoppuhr
*
          GENERATE  3600            ;Jede Stunde ein Glockenschlag
          TERMINATE 1              ;Glockenschlag beendet
          START      10             ;10 Glockenschlaege, 10 Stunden

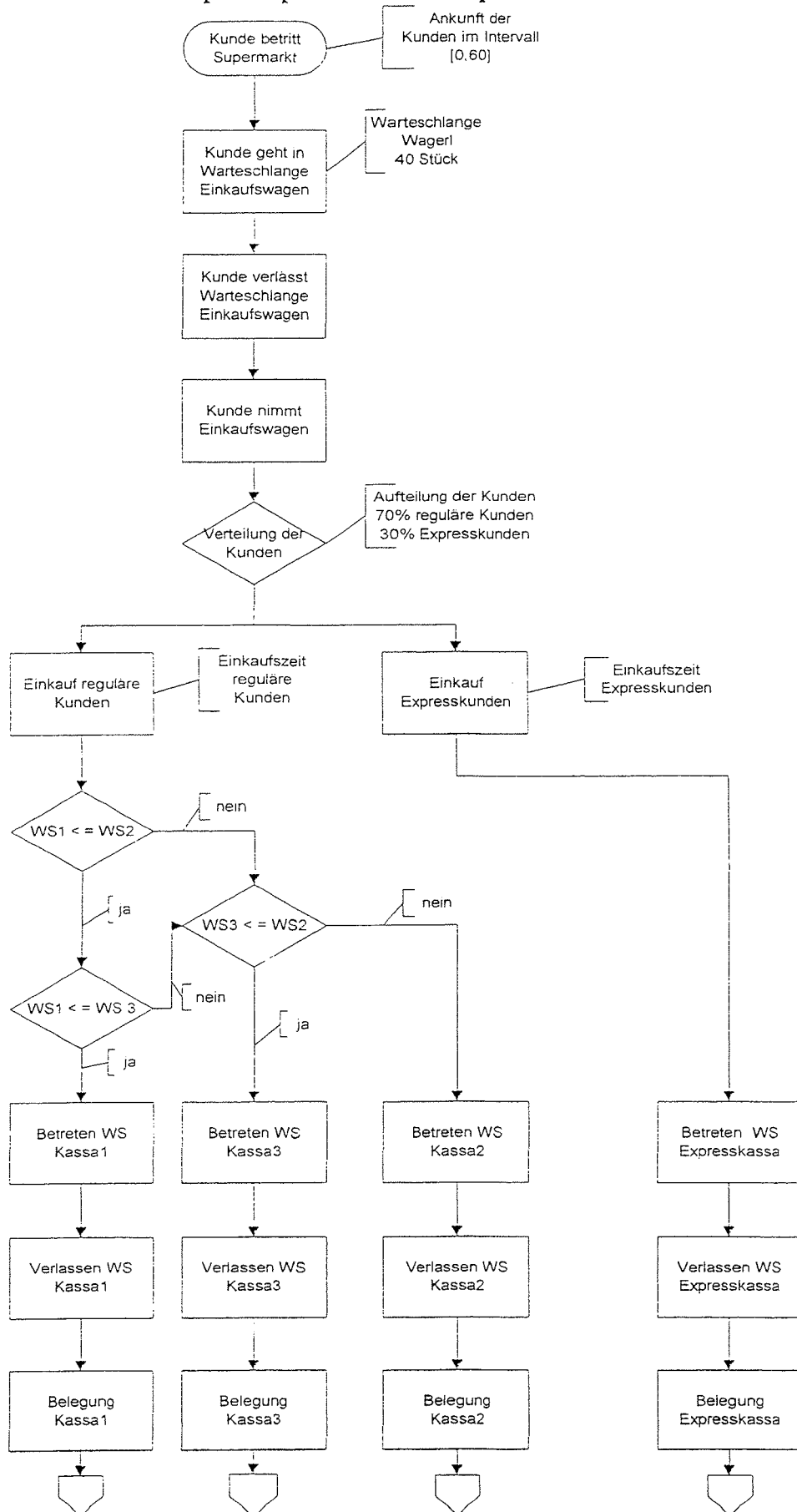
```

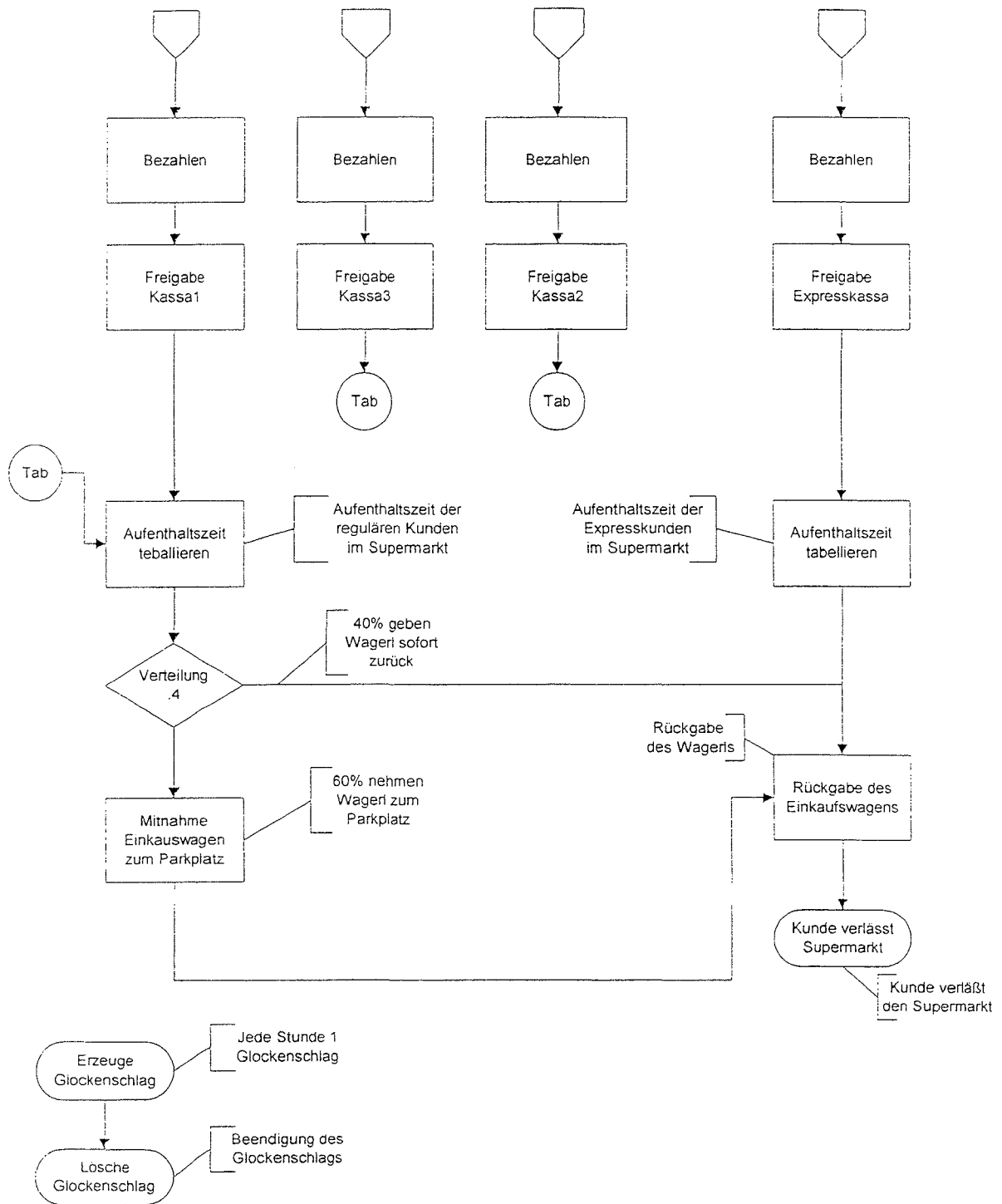
Ablaufdiagramm GPSS





Beispiel Supermarkt: Konzeptuelles Modell





GPSS World Simulation Report - Supermarkt.32.1

Tuesday, January 08, 2008 10:43:59

START TIME	END TIME	BLOCKS	FACILITIES	STORAGES
0.000	36000.000	41	4	1

LABEL	LOC	BLOCK TYPE	ENTRY COUNT	CURRENT COUNT	RETRY
	1	GENERATE	1201	0	0
	2	QUEUE	1201	0	0
	3	ENTER	1201	0	0
	4	DEPART	1201	0	0
	5	TRANSFER	1201	0	0
REGUL	6	ADVANCE	852	24	0
	7	TEST	828	0	0
	8	TEST	446	0	0
	9	QUEUE	434	1	0
	10	SEIZE	433	0	0
	11	DEPART	433	0	0
	12	ADVANCE	433	1	0
	13	RELEASE	432	0	0
TAB	14	TABULATE	826	0	0
	15	TRANSFER	826	0	0
	16	ADVANCE	501	3	0
	17	TRANSFER	498	0	0
VERGL	18	TEST	394	0	0
QUE3	19	QUEUE	283	0	0
	20	SEIZE	283	0	0
	21	DEPART	283	0	0
	22	ADVANCE	283	0	0
	23	RELEASE	283	0	0
	24	TRANSFER	283	0	0
QUE2	25	QUEUE	111	0	0
	26	SEIZE	111	0	0
	27	DEPART	111	0	0
	28	ADVANCE	111	0	0
	29	RELEASE	111	0	0
	30	TRANSFER	111	0	0
EXPR	31	ADVANCE	349	6	0
	32	QUEUE	343	0	0
	33	SEIZE	343	0	0
	34	DEPART	343	0	0
	35	ADVANCE	343	0	0
	36	RELEASE	343	0	0
	37	TABULATE	343	0	0
RUECK	38	LEAVE	1166	0	0
	39	TERMINATE	1166	0	0
	40	GENERATE	10	0	0
	41	TERMINATE	10	0	0

FACILITY	ENTRIES	UTIL.	AVE. TIME	AVAIL.	OWNER	PEND	INTER	RETRY
KASSA1	433	0.897	74.586	1	1175	0	0	0
KASSA2	111	0.228	74.044	1	0	0	0	0
KASSA3	283	0.592	75.333	1	0	0	0	0
EXPRESSKASSA	343	0.418	43.913	1	0	0	0	0

QUEUE	MAX	CONT.	ENTRY	ENTRY (0)	AVE.CONT.	AVE.TIME	AVE. (-0)
EINKAUFSWAGEN	12	0	1201	850	1.018	30.501	104.365
KASSA1	3	1	434	64	0.529	43.900	51.494
KASSA2	2	0	111	58	0.082	26.677	55.871
KASSA3	2	0	283	119	0.239	30.433	52.515
EXPRESSKASSA	4	0	343	195	0.176	18.449	42.758

STORAGE	CAP.	REM.	MIN.	MAX.	ENTRIES	AVL.	AVE.C.	UTIL.	RETRY
WAGEN	40	5	0	40	1201	1	36.004	0.900	0