Nachträge von Stunde 1

Quantorenreihenfolge wichtig!.
Bsp: $(\forall x)(\exists y) x = y + 1$ gilt in $\mathbb{N}$, aber $(\exists y)(\forall x) x = y + 1$ nicht.
Links darf y von x abhängen ("$y(x)$"), rechts nicht.

Gleiche Quantoren können natürlich schon getauscht werden:
$(\forall x)\,(\forall y)\,\ldots$ äquivalent zu $(\forall y)\,(\forall x)\,\ldots$, auch $(\forall x, y)\,\ldots$ geschrieben.

Exakte Definitionen (fast notwendig: in (semi)formaler Sprache) unerlässliche Grundlage jeder mathematischen Argumentation. (Prüfungsbsp.) (exakt != formal)

Indirekter Beweis (Bsp: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) vs. direkter (Bsp: r period.$\to r \in \mathbb{Q}$):
Vorteile direkter Beweis: Jeder Schritt ist "wahr", dh kann Information liefern (im Bsp: Konstruktion des Bruchs) und lässt sich auf Plausibilität überprüfen.

Nachträge von Stunde 1 (Forts.)

Notation Folgen:

"Richtig" wäre $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, oft auch geschrieben "$\langle\frac{1}{n}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$" oder "$\langle\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\rangle$". Schlampig einfach "die Folge $\frac{1}{n}$".

Den Limes einer Folge $\bar{a}=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreibt man entweder als $\lim(\bar{a})$, als $\lim_{n\to\infty} a_n$ oder schlampig als $\lim a_n$.

Z.B $\lim((\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}})$, oder $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, oder einfach $\lim\frac{1}{n}$.

(Wenn $a_n=\frac{c}{n}$, dann sieht man $\lim\frac{c}{n}$ formal nicht an ob n oder c gegen unendlich geht; man sieht das wie so oft aus dem Kontext.)

(exakt != formal)

Wachstumsraten, O-Notation

Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$ Folgen. Wir schreiben

Definition

$\bar{a} \ll \bar{b}$, oder "$\bar{a}$ ist $o(\bar{b})$" ("klein o von $\bar{b}$") wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Äquivalent (warum?): $(\forall k \in \mathbb{N})\,(\exists M \in \mathbb{N})\,(\forall n > M)\; k \cdot |a_n| < |b_n|$.
Intuitiv: $|b_n|$ wächst "viel schneller" als $|a_n|$.

Es gilt (ohne die (recht einfachen) Beweise): Sei $1 < \ell < 2$ und $2 < k$.

$$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll \sqrt{n} \ll \sqrt[\ell]{n} \ll n \ll n \log n \ll n^\ell \ll n^2 \ll n^k \ll 2^n$$

In der Informatik oft verwendet:

Definition

"$\bar{a}$ ist $O(\bar{b})$" ("groß O von $\bar{b}$") wenn gilt: $(\exists C > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\, |\frac{a_n}{b_n}| < C$

Intuitiv: "a_n wächst nicht wesentlich stärker als b_n" (aber in anderern Sinn als zuvor!)
Es gilt: a_n ist $o(b_n) \to a_n$ ist $O(b_n)$.

Arithmetik mit Limiten

Wenn $\lim(a_n) = a$ und $\lim(b_n) = b$ (beide endlich), dann

- $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$.
  Bsp: $\lim(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 0$.
- $\lim(a_n b_n) = ab$.
  Bsp: $\lim(\frac{1}{\ln n}\frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$.
- Falls alle b_n und b ungleich 0 sind: $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$.
- Analog für viele andere Operationen. (Bemerkung: Genau für die "stetigen".)

Beweise: Einfach, (Ü)

Achtung: "Limes unendlich" gibt für $-$ und $\div$ keine Information ("$\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ sind nicht definiert"):
Beispiele: Sei $a_n = n^2$ und $b_n = n$ und $c_n = n^2 + n$, also $\lim(\bar{a}) = \lim(\bar{b}) = \lim(\bar{c}) = \infty$.
Dann ist $\lim(a_n - b_n) = \infty$, und $\lim(b_n - a_n) = -\infty$;
und $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \infty$, $\lim(\frac{b_n}{a_n}) = 0$, $\lim(\frac{a_n}{c_n}) = 1$.

Limiten ausrechnen, ein Beispiel

- Sei $a_n = \frac{n^2+4}{2n^2+7n}$.
- $\frac{\infty}{\infty}$ bringt nichts.
- Umformen: $a_n = \frac{1+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{7}{n}}$
- Das ergibt $\frac{1}{2}$.
- In solchen Fällen (Bruch von Polynome) sind immer nur die Summanden mit dem höchsten Exponenten relevant.

Ein Beweisbeispiel

Es gilt: Angenommen $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Dann $\lim(a_n b_n) = ab$.
D.h.: $(\forall \epsilon') \, (\exists N) \, (\forall n > N), |a_n b_n - ab| < \epsilon'$

Beweis: Fixiere vorläufig $\epsilon > 0$.
Es gibt N_a mit: $(n > N_a) \to |a_n - a| < \epsilon$. Analog für b.
Dann gilt für $n > \max(N_a, N_b)$: $|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n - (b - b_n)a| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |b - b_n| \cdot |a| \leq \epsilon(|b| + \epsilon) + \epsilon|a| \leq \epsilon(|a| + |b| + \epsilon)$.

(Das hilft nicht für $\cdots < \epsilon$.)

Benennen ϵ in ϵ' um. Fixiere ϵ'. D.h. wir wollen zeigen
$(\exists N) \, (\forall n > N) \, |a_n b_n - ab| < \epsilon'$.

Setze $\epsilon := \min(1, \frac{\epsilon'}{|a|+|b|+1})$. Wenn wie oben $n > \max(N_a, N_b)$, dann
$|a_n b_n - ab| \leq \epsilon(|a| + |b| + \epsilon) \leq \epsilon(|a| + |b| + 1) \leq \epsilon'$. $\square$
(Das $\square$ ist ein übliches Q.E.D. = Beweis-fertig Symbol.)

Der “Buch-Beweis” beginnt mit $\epsilon := \min(1, \frac{\epsilon'}{|a|+|b|+1})$, das gibt einfachere Struktur aber ist etwas mysteriöser.

Monotonie

Sei $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

- $\bar{a}$ heißt monoton steigend (oder: monoton wachsend), wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n.
  Bsp: Konstante Folge.
- $\bar{a}$ heißt streng monoton steigend (oder: monoton wachsend), wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle n.
  Bsp: $a_n = n$
- Analog: monoton fallend wenn $a_{n+1} \leq a_n$, streng monoton fallend wenn $a_{n+1} < a_n$.
  Bsp: $a_n = \frac{1}{n}$
- $\bar{a}$ heißt monoton, wenn entweder monoton wachsend oder monoton fallend.
- $\bar{a}$ ist nach oben beschränkt, wenn es $\{a_n : n \in \mathbb{R}\}$ ist, d.h.: $(\exists M \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N})\, a_n < M$. Analog für "nach unten".
- "Beschränkt" heißt: nach oben und unten beschränkt.

Monotonie und Konvergenz

Der folgende Satz ist eine Variante der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$:

Theorem

Sei $\bar{a}$ monoton. $\bar{a}$ konvergiert gdw. $\bar{a}$ ist beschränkt.

Beweis: Ü. Hinweis: konvergiert $\rightarrow$ beschränkt ist einfach. Andere Richtung: Der Limes ist (im Fall "steigend") das Supremum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (das existiert, weil $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist).

Häufungspunkt

Sei $\bar{a}$ eine Folge und $b \in \mathbb{R}$.

Definition (Häufungspunkt)

b ist Häufungspunkt von $\bar{a}$, wenn

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\forall n_0 \in \mathbb{N})\,(\exists n > n_0)\ |a_n - b| < \epsilon$$

Die Folge muss also nicht "ab irgendwann" beliebig nahe kommen, sondern "immer wieder".

Bsp: $(-1)^n$ und $(-1^n) + \frac{1}{n}$ haben beide die H.P. 1 und -1.

Der Ordnungsvollständigkeit entspricht nun:

Theorem

Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.

Häufungspunkt: Keine Arithmetik

Bemerkung: Über Häufungspunkt von Summenfolgen (oder Produktfolgen etc) können wir nichts Allgemeines sagen.

Beispiel:

$$\begin{array}{rclllllllll} \bar{a} & = & (& 1, & 0, & 3, & 0, & 5, & 0, & \dots) & \text{hat Häufungspunkt } 0 \\ \bar{b} & = & (& 0, & 2, & 0, & 4, & 0, & 6, & \dots) & \text{hat Häufungspunkt } 0 \\ (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (& 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots) & \text{hat keinen Häufungspunkt} \end{array}$$

Teilfolgen

Sei $\bar{a}$ eine Folge. Eine unendliche Teilmenge I der Indexmenge definiert eine Teilfolge $\bar{b}$, in der die n-ten Elemente von $\bar{a}$, aber nur für $n \in I$, der Reihe nach aufgezählt werden.

Bsp: $\bar{a} = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 124, 256, 512, 1024, \dots)$, dh $a_n = 2^n$;

$I = \{3, 4, 6, 9, \dots\}$, dann beginnt $\bar{b}$ mit $(8, 16, 64, 512, \dots)$.

Es gilt:

- Wenn b Häufungspunkt von $\bar{a}$ ist, dann gibt es Teilfolge $\bar{b}$ von $\bar{a}$ so dass b Limes von $\bar{b}$ ist.
- Wenn $b = \lim(\bar{a})$ und $\bar{b}$ Teilfolge von $\bar{a}$, dann $b = \lim(\bar{b})$.
- Insbesondere: Wenn $b = \lim(\bar{a})$, dann ist b einziger Häufungspunkt.
- Wenn $\bar{a}$ monoton ist, dann ist $\bar{a}$ beschränkt gdw. $\bar{a}$ konvergiert gdw. $\bar{a}$ einen Häufungspunkt hat.

Cauchyfolgen

Definition

$\bar{a}$ ist eine Cauchyfolge, wenn $(\forall\epsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n, m > N)\,|a_n - a_m| < \epsilon$.

Ähnlich wie "konvergent", nur brauchen wir keinen Kandidaten für den Limes.

Der folgende zentrale Satz ist schon wieder eine Variante von "ordnungsvollständig" (und eine Möglichkeit $\mathbb{R}$ zu definieren/konstruieren):

Theorem

$\bar{a}$ ist Cauchyfolge $\leftrightarrow$ $\bar{a}$ konvergiert.

Unendlichkeiten

Abzählbarkeit

Gegeben eine Folge $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots)$, oder äquivalent: Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (äquivalent mit $f(n) = a_n$).
Wir betrachten nun die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ aller Folgenelemente:

$$A := \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \{f(n) : \ n \in \mathbb{N}\} =: f''\mathbb{N}$$

Wir sagen: "Die Folge $\bar{a}$ zählt A auf." Solche A heißen abzählbar:

Definition

$A \subseteq \mathbb{R}$ heißt abzählbar, wenn $A = f''\mathbb{N}$ für ein $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, oder wenn $A = \emptyset$.

$\emptyset$ ist die leere Menge. (Warum muss man den Fall extra anführen?)

Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

Theorem (Cantor)

$\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Der übliche Beweis:

$$\begin{tikzcd}
\frac{4}{1} \arrow[r] & \frac{4}{2} \arrow[dr] & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[dr] & \frac{3}{2} \arrow[ul] & \frac{3}{3} \arrow[dr] & \frac{3}{4} & \cdots \\
\frac{2}{1} \arrow[u] & \frac{2}{2} \arrow[dr] & \frac{2}{3} \arrow[ul] & \frac{2}{4} \arrow[dr] & \cdots \\
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[ul] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[ul] & \cdots
\end{tikzcd}$$

D.h., $(1, \frac{1}{2}, 2, 3, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 3, \cancel{\frac{4}{2}}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{2}{4}}, \dots)$ zählt $\mathbb{Q}^+$ ab (ohne Widerholungen).

Wie sehen uns das nun etwas abstrakter an.

Einfache Eigenschaften der Abzählbarkeit 1

Theorem

Wenn A^n abzählbar für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ abzählbar.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
A^4 = \{ & a^4_1 \arrow[r] & a^4_2 \arrow[dr] & a^4_3 & a^4_4 & \cdots\} \\
A^3 = \{ & a^3_1 \arrow[dr] & a^3_2 \arrow[ul] & a^3_3 \arrow[dr] & a^3_4 & \cdots\} \\
A^2 = \{ & a^2_1 \arrow[u] & a^2_2 \arrow[dr] & a^2_3 \arrow[ul] & a^2_4 \arrow[dr] & \cdots\} \\
A^1 = \{ & a^1_1 \arrow[r] & a^1_2 \arrow[ul] & a^1_3 \arrow[r] & a^1_4 \arrow[ul] & \cdots\}
\end{tikzcd}$$

D.h., $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n = \{a^1_1, a^1_2, a^2_1, \ldots\}$

Theorem

Wenn A abzählbar ist, dann gibt es eine Folge die A aufzählt so dass jedes Element von A unendlich oft vorkommt.

Derselbe Beweis (verwende dasselbe $A^n = A$ für jedes n).

Einfache Eigenschaften der Abzählbarkeit 2

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt injektiv, wenn $f(n) \neq f(m)$ für alle $n \neq m$. Bei der äquivalenten Folge heißt das: Keine Folgenglied tritt mehrmals auf.

$f : \mathbb{N} \to A$ heißt bijektiv, wenn f injektiv ist und $f''\mathbb{N} = A$.

Theorem

Wenn A abzählbar und unendlich (kurz: abzählbar unendlich) ist, dann gibt es ein $f : \mathbb{N} \to A$ bijektiv.

D.h. es gibt eine Folge die A aufzählt und jedes Element von A genau einmal enthält.

Der Beweis ist sehr einfach. (Übung)

Theorem

Wenn A abzählbar ist und $B \subseteq A$, dann ist B abzählbar.

Ebenfalls einfach. (Ebenfalls Übung.)

Unendlichkeiten

Wir sagen A und B haben dieselbe Kardinalität ("sind gleich gross") wenn es ein $f : A \to B$ bijektiv gibt.

(Was entspricht das im Endlichen?)

Wir haben nun also unendliche Mengen kennengelernt, die alle gleich groß sind (anzählbar unendlich): $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Es gibt aber Mengen die noch größer sind, d.h. es gibt verschiedene Unendlichkeiten:

Theorem (Cantor)

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar ($\mathbb{R}$ ist "überabzählbar").

Beweis: Angenommen $\mathbb{R} \cap [0,1]$ wäre abzählbar als $\{r^1, r^2, \dots\}$.

$$
\begin{array}{lclcccccccl}
r^1 & = & 0. & 1 & 7 & 6 & & \cdots & & & 1 \mapsto 3 \\
r^2 & = & 0. & 5 & \color{red}{0} & 0 & & \cdots & & & \color{red}{0 \mapsto 2} \\
r^3 & = & 0. & 1 & 9 & 9 & & \cdots & & & 9 \mapsto 1 \\
 & \vdots & & & & & \ddots & & & & \\
r^\ell & = & 0. & r^\ell_1 & r^\ell_2 & r^\ell_2 & \cdots & r^\ell_\ell & \cdots & & n \mapsto n+2 \mod 10 \\
d & = & 0. & 3 & \color{red}{2} & 1 & & \cdots & & &
\end{array}
$$

Dann ist d ("wirklich") ungleich jedem r^ℓ, Widerspruch.
(Frage: Warum $+2$ und nicht $+1$?)

Unlösbarkeit des Halteproblems (kein Prüfungsstoff) 1

Diese Beweismethode heißt "Diagonalisierung". Sie hat alle möglichen Anwendungen, ein Beispiel aus der Informatik:

Theorem

Das Halteproblem ist unlösbar.

Formulieren wir es für Python (Computermodell aber egal):

- Halteproblem: Gegeben ein Python Programm s und einen Input n, hält s auf Input n (oder "hängt" das Programm).
- Wir können strings als natürliche Zahl interpretieren, d.h. $s \in \mathbb{N}$.
- Der Einfachheit halber: Identifiziere jede natürliche Zahl mit einem Sourcecode. D.h.: $1, 2, 3, \ldots$ sind alle möglichen Python Programme.
- Halteproblem ist also Funktion, die dem Input (s, n) (natürl. Zahlen) den Output `True` oder `False` zuordnet.
- Satz: Diese Funktion ist nicht (in Python) programmierbar.

Unlösbarkeit des Halteproblems (kein Prüfungsstoff) 2

- Sei U ein Python-Interpreter (in Python):
  Der Input: Python-Sourcecode $s \in \mathbb{N}$, und $n \in \mathbb{N}$.
  Der Output: Was s auf Input n ausgeben würde: "$U(s, n) = s(n)$".
- Wir können nun diagonalisieren: $f(n) := U(n, n) + 1$.
  Diese Funktion läßt sich in Python programmieren:
  Wir simulieren $U(n, n)$, addierern 1 zum Ergebnis, und geben das aus.
- f hat also einen sourceode m, und es gilt: $m(m) = U(m, m) + 1$.
- Aber $U(m, m) = m(m)$. Widerspuch??
- Nein! Programm terminiert i.A. nicht für jeden Input. Es gilt also einfach $U(m, m) = m(m) = \text{undefiniert} = U(m, m) + 1$.
- Das zeigt: Python-Halteproblem in Python unlösbar. Ansonsten wäre
  $$g(n) := \begin{cases} U(n, n) + 1 & \text{wenn } U(n, n) \text{ terminiert} \\ 27 & \text{sonst} \end{cases}$$
  (in Python) programmierbar, nun wirklich Widerspruch!