Runde 8, Beispiel 50

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.12.2006

1 Angabe

Unter Zuhilfenahme der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n!)}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

bestimme man den Wert der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n!)}$$

Anmerkung: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n!)}$ auf.

2 Theoretische Grundlagen: Darstellung trigonometrischer Polynome und Reihen

2.1 Trigonometrische Polynome

2.1.1 Allgemeines

Trigonometrisches Polynom (eine Trigonometrische Summe) ist ein Polynom, welches trigonometrische Ausdrücke erhält. Es hat also folgende Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.
n bezeichnet man als den Grad des Polynoms und $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Periode von f ist.

2.1.2 Periodische Funktionen - Rechenregeln

Es gilt für Funktionen mit der Periode T:

$$f(t + T) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

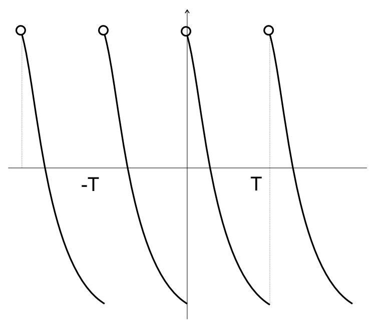
Wichtige Rechenregeln:

1. Mit T ist auch nT für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine Periode.
2. Mit f und g ist auch $\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ T-periodisch
3. Ist f T-periodisch, gilt für alle $a \in \mathbb{R}$:
$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}\,t$$
4. Die Reduktion auf die Periode 2π erfolgt über die Substitution
$$x := \frac{2\pi}{T} t = \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$
Ist $f(t)$ T-periodisch, so ist $F(x) := f(\frac{x}{\omega}) = f(t)$ 2π-periodisch.

2.1.3 Periodische Funktionen - Periodische Fortsetzung

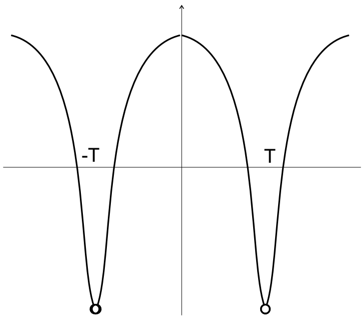
Ist eine Funktion g nur auf $[0, T]$ erklärt, so kann man drei Fortsetzungsformen unterscheiden:

- **Direkte Fortsetzung (T-periodisch)**: $\mathbb{R}$ wird in Intervalle $I_n := [nT, (n+1)T], n \in \mathbb{Z}$ zerlegt und f auf $\mathbb{R}$ definiert durch
$$f(t) := g(t - nT),\ t \in I_n$$
Geometrisch veranschaulicht:



- **Gerade Fortsetzung ($2T$-periodisch)**: $\mathbb{R}$ wird in Intervalle $(2n-1)T, (2n+1)T$ (Breite $2T$) zerlegt und setzt zunächst g durch Spiegelung auf der y-Achse auf $[-T, T)$ fort:
$$f(t) := \begin{cases} g(t), & 0 \le t < T \\ g(-t), & -T \le T < 0 \end{cases}$$
Nun wie bei direkter Fortsetzung $2T$-periodisch fortgesetzt:
$$f(t) := f(t - 2nt), \qquad (2n-1)T \le t < (2n+1)T, n \in \mathbb{Z}$$

Geometrisch veranschaulicht:



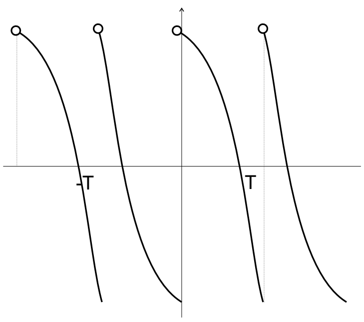
- **Ungerade Fortsetzung ($2T$-periodisch)**: g wird zuerst durch Spiegelung am Nullpunkt auf $[-T.T)$ forgesetzt:

$$f(t) := \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < T \\ -g(-t), & -T \leq T < 0 \end{cases}$$

Nun wie bei gerader Fortsetzung $2T$-periodisch fortgesetzt:

$$f(t) := f(t - 2nt), \qquad (2n-1)T \leq t < (2n+1)T, n \in \mathbb{Z}$$

Geometrisch veranschaulicht:



2.1.4 Darstellung in Sinus-Cosinus-Form oder komplex

Meistens betrachtet man aber nur 2π-periodische Funktionen ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) und erhält dann (Sinus-Cosinus-Form):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Alternativ zu der obigen Darstellung existiert noch eine komplexe Darstellung, die sich oft als rechentechnisch günstig erweist:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Bei geraden Fortsetzungen der Periode spricht man von der **Fourier-Cosinus-Reihe** - in diesem Fall ist $b_n = 0$.
Bei ungeraden Fortsetzungen der Periode spricht man von der **Fourier-Sinus-Reihe** - in diesem Fall ist $a_n = 0$.
Mit $z = \cos x + i \cdot \sin x = e^{ix}$ erhält man:

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + 2\cos x + \cdots + 2N \cos x = \begin{cases} 2N+1, & x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.1.5 Orthogonalitätsrelationen

Aus den trigonometrischen Identitäten

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$
$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$
$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

folgen die wichtigen Orthogonalitätsrelationen der Sinus- und Cosinus-Funktion ($m, n \geq 0, m, n \in \mathbb{Z}$):

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 0, & m = n = 0 \\ 0, & m \neq m \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 2\pi, & m = n = 0 \\ 0, & m \neq m \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

Weil die **Orthogonalitätsrelationen** (s.o.) gelten, lassen sich die Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms über Integrale bestimmen:

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t} \cdot \overline{e^{ik\omega t}} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

2.1.6 Hilfreiches zum Umgang mit trigonometrischen Polynomen

Wichtig für den Umgang mit trigonometrischen Polynomen f vom Grad N ist:

1. f hat in $[0, T)$ höchstens $2N$ Nullstellen
2. Koeffizientenvergleich: $f(t) = 0, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_k = 0, -N \leq k \leq N$
3. f ist eine reelle Funktion, d.h. $f(t) \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_k = \overline{c_{-k}}, 0 \leq k \leq N$. Das Poylnom kann dann wie folgt dargestellt werden ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$):
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \mathrm{Re}[\sum_{n=1} 1^N (a_n - ib_n)e^{-in\omega t}]$$
4. Formeln von Euler-Fourier. Für $-N \leq k \leq N$, $0 \leq n \leq N$ ist
$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega r}\,\mathrm{d}\,t,$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t$$
5. $f(t) \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(t) - \overline{f(t)} =, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{k=-N}^N (c_k e^{ik\omega t} - c_k \overline{e^{ik\omega t}}) = 0, t \in \mathbb{R}$
6. $\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=-N}^N c_k \int_0^T e^{in\omega t} \cdot e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}\,t = c_n \cdot T$

2.2 Trigonometrische Reihen (einführend)

Analog zum Begriff eines trigonometrischen Polynoms kann man auch den Begriff der trigonometrischen Reihe definieren:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

bzw. in der komplexen Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

3 Lösung des Beispiels

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{(2n)!} = \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2nt)+i\sin(2nt)}{(2n)!}) = \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i2nt}}{(2n)!}) =$$
$$\mathrm{Re}(\frac{1}{2}(\underbrace{e^{e^{it}}+e^{-e^{it}}}_{\cosh(e^{it})})) = \mathrm{Re}(\frac{1}{2}(e^{cos(t)}\cdot e^{i\sin(t)}+e^{-cos(t)}\cdot e^{-i\sin(t)})) =$$
$$\mathrm{Re}(\frac{1}{2}(e^{\cos(t)}(\cos(\sin(t))+i\sin t+e^{-\cos(t)}(\cos(\sin(t)))+i\sin t)))) =$$
$$\mathbf{\frac{1}{2}}(\cos(\sin(\mathbf{t}))\cdot(\mathbf{e}^{\cos\mathbf{t}}+\mathbf{e}^{-\cos\mathbf{t}})$$