Lineare DGL n-ter Ordnung mit konst. Koeff.

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = s(x).$$

$\Rightarrow$ Lösungsmethode für 2. Ordnung analog anwenden!

- allg Lsg.: $y = y_h + y_p$
- y_h: "Exponentialansatz"

$$y_h = e^{\lambda \cdot x}$$

$\Rightarrow$ charakteristische Glg.:

$$\underbrace{\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0}_{\text{char. Polynom}} = 0$$

Satz.
$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_l$ versch. Lsg. der char. Glg.
$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

mit Vielfachheiten $k_1, \dots, k_l$
(es gilt: $k_1 + \dots + k_l = n$)

λ_i Vf. 3
$$\dots, (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2) \cdot e^{\lambda_i \cdot x}, \dots$$

$\Rightarrow$ allg. Lsg.:

$$y(x) = P_{1,k_1-1}(x) \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + \dots + P_{l,k_l-1}(x) \cdot e^{\lambda_l \cdot x}$$

$P_{1,k_1-1}(x)$ ... Polynom in x vom Grad $\leq k_1 - 1$

$\vdots$

$P_{l,k_l-1}(x)$ ... Polynom in x vom Grad $\leq k_l - 1$

° y_p : "Methode des unbestimmten Ansatzes"

→ falls Störfkt. $s(x)$ schöne Gestalt

$$s(x) = \left(a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_r \cdot x^r\right) \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

Vermutung

Vielfachheit von α als NST des char. Polyn.

$$y_p(x) = \left(A_0 + A_1 \cdot x + \dots + A_r \cdot x^r\right) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot x^{\nu(\alpha)}$$

bei Resonanzfall

analog : $s(x) = \left(a_0 + \dots + a_r \cdot x^r\right) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta x)$

" " " $\sin(\beta x)$

~~Bsp.~~ Bsp.:

$$y''' - 4y' = 4$$

hom.: $y''' - 4y' = 0$

Exp.-Ansatz: $y_h(x) = e^{\lambda \cdot x}$

$$y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \dots$$

$$\lambda^3 \cdot e^{\lambda x} - 4 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$\underbrace{\lambda^3 - 4\lambda = 0}_{\text{char. Glg.}}$$

$$\lambda \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 2, \; \lambda_3 = -2$$

allg. Lsg. <u>hom.</u>

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{0 \cdot x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x}$$

$$= c_1 + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x}$$

inh.:

$$y''' - 4y' = 4 = 4 \cdot e^{0 \cdot x}$$

$= 4 \cdot 1$

wie oft ist $\nu(0)$: 0 Lsg. der char. Glg?

$\nu(0) = 1$

Ansatz: $y_p(x) = A \cdot e^{0 \cdot x} \cdot x^{\nu(0)}$

$$= A \cdot e^{0 \cdot x} \cdot x^1 =$$

$$= A \cdot x$$

in DGL einsetzen:

$$y_p' = A \quad y_p'' = 0, \quad y_p''' = 0$$

$$0 - 4 \cdot A = 4$$

$$\Rightarrow A = -1 : y_p(x) = -x$$

allg. Lsg. ~~bilden~~:

$$\Rightarrow y = y_h + y_p = -x + C_1 + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{-2x}$$

Trennbare DGL (= separable DGL):

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$$

Alle Lsg.:

- $g(y_0) = 0 \Rightarrow y(x) = y_0$ ist Lsg.
- allg. Lsg. durch
  Methode: "Trennung der Variablen"

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

integrieren $\Rightarrow$ implizite Lsg. für $y(x)$

Bsp.:

$$y' = x \cdot y^2$$

$y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{y'}{y^2} = x$$

$$\frac{dy}{dx \cdot y^2} = x$$

$$\frac{dy}{y^2} = x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x \cdot dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} - C$$

$$y = \frac{1}{-\frac{x^2}{2} - C}$$: allg. Lsg.

Gleichungen numerisch lösen

gesucht:

$$\boxed{f(x^*) = 0}\quad , \quad f: I \to \mathbb{R}$$

reelle Fkt

stetige

x^*: Nullstelle von f

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow$

$-f(x) = 0$

$\Leftrightarrow$

$x - f(x) = x$

umformen:

$$\underbrace{x - f(x)}_{=:\varphi(x)} = x$$

$$\boxed{x^* = \varphi(x^*)}$$

x^*: Fixpunkt von φ $\left[\begin{array}{l}\varphi: I \to \mathbb{R} \\ \text{stetige Fkt.}\end{array}\right]$

Nullstellen von f suchen $\widehat{=}$ Fixpunkte von φ suchen

Bsp.: Taschenrechner einschalten, immer "cos"-Taste drücken (Annahme: radiant-Modus)

Folge:

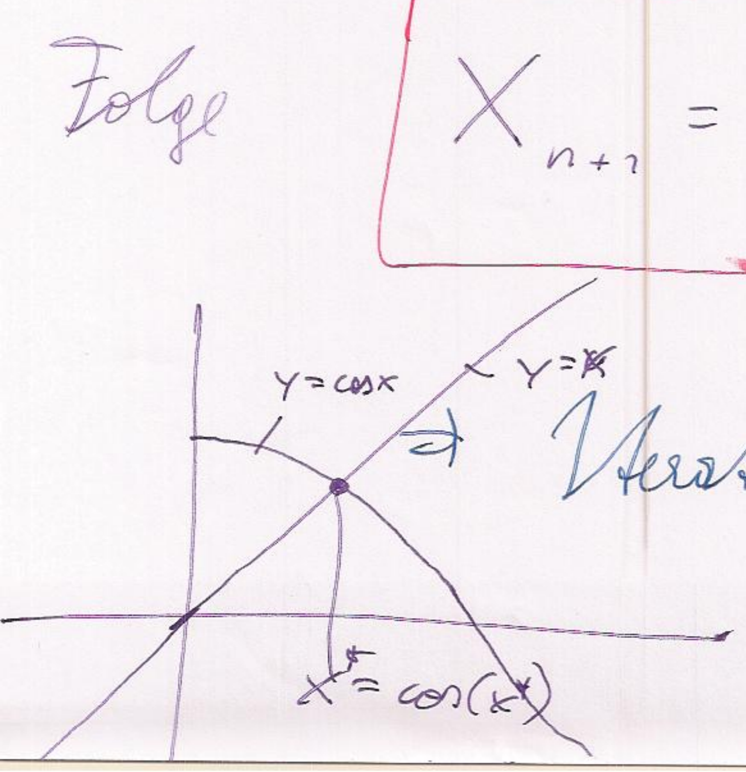
$$
\begin{array}{ccccc}
0, & 1, & 0.540302.., & 0.857553.., & 0.654289.., \\
\parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
x_0 & \cos x_0 & \cos(\cos x_0) & x_3 & x_4 \\
 & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
 & x_1 & \cos(x_1) & \cos(x_2) & \cos(x_3) \\
 & & \parallel & & \\
 & & x_2 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
0.793480.., \; .... \\
\parallel \\
\cos(x_4) \\
\parallel \\
x_5
\end{array}
$$

· konvergiert Folge?

· wenn ja, gegen welchen Wert?

Folge $\boxed{x_{n+1} = \cos(x_n), \quad x_0 = 0}$



→ Iterationsfolge

Iterationsfkt.

$$\boxed{x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \text{Startwert } x_0}$$

$(x_n)_{n\geq 0}$ ... Iterationsfolge

φ ... Iterationsfkt.

angenommen $(x_n)_n$ konvergiert

sei $x_n^* = \lim_{n\to\infty} x_n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$$

stetig

$$= \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

$$x^* = \varphi(x^*)$$

falls $(x_n)_n$ konv.

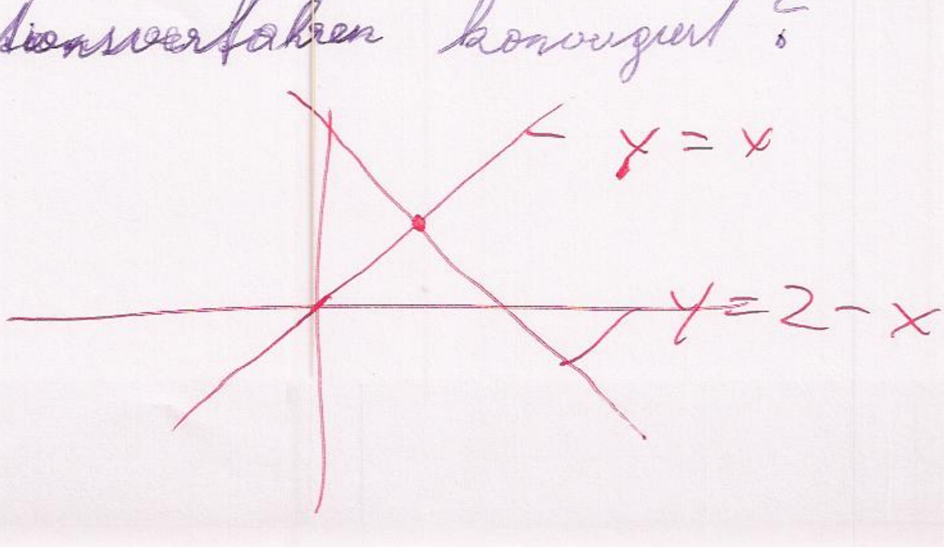
$\Rightarrow$ FP von φ

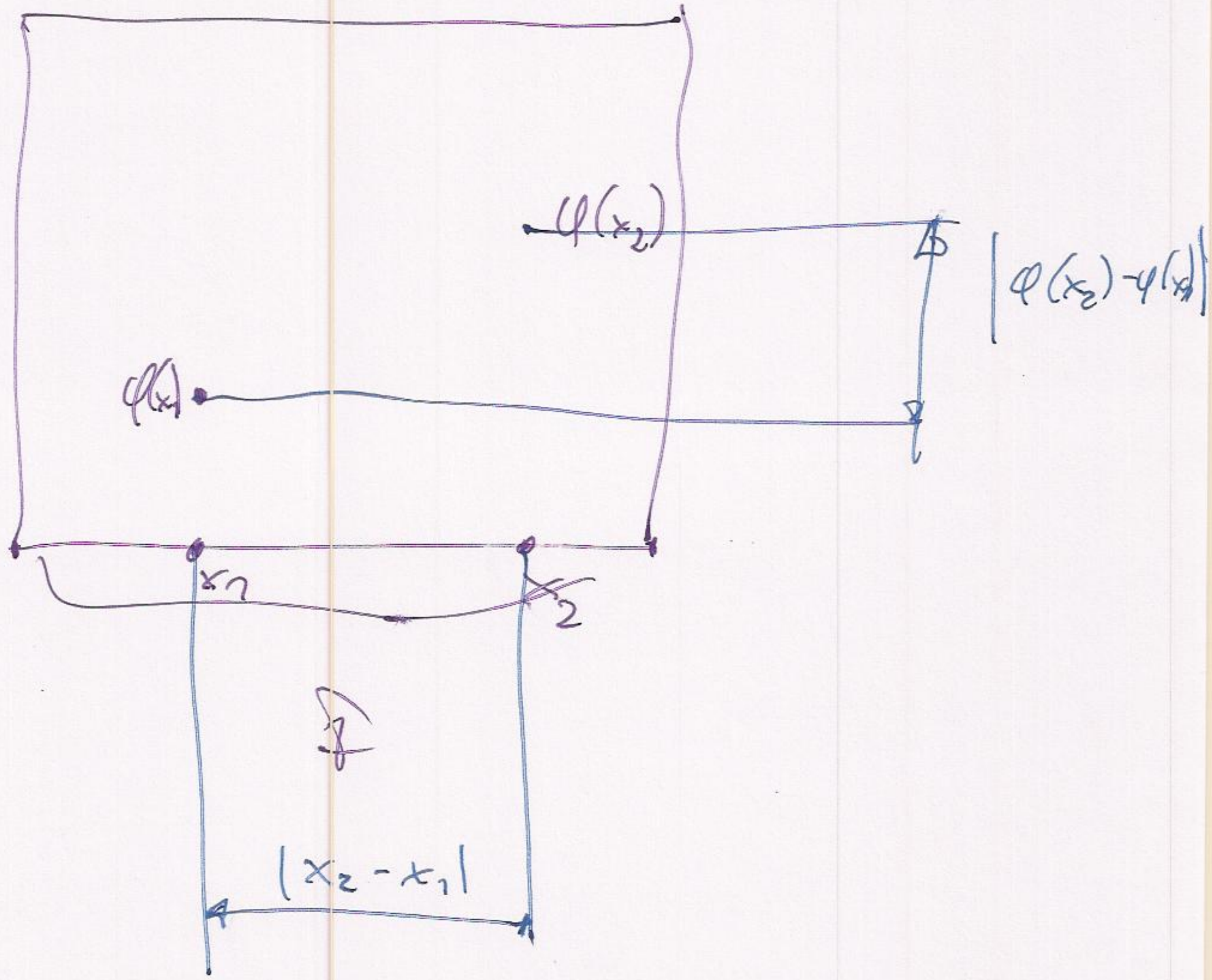
$(x_n)_n$ Iterationsfolge muß aber i. A. NICHT konvergieren!

Bsp.: $x_{n+1} = 2 - x_n = \varphi(x_n)$, $x_0 = 0$

Iterationsfolge: 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, ...

Wie kann man sicher sein, daß Iterationsverfahren konvergiert?





$\varphi(x_2)$
$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|$
$\varphi(x_1)$
x_1
x_2
$|x_2 - x_1|$

Satz: Fixpunktsatz

Sei $\varphi: I \to \mathbb{R}$ eine

kontrahierende Abbildung

von einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ in sich, d.h.:

(i) $\varphi(x) \in I, \; \forall x \in I$ $\varphi: I \to I$

(ii) φ genügt der Lipschitzbedingung

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \lambda \cdot |x - x'|, \; \forall x, x' \in I$$

mit einer Lipschitzkonstanten λ,

$0 < \lambda < 1$

$\Rightarrow$ φ besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in I$

und diesen erhält man als Grenzwert der Iterationsfolge $(x_n)_n$ mit

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

für jeden beliebigen Startwert $x_0 \in I$.