Mathematik III

Vorlesung 11, 12.01.2007

Markus Nemetz

Jänner 2007

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
15.01.2007

2 Rechenregeln für DFT

DFT$(\vec{y} = \vec{c} = (c_0, \ldots, c_{N-1})^T$; für $\vec{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1})^T$. Periodische Funktion (y_k), wobei $y_k = y_{k+N}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

- Linearität

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{z} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{DFT}} \alpha\vec{c} + \beta\vec{d}, \qquad \vec{c} = \text{DFT}(\vec{y}), \vec{f} = \text{DFT}(\vec{z})$$

- Verschiebung im Zeitbereich

$$(y_{k+N})_{k\in\mathbb{Z}} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{DFT}} (\omega^{k\cdot n} \cdot c_k)_{k\in\mathbb{Z}}, \qquad \omega = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i}{N}}$$

- Verschiebung im Frequenzbereich

$$(y_k \cdot \omega^{k\cdot n})_{k\in\mathbb{Z}} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{DFT}} (c_{k-n})_{k\in\mathbb{Z}}$$

- Periodisches Faltunsprodukt

$$\vec{y} * \vec{z} = (\frac{}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot z_{k-k})_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\vec{y} * \vec{z} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{DFT}} (c_k \cdot d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

Algorithmus mit $\mathcal{O}(N \log N)$, danach $\mathcal{O}(N)$.

3 FFT-Algorithmus

Betrachten nur IDFT : $\vec{c} \overbrace{\longrightarrow}^{\text{IDFT}} \vec{y},\ y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot \omega^{k \cdot j}$, mit $0 \leq j \leq N-1$.

Idee: 'Die Kosten', um alle Werte $(y_0, \ldots, y_{N-1}$ zu berechnen ist i.A. viel geringer als das N-fache einer Berechnung von z.B. y_j.

Betrachten den wichtigsten Fall, daß $N = 2^r$, $r \in \mathbb{N}$. Idee ($k = 2 \cdot m$, gerade):

$$y_j = \sum_{k=0}^{2^r-1} c_k \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^r} \cdot k \cdot j} = \sum_{m=0}^{2^r-1} c_{2 \cdot m} \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^r} \cdot 2 \cdot m \cdot j} + \sum_{m=0}^{2^r-1} c_{2 \cdot m+1} \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^r} \cdot (2 \cdot m+1) \cdot j} =$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{2^r-1} c_{2 \cdot m} \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^{r-1}} \cdot m \cdot j}}_{u(j)} + \underbrace{e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^r}} \cdot j \cdot \sum_{m=0}^{2^r-1} c_{2 \cdot m+1} \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^{r-1}} \cdot m \cdot j}}_{v(j)}$$

- $u(j)$ ist Element der IDFT von den geraden Koeffizienten ($[c_0, c_2, \ldots, c_{N-2}]$)
- $v(j)$ ist Element der IDFT von den ungeraden Koeffizienten ($[c_1, c_3, \ldots, c_{N-1}]$)

Einziges Problem: IDFT$[c_0, c_2, \ldots, c_{N-2}]$ liefert nur $\frac{N}{2}$ Werte, analog IDFT$[c_1, c_3, \ldots, c_{N-1}]$; d.h. erhalte y_j zunächst für Werte $0 \leq j \leq 2^{r-1} - 1$.

Problem ist leicht zu lösen, weil $u(j)$ und $v(j)$ periodisch mit der Periode $\frac{N}{2} = 2^{r-1}$ sind, d.h. (bitte nachrechnen!):

- $u(j + 2^{r-1}) = u(j)$
- $v(j + 2^{r-1}) = v(j)$

4 Allgemeine FFT

Um die diskrete Fouriertransformation durchzuführen, genügt es, den Vektor f mit der $N \times N$ -Matrix F_N zu multiplizieren. Dies erfordert (neben den Additionen) N^2 Multiplikationen, für große N ein zu hoher Aufwand. Die schnelle Fouriertransformation beruht darauf, dass man im Fall $N = 2^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ nur $d \cdot N = N \cdot \log_2(N)$ Multiplikationen benötigt, wenn man gewisse Symmetrien ausnutzt. Dies machen wir uns am Beispiel $d = 2$ klar. Dann ist

$\omega = \exp(\frac{2\pi i}{4}) = \exp(\frac{\pi}{2} i) = i.$

Es ergibt sich für $k = 0, \dots, 3$

$\hat{f}_k = f_0 + f_1 i^k + f_2 i^{2k} + f_3 i^{3k} = f_0 + f_2(i^2)^k + i^k(f_1 + f_3(i^2)^k).$

Wir setzen $g = (f_0, f_2)^t$ und $u = (f_1, f_3)^t$. Dann lässt sich die Gleichung für $\hat{f}_k$ umformen. Für $k \leq 1 = N/2 - 1$ gilt

$\hat{f}_{k,N} = \hat{g}_{k,N/2} + i^k \hat{u}_{k,N/2}.$

(Wir haben dabei durch den zusätzlichen Index N bzw. $N/2$ angedeutet, dass es sich um eine diskrete Fouriertransformation im $\mathbb{C}^N$ bzw. $\mathbb{C}^{N/2}$ handelt.) Für $k = 2$ bzw. 3 sei $k' = k \bmod N/2$. Dann ist $\hat{f}_{k,N} = \hat{g}_{k',N/2} + i^k \hat{u}_{k',N/2}$. Wir haben also Fouriertransformationen in $\mathbb{C}^{N/2}$ und eine anschließende "Zusammensetzung" erhalten. Allgemein ergibt sich das folgende rekursive Schema:

$g(f) = (f_0, f_2, f_4, \dots, f_{N-2}), u(f) = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$

$\hat{f}_{k,N} = \widehat{g(f)}_{k \bmod N/2, N/2} + \overline{\omega}^k \widehat{u(f)}_{k \bmod N/2, N/2} \qquad k = 0, \dots, N-1.$

Die Rekursion kann man $d = \log_2(N)$ mal aufrufen. Pseudocode:

FUNCTION FFT(f, d, ω)

/* $f \in \mathbb{C}^{2^d}$, $d \in \mathbb{N}_0$, $\omega = \exp(-2\pi\, i/2^d)$ */

$N := 2^d$;

IF (N=1) THEN $\hat{f} = f$;

ELSE $M :=$ N/2;

$g := (f_{2k})_{0 \leq k \leq M-1}$;

$u := (f_{2k+1})_{0 \leq k \leq M-1}$;

$h_1 :=$ FFT($g, d-1, \omega^2$);

$h_2 :=$ FFT($u, d-1, \omega^2$);

FOR $j = 0$ TO $M - 1$ DO

$\hat{f}_j := h_{1,j} + \omega^j h_{2,j}$;

$\hat{f}_{j+M} := h_1, j + \omega^{M+j} h_{2,j}$;

END; /* FOR */

END; /* ELSE */

END; /* IF */

AUSGABE $\hat{f}$.

Komplexitätsanalyse:

$M(r)$ sei die Anzahl der komplexen Muötiplikationen im FFT eines Vektors der Länge $N = 2^r$:

$$M(r) = 2^r + 2 \cdot M(r-1), \qquad r > 1$$

$$M(0) = 0, \qquad \frac{M(r)}{2^r} = M(\frac{r-1}{2^{r-1}}) + 1 = r - \underbrace{M(0)}_{} = 0$$

$$M(r) = r \cdot 2^r = N \cdot \log_2 N = \mathcal{O}(N \cdot \log N)$$

5 Beispiele für Anwendung der DFT

5.1 Approximation der Fourier-Koeffizienten einer Fourier-Reihe

Betrachten $2r$-periodische Funktion $f(t)$.

Auswerten an den Stützstellen $f(\frac{2r}{N}, j)$, $0 \le j \le N-1$:

$$\Rightarrow \quad (y_0, y_1, \ldots, \underbrace{y_j}_{\frac{2r}{N}}, \ldots, y_{N-1}) = y$$

Betrachte $\vec{c} = (c_0, \ldots, c_{N-1}) = \mathrm{DFT}(y)$.

Betrachte N-periodische Fortsetzung (c_k).

Es gilt: c_k für $-\frac{N}{2} \le l \le \frac{N}{2}$ sind eine gute Approximation für Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe von $f(t)$.

5.2 Trigonometrische Interpolation

Gegeben sind Werte $(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) = \vec{y}$.

Gesucht ist ein trigonometrisches Polynom von kleinstem Grad

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot t},$$

sodass dieses an den Stützstellen $\frac{2r}{N} \cdot j$ genau die Werte y_j annimmt.

Falls N ungerade ist, so ist das trigonometrische Polynom eindeutig bestimmt und es gilt dann $N = 2n+1$.

Einsetzen der Werte an den Stützstellen liefert N Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y_j} &= \sum_{\mathbf{k=-n}}^{\mathbf{n}} \mathbf{c_k} \cdot \omega^{\mathbf{k \cdot j}}, \qquad \mathbf{0 \le j \le 2n}, \omega = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{2\pi i}}{\mathbf{N}}} \\
y_j &= \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{(k-n) \cdot j} = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{kj} \cdot \omega^{-nj} \\
\Rightarrow \omega^{nj} \cdot y_j &= \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{kj}, \qquad 0 \le j \le 2n = N-2 \\
&\Rightarrow (\omega^{nj} \cdot y_j)_{j \in \mathbb{Z}} = \mathrm{IDFT}(c_{k-n}) \\
&\Rightarrow c_{k-n} = \mathrm{IDFT}((\omega^{nj} \cdot y_j)_{j \in \mathbb{Z}})
\end{aligned}$$

Liefert schließlich $(c_0.c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{2n}) = \mathrm{DFT}(y_0, y_1, \ldots, y_{2n})$.

6 Fourier-Transformation

$$\mathbf{F(s)} = \mathcal{F}\{\mathbf{f(t)}\} = \text{(CHW)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f(t)} \cdot \mathbf{e^{-i \cdot \omega \cdot t}} \, \mathrm{d}\, \mathbf{t}$$

Beispiel Rechteckfunktion:

$$\sqcap(t) = \begin{cases} 0, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{\sqcap(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqcap(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \, \mathrm{d}\, t = \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} = \frac{e^{-i \cdot \omega \cdot t}}{-i \cdot \omega} = \frac{1}{-i \cdot \omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) =$$

$$\frac{1}{-i \cdot \omega}(\cos(-i\omega) + i \sin(-i\omega) - \cos(i\omega) - i \sin(i\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

$$\omega \neq 0, \, (\omega = 0 \Rightarrow F(0) = 2)$$

Beispiel Spaltfunktion:

$$\operatorname{sinc}(x) = \operatorname{si}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Die Spaltfunktion ist die Fouriertransformierte der Rechteckfunktion

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \chi_{[-\tau/2, \tau/2]}(t) := \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

denn es gilt

$$\mathcal{F}(\chi_{[-\tau/2,\tau/2]})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-\mathrm{i}\omega t} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Wichtige Frage: Wann existiert die $\mathcal{F}$-Transformation der Funktion $f(t)$?

Definition: Eine Funktion $f(t)$ heisst **absolut integrierbar**, wenn sie in jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist und wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}\, t < \infty$$

Satz: Falls eine Funktion $f(t)$ absolut integrierbar ist, dann existiert die $\mathcal{F}$-transformierte $F(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$; $F(\omega)$ ist stetig und beschränkt.

Weiters gilt die Plancherel-leichung (Energiegleichung). Der parsevalschen Gleichung für die Fourierreihe entspricht eine Identität der Fouriertransformation, die gemeinhin als Satz von Plancherel bezeichnet wird:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\,\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t))|^2\,\mathrm{d}\,t$$

Satz: **Fourier-Integraltheorem**: Ist die Funktion $f(t)$ absolut integrierbar und ist $f(t)$ auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\frac{f(t)^+ f(t)^-}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

Anmerkung: Falls $f(t)$ stetig ist gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(-\omega)\}$$