1. Übung Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

1. Die Ereignisse A, B und C erfüllen die Bedingungen

$$\mathbb{P}(A) = 0.7, \mathbb{P}(B) = 0.6, \mathbb{P}(C) = 0.5,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap C) = 0.3, \mathbb{P}(B \cap C) = 0.2,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.1.$$

   Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B), \mathbb{P}(A \cap C), \mathbb{P}(B \cup C), \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

2. Von einer Krankheit sind 2% der Bevölkerung betroffen. Ein Test gibt bei einem Kranken mit Wahrscheinlichkeit 0.99 ein positives Ergebnis bei einem Gesunden mit Wahrschinlichkeit 0.01.

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person positiv getestet wird.

   (b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrschinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Person krank ist, wenn das Testergebnis positiv ist.

3. Ein Experiment mit Erfolgswahrschinlichkeit p wird so lange wiederholt, bis insgesamt k Erfolge verzeichnet werden. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der Versuche, die dafür benötigt werden (negative Binomialverteilung).

4. Die Poissonverteilung $P(\lambda)$ hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

   Zeigen Sie, dass dies als Grenzwert der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung mit $p = \lambda/n$, $n \to \infty$ erhalten werden kann.

5. Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2/4 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

   (b) X sei nach F verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X < 1), \mathbb{P}(X \leq 1), \mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$.

6. X sein $N(4, 25)$-verteilt. Betsimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X < 3), \mathbb{P}(X > 6), \mathbb{P}(|X| \leq 1)$.

7. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Zeigen Sie, dass die Ereignisse "6 beim ersten Wurf", "6 beim zweiten Wurf" und "beide Augenzahlen sind gleich" zwar paarweise, aber nicht vollständig unabhängig sind.