

DRUCKEN NUR IM SKRIPTUM MÖGLICH!

Mathematik 3 für Informatiker 0.99

Prof. Alois Panholzer

WS 06/07, LVA-Nr. 118.180

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien

Weitere Beteiligte: *Michael Birsak, Markus Diem, Andreas Kasper*

25.03.2007

Dieses Skripum ist Herrn

Dipl.-Ing. Dr.techn. Sebastian POPPRATH

gewidmet, meinem lieben Arbeitskollegen.

Er war Projektassistent am Institut für Mechanik und Mechatronik, und wurde am
07.03.2007 28-jährig aus dem Leben gerissen.

Frei nach JOSEPH ROTH:

Der Schmerz wird uns weise machen, die Bitternis gütig!

Ich vergesse Dich nie - Dein Freund Markus!

Inhaltsverzeichnis

1	Gewöhnliche Differentialgleichungen - Grundbegriffe	1
1.1	Lösungen von Differentialgleichungen	1
1.2	Graphische Interpretation	2
1.3	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	3
1.4	Existenz- und Eindeutigkeitsatz	4
2	Differentialgleichungen: Spezielle Typen	8
2.1	Trennbare Differentialgleichungen	8
2.2	Exakte Differentialgleichungen	9
2.3	Integrierender Faktor	10
3	Inhomogene Lineare DGL 1. Ordnung	12
3.1	Grundlagen	12
3.2	Einige Typen	13
3.2.1	Ähnlichkeitsdifferentialgleichung	13
3.2.2	Bernoulli-Differentialgleichung	14
3.2.3	y tritt nicht explizit in Differentialgleichung auf	14
3.2.4	Autonome Differentialgleichungen	14
3.3	Numerisches Lösen von Anfangswertproblemen	15
4	Potenzreihenansatz zur Lösung von DGLen	18
4.1	Fortgesetzte Differentiation	18
4.2	Koeffizientenvergleich	18
4.3	Modifizierter Potenzreihenansatz f. lineare DGL 2. Ord.	21
5	Lineare DGL n-ter Ordnung	25
5.1	Grundlagen	25
5.2	Lineare DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	28
6	Lösen von DGLen mittels Laplace(\mathcal{L}-)Transformation	30
6.1	Grundlagen	30
6.2	Rechenregeln	31
6.3	Anwendungen der \mathcal{L} -Transformation	36
6.3.1	AWP für lineare DGL mit konst. Koeffizienten	36
6.3.2	AWP für lineare DGL mit nichtkonstanten Koeffizienten	37
6.3.3	Elektrische Schaltungen (RCL-Schwingkreis)	38
6.3.4	Lösen von Integralgleichungen	39
7	Randwertaufgaben, -probleme (RWA, RWP)	41
7.1	Lineare RWA	43
7.2	RWP - Alternativsätze	43
7.3	Lösen von RWP mit Hilfe der Green-Funktion	46

8	Eigenwertprobleme	49
9	Fourier-Analysis - Fourier-Reihen	50
9.1	Grundlagen - periodische Funktionen	50
9.2	Rechenregeln für Fourier-Reihen	56
9.3	Wichtige Sätze zu Fourier-Reihen	57
10	Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	59
10.1	Grundlagen	59
10.2	Rechenregeln für DFT	61
10.3	FFT-Algorithmus	62
10.4	Beispiele für Anwendung der DFT	65
10.4.1	Approximation der Fourier-Koeffizienten	65
10.4.2	Trigonometrische Interpolation	65
11	Fourier(\mathcal{F})-Transformation	66
11.1	Grundlagen	66
11.2	Umkehr- und Eindeutigkeitssatz	68
11.3	Rechenregeln für die \mathcal{F} -Transformation	69
11.4	Anwendung der \mathcal{F} -Transformation	70
11.4.1	Hilfsmittel zum Lösen von DGL	70
11.4.2	Lösen von Integralgleichungen	70
11.4.3	Nachrichtentechnik	70
12	Partielle Differentialgleichungen (PDG)	72
12.1	PDGen, die sich wie gewöhnliche DGLen behandeln lassen	72
12.2	Lineare PDG 1. Ordnung mit Konstanten Koeffizienten	72
12.3	Eindimensionale Schwingungsgleichung (Wellengleichung)	73
12.4	Lineare PDG 1. Ordnung	74
	Abbildungsverzeichnis	79
	Literaturverzeichnis	80

Dies ist eine Überarbeitung der Mitschriften zu der LVA Mathematik 3 für Informatiker, welche im Wintersemester 2006/2007 von *Prof. Alois Panholzer* abgehalten wurde.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei all jenen, die mit Anregungen und Korrekturvorschlägen mitgewirkt haben, insbesondere aber bei *Michael Birsak*, *Markus Diem* und *Andreas Kasper*, welche mir ihre Mitschriften zur Verfügung gestellt und auch am Text mitgearbeitet haben.

Weitere Informationen zur dieser Lehrveranstaltung und der separaten Übung hält die von mir betreute Website

<http://inf.wikiserver.at/mathe3>

bereit. Hinzugefügt sei, dass diese Website keine offizielle LVA-Website ist!

Abschließend möchte ich mich bei *Prof. Panholzer* für die interessante, lehrreiche und jovial geführte Vorlesung bedanken, sowie bei seinem Assistenten *Andreas Kuba* für die reibungslose Durchführung der Übungen zu der Vorlesung.

Wien, März 2007, Markus NEMETZ

Allgemeines

Buch: MEYBERG UND VACHENAUER, *Höhere Mathematik 2*,
4. Auflage, Springer, Berlin 2001

Stoff: Harmonische Analyse

Fourier Reihen Entwicklung
Diskrete Fourier Transformation
Fourier Transformation

Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichung
Spezielle Typen
Laplace Transformation
Potenzreihenentwicklung
Randwertprobleme
Numerische Lösungsverfahren

Partielle Differentialgleichungen

Lineare und quasi lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung
Lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung (Klassifikation)
Separationsansatz

Die letzten beiden Punkte aus dem Kapitel partielle Differentialgleichungen wurden aus Zeitmangel nicht abgehandelt.

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen - theoretische Grundbegriffe

Gleichungen, in denen neben x und der gesuchten Funktion $y = y(x)$ auch deren Ableitungen $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ vorkommen, werden als Differentialgleichungen bezeichnet. Es werden hier hauptsächlich reellwertige Funktionen betrachtet.

Definition:

$$F : \mathbb{R}^{n+2} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nennt man implizite Form einer Differentialgleichung n -ter Ordnung, falls $y^{(n)}$ vorkommt.

Explizite Form:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

1.1 Lösungen von Differentialgleichungen

Definition: Eine Funktion mit Definitionsbereich $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung der Differentialgleichung, falls $y(x)$ die Differentialgleichung erfüllt. $y(x)$ muss dabei n -mal differenzierbar sein.

Beispiel: $y' = xy + x^2$ Differentialgleichung 1. Ordnung. Sie ist linear, da y und y' nur linear vorkommen.

Lösungen von Differentialgleichungen sind im Allgemeinen parameterabhängig (d.h. nicht eindeutig).

- Spezielle- bzw. Partikulärlösung ist eine Lösung, die nicht von Parametern abhängt.
- Allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung ist eine Lösung, die von n frei wählbaren Parametern (= Integrationskonstanten) abhängt.
- Vollständige Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung, ist eine allgemeine Lösung, die alle Lösungen beinhaltet.

Gegeben sei eine Differentialgleichung n -ter Ordnung:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Die eindeutige Lösung bekommt man nur durch zusätzliche Bedingungen.

Anfangswertproblem (AWP): Bedingungen (= Gleichungen) an einem Punkt x_0 . Bei einer Differentialgleichung n -ter Ordnung müssen Bedingungen bis zur $n - 1$ -ten Ordnung in x_0 bekannt sein.

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

$$y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$$

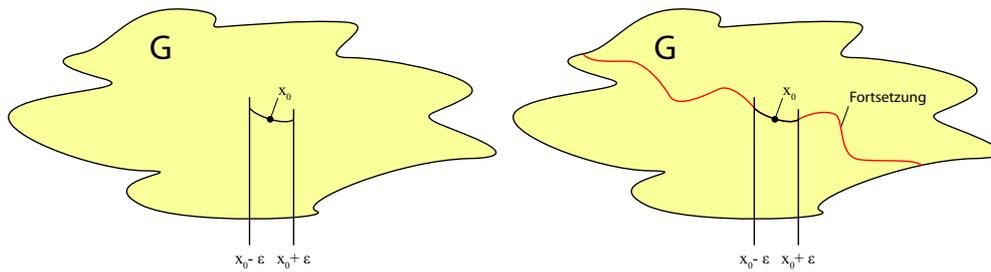


Abbildung 1: Lokale Lösung des Anfangswertproblems (li.), Fortsetzung (re.).

Definition: Die lokale Lösung des Anfangswertproblems ist eine Lösung der Differentialgleichung im Intervall $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, welche die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0, \dots$ erfüllt.

Ein Anfangswertproblem heißt *well posed* oder sachgemäß gestellt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Existenz einer lokalen Lösung des Anfangswertproblems.
- Eindeutigkeit der lokalen Lösung.
- Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten.

Letzteres ist besonders für numerische Lösungsverfahren wichtig.

Von Interesse ist gegenüber der lokalen Lösung die ganze Funktion in einem betrachteten Gebiet (Abbildung 1).

Randwertprobleme (RWP):) nennt man in der Mathematik eine wichtige Klasse von Problemstellungen, in denen die Lösungen zu einer vorgegebenen Differentialgleichung (DGL) gesucht werden, die auf dem Rand des Definitionsbereiches vorgegebene Funktionswerte (Randbedingung) annehmen sollen. Der Gegensatz dazu ist das Anfangswertproblem, bei dem nur Werte zu einem anfänglichen Zeitpunkt vorgegeben werden.

1.2 Graphische Interpretation einer expliziten Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = f(x, y)\varphi$$

Die Lösung ist eine differenzierbare Kurve (siehe Abbildung 2), die in das Richtungsfeld passt. (d.h. differenzierbare Kurve, deren Tangentenanstiege in jedem Punkt (x, y) mit $y' = f(x, y)$ gleich sind.) Das graphische Lösungsverfahren heißt auch **Eulersches Polygonzugverfahren**. Es ist ebenfalls ein numerisches Lösungsverfahren für Differentialgleichungen.

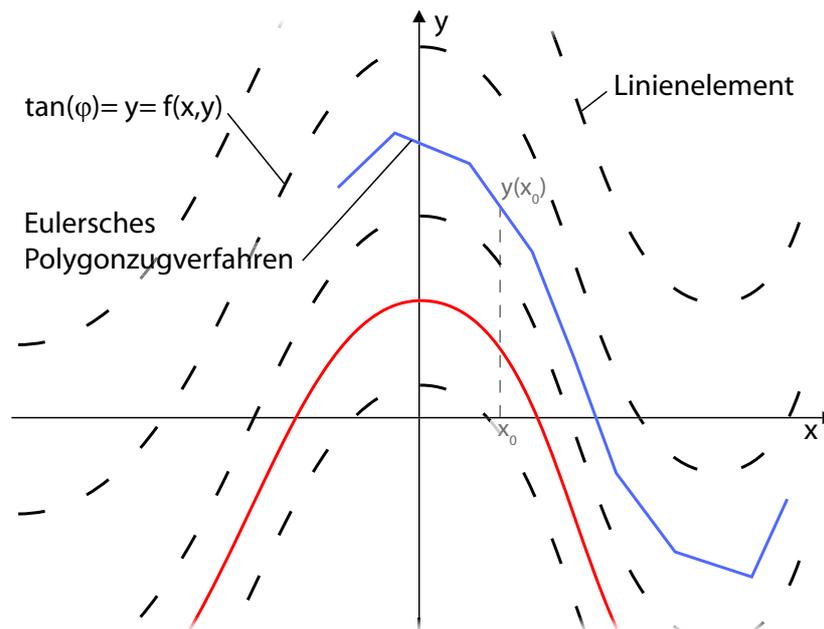


Abbildung 2: Richtungsfeld, Eulersches Polygonzugverfahren

1.3 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Gegeben sei wiederum eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$

- $f(x, y)$ ist stetig. Diese Forderung muss erfüllt sein, reicht jedoch nicht aus.
- $f(x, y)$ ist differenzierbar (nach x und y). Diese Forderung würde die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zwar implizieren, ist jedoch zu streng formuliert. In der Praxis gilt sie oft nicht, obwohl eine Lösung existiert und eindeutig ist. Außerdem ist sie zum Teil schwer überprüfbar.
- $f(x, y)$ soll Lipschitz-stetig sein. Diese Forderung garantiert die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Lipschitz-Stetigkeit: Es sei ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben. Eine Funktion $f(x, y)$ erfüllt die globale-Lipschitz Bedingung (= sie ist global Lipschitz-stetig) in Bezug auf y , falls es eine positive Konstante $L > 0$ gibt, sodass die globale L Bedingung gilt:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

$$\forall x, y_1, y_2 \text{ mit } (x, y_1) \in G, (x, y_2) \in G$$

wobei L die Lipschitzkonstante ist. Ein Gebiet G ist eine offene, zusammenhängende (d.h. Von jedem Punkt $(x, y) \in G$ führt ein Weg zu einem beliebigen anderen Punkt $(x_1, y_1) \in G$.) Menge.

Eine Funktion $f(x, y)$ erfüllt eine lokale L -Bedingung (= ist lokal Lipschitz-stetig), wenn es für alle $(x, y) \in G$ eine Umgebung U gibt, mit $U \subseteq G$, sodass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in U$ gilt:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|, \quad L > 0$$

d.h. L ist abhängig von (x, y_1) und gegebenenfalls unterschiedlich.

1.4 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Existenz- und Eindeutigkeitssatz (von Picard und Lindelöf): Gegeben ist ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Falls f in Bezug auf x und y stetig ist und in Bezug auf y eine lokale L Bedingung erfüllt, dann besitzt das Anfangswertproblem mit $y(x_0) = y_0$ für alle x_0, y_0 mit $(x_0, y_0) \in G$ eine eindeutige Lösung, die sich bis an den Rand von G fortsetzt.

Wir betrachten das Anfangswertproblem $y'(x) = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$.

$f(x, y)$ ist stetig und erfüllt eine lokale L -Bedingung bezüglich y . Anmerkung: Wenn $f(x, y)$ stetig nach y differenzierbar ist, dann erfüllt es eine lokalen L -Bedingung bezüglich y .

In diesem Fall gilt für den Rechtecksbereich D , der vollständig in G liegt:: Lipschitz-Konstante

$$L = \max |f_y(x, y)| \quad (y \in D)$$

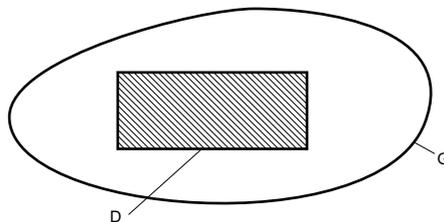


Abbildung 3: Rechtecksbereich D liegt vollständig in Gebiet G

Betrachten die Beweisidee vom Existenz- und Eindeutigkeitsatz - **Picard-Iteration**:

$$\begin{aligned}
 y' &= f(x, y), & y(x_0) &= y_0 & \text{Integrieren} \\
 \int_{x_0}^x y'(t) dt &= \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \\
 y|_{x_0}^x &= \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \\
 \Rightarrow \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}_0 + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{y}(\mathbf{t})) d\mathbf{t} & \text{'Integralgleichung'}
 \end{aligned}$$

Wir wollen $y(x)$ durch die Funktion $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \dots$ approximieren:

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= y_0 & \text{konstante Funktion} \\
 y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \\
 y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt \\
 &\vdots & \text{iterieren}
 \end{aligned}$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

Die Funktionenfolge $y_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$ konvergiert unter der Voraussetzung des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes in einem Intervall $y_0 - \varepsilon \leq x \leq y_0 + \varepsilon$ gleichmässig gegen die Grenzfunktion $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$, die auch die Lösung des Anfangswertproblems ist.

Beispiel: Die bekannte Lösung des AWP $y' = xy, y(0) = 1$, wird mittels Picard-Iteration approximiert ($f(x, y) = xy, y_0 = 0, y_0 = 1$):

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 1 \\
 y_1(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot y_0(t) dt = 1 + \frac{x^2}{2} \\
 y_2(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot y_1(t) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \\
 y_3(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot y_2(t) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} \\
 y_4(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot y_3(t) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384}
 \end{aligned}$$

Allgemein ergibt dies

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{y^{2k}}{2^k k!}$$

$y_n(x)$ mit $n \rightarrow \infty$ konvergiert gegen die Lösung

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{2^k k!}$$

Dies kann man dadurch verifizieren, dass man $y' = xy$ auf $\frac{y'}{y} = x$ umformt und aus dieser 'trennbaren Differentialgleichung' die Lösung mittels 'Trennung der Veränderlichen' errechnet:

$$\begin{aligned} \log y(x) &= \frac{x^2}{2} + \tilde{c} &\Rightarrow & y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}} \\ y(0) = 1 & \Rightarrow ce^{\frac{0^2}{2}} = 1 &\Rightarrow & y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \\ y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} & \underbrace{=}_{\text{Taylorreihe}} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!} + \dots \\ e^x & \underbrace{=}_{\text{Taylorreihe}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Die **stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten** besagt, dass sich zwei Lösungen auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$ wenig unterscheiden, sobald nur die beiden Anfangswerte bei a hinreichend nahe beieinanderliegen.

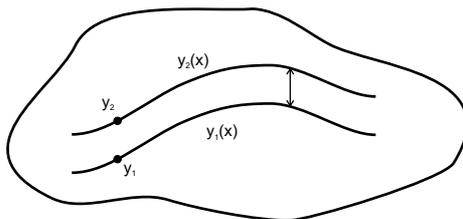


Abbildung 4: Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten

Wenn eine stetige Funktion f in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine L -Bedingung ($L > 0$) erfüllt, kann man den Abstand zwischen zwei in G verlaufenden Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ wie folgt abschätzen:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)| e^{L|x-x_0|}$$

Je grösser L ist, desto weiter werden die Lösungen auseinander liegen!

Vereinfacht gesagt bedeutet die **stetige Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite**, dass kleine Änderungen der rechten Seite f bei gleichen Anfangsbedingungen auch nur eine kleine Änderung der Lösung bewirken.

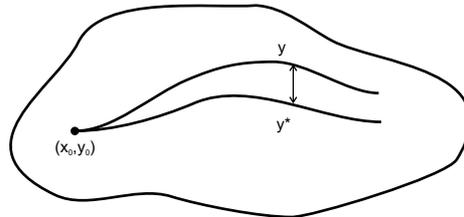


Abbildung 5: Stetige Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite

Wenn eine stetige Funktion f in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine L -Bedingung ($L > 0$) erfüllt und sich f^* auf G nur um ε ($|f(x, y) - f^*(x, y)| < \varepsilon | \forall (x, y) \in G$) unterscheiden, dann gilt für die Lösungen $y(x)$ von $y' = f(x, y)$ und $y^*(x)$ von $y' = f^*(x, y)$, mit derselben Anfangsbedingung $y(x_0) = y^*(x_0) = y_0$ im Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ die Abschätzung:

$$|y(x) - y^*(x)| \leq \varepsilon \delta e^{L(x-x_0)}$$

2 Differentialgleichungen: Spezielle Typen

2.1 Trennbare Differentialgleichungen

Ergibt sich (eventuell nach Umformung) eine Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

welche stetige, auf den Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}(x, x_0 \in I)$ und $J \subseteq \mathbb{R}(y, y_0 \in J)$ stetig definierte Funktionen f und g besitzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $g(y) \neq 0$ - durch **Trennung der Variablen (Veränderlichen)** ergibt sich eine exakte Differentialgleichung in der Form:

$$f(x) - \frac{1}{g(y)} \cdot y' = 0$$

und der Stammfunktion $(x, x_0 \in I, y, y_0 \in J)$:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi - \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

2. $g(\eta) = 0, \eta \in J$ - es gilt: $y(x) = \eta, x \in I$ ist eine konstante Lösung.

Für trennbare Differentialgleichungen $(x_0 \in I, y_0 \in J)$ besagt der **Existenz- und Eindeutigkeitssatz**, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

lokal eindeutig lösbar ist wenn gilt:

1. $g(y_0) \neq 0$, oder
2. $|g(y)| < L \cdot |y - y_0|$ in einer Umgebung von y_0 , $L > 0$ konstant (Lipschitz).

Das **Lösungsverfahren** für $y' = f(x) \cdot g(y)$ lautet allgemein:

1. Sämtliche Nullstellen von $\eta \in J$ bestimmen - $y(x) = \eta$ ist jeweils eine partikuläre Lösung
2. Trennung der Variablen ('y, dy nach links; x, dx nach rechts')

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

3. Unbestimmte Integration beider Seiten:

$$G(y) := \int \frac{dy}{g(y)}, \quad F(x) := \int f(x) dx.$$

Allgemeine implizite Lösung lautet:

$$G(y) - F(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

4. Anfangswertproblemlösung: Wenn $g(y_0) \neq 0$, $c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Sofern möglich $G(y) - F(x) = c_0$ nach y auflösen.

Wenn $g(y_0) = 0$, dann ist $y(x) = y_0$ die Lösung.

2.2 Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentialgleichungen stellen eine spezielle Form der Differentialgleichungen 1. Ordnung dar und entstehen durch Differentiation nach der Kettenregel aus $U(x, y) = \text{const.}$ Ihre implizite Form lautet

$$U_x(x, y) + U_y(x, y)y' = 0,$$

und die explizite für $U_y \neq 0$:

$$y' = -\frac{U_x(x, y)}{U_y(x, y)}$$

Normalerweise ist die Exaktheit einer Differentialgleichung nicht auf den ersten Blick ersichtlich. Eine Differentialgleichung der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

ist dann exakt, wenn es eine Funktion U gibt, so dass gilt:

$$U_x = \frac{dU}{dx} = A, \quad U_y = \frac{dU}{dy} = B$$

U ist dann die **Stammfunktion von $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$** - und ist nichts anderes als die Stammfunktion des Vektorfeldes

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} A(x, y) \\ B(x, y) \end{pmatrix}$$

Der **Exaktheitstest** ergibt für $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$ genau dann ein positives Resultat, wenn folgende **Integrabilitätsbedingung** erfüllt ist:

$$\frac{dA(x, y)}{dy} = \frac{dB(x, y)}{dx}$$

Allgemein lautet die **Lösungsmethode für exakte Differentialgleichung der Form $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$** :

1. Bestätigen von

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$$

2. Bestimmung einer Stammfunktion über den Ansatz $u_x = A$, $U_y = B$:

(a) A unbestimmt nach x integrieren

$$U(x, y) = \int A(x, y) dx + c(y)$$

(b) y partiell nach y differenzieren, mit B gleichsetzen:

$$U_y(x, y) = \left(\int A(x, y) dx \right)_y + c'(y) = B$$

(c) $c(y)$ durch Integration nach y bestimmen

Allgemeine implizite Lösung: $U(x, y) = \text{const.}$

3. Implizite Lösung ist $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ - wenn möglich nach y auflösen und Definitionsbereich bestimmen.

2.3 Integrierender Faktor

Eine nicht exakte Differentialgleichung in der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

geht durch die Multiplikation mit einer Funktion $M(x, y)$ in die exakte Differentialgleichung

$$M(x, y) \cdot A(x, y) + M(x, y) \cdot B(x, y)y' = 0$$

über. $M(x, y)$ ist der **integrierende Faktor** oder **Euler-Multiplikator**.

Allgemein lautet der Lösungsweg für $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$ mit integrierendem Faktor vom Typ $M(x, y) = m(u(x, y))$:

1. Berechnung von $A_y - B_x$. Wenn 0 herauskommt, dann liegt eine exakte Differentialgleichung vor, die wie gehabt gelöst werden kann. (siehe 2.2.)
2. Wenn $u(x, y)$ nicht explizit vorgegeben so versuchen wir ausgehend von folgender Konstellation:

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

- Wir prüfen, ob

$$\frac{A_y - B_x}{B}$$

nur von x abhängt. Sollte das der Fall sein, setzen wir

$$\mu_x = \frac{A_y - B_x}{B} \mu$$

und erhalten als Lösung dieser Differentialgleichung einen nur von x abhängigen integrierenden Faktor μ .

- Wir prüfen, ob

$$\frac{A_y - B_x}{A}$$

nur von y abhängt. Sollte das der Fall sein, setzen wir

$$\mu_y = \frac{A_y - B_x}{A} \mu$$

und erhalten als Lösung dieser Differentialgleichung einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor μ .

- Wenn der Hinweis vorhanden ist, dass der integrierende Faktor $m(x, y)$ eine bestimmte Gestalt hat, z.B. $m(x, y) = x^a y^b$, so löst man folgende Gleichung (evtl. ist Koeffizientenvergleich notwendig):

$$A(x, y) \frac{d m(x, y)}{d y} - B(x, y) \frac{d m(x, y)}{d x} + m(x, y) \left(\frac{d A(x, y)}{d y} - \frac{d B(x, y)}{d x} \right) = 0$$

- Sollte keiner der o.g. Punkte zutreffen, so bleibt nur die Auswahl verschiedener Funktionen $u(x, y)$ und dazu Berechnung von

$$H(x, y) := \frac{A y - B x}{B U_x - A u_y}$$

Wenn $H(x, y) = h(u(x, y))$ weiter mit nächstem Schritt, ansonsten anderes $u(x, y)$ wählen.

Standard-Ansätze für $u(x, y)$:

$u(x, y)$	$H(x, y)$
x	$\frac{A_y - B_x}{B}$
y	$\frac{A_y - B_x}{-A}$
$x + y$	$\frac{A_y - B_x}{B - A}$
$x - y$	$\frac{A_y - B_x}{B + A}$
xy	$\frac{A_y - B_x}{yB - yA}$
$y^2 + x^2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_y - B_x}{xB - yA}$
$x^2 - y^2$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_y - B_x}{xB + yA}$

3. Berechne $m(u) = e^{\int h(u) du}$. $M(x, y) = m(u(x, y))$ ist der Euler-Multiplikator
4. Lösung der exakten Differentialgleichung $M(x, y) \cdot A(x, y) + M(x, y) \cdot B(x, y)y' = 0$

3 Inhomogene Lineare DGL 1. Ordnung

3.1 Grundlagen

Für inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = s(x)$$

gilt: Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung.

1. Integration der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Zunächst Trennung der Veränderlichen, dann Integration. Allgemeine Lösung ist schließlich (auch logarithmische Schreibweise möglich):

$$y = c \cdot e^{-\int f(x) dx}, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. Integration der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung

Die aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung gewonnene Integrationskonstante c wird durch die Funktion $c(x)$ ersetzt, so dass man den Lösungsansatz

$$y = c(x) \cdot e^{-\int f(x) dx}$$

erhält und diesen in die inhomogene Differentialgleichung einsetzt. Die so entstehende Differentialgleichung 1. Ordnung kann durch unbestimmte Integration direkt gelöst werden.

3. Summe aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung berechnen

Eine andere Möglichkeit zur Lösung besteht in der **Verwendung einer Formel**: Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form $y' + p(x)y = r$ (r ist Störfunktion, singular oder nur von x abhängig) können mit folgender Formel aufgelöst werden:

$$h = \int p(x) dx$$

$$y(x) = e^{-h} \left(\int e^h r dx + c \right)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 y' + \frac{1}{x} \cdot y = x^2 & \Rightarrow y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0 \Rightarrow \ln y = \underbrace{-\ln x + \check{c}}_{\log \frac{1}{x}} \\
 y_h = \frac{c}{x} & \\
 y_p(x) = \frac{c(x)}{x} & \Rightarrow y_p(x) = \frac{x^4}{5} \\
 \frac{c'(x)}{x} = x^3 & \Rightarrow c'(x) = x^4 \Rightarrow c(x) = \frac{x^5}{5} \\
 \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^4}{5} & \quad \text{Allg. Lsg.}
 \end{aligned}$$

3.2 Einige Typen

3.2.1 Ähnlichkeitsdifferentialgleichung (= Homogene Differentialgleichung)

Allgemeine Gestalt:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0$$

Überführung in trennbare Differentialgleichung durch Substitution:

$$\begin{aligned}
 v(x) = \frac{y(x)}{x} & \Rightarrow y = x \cdot v(x) \Rightarrow y' = v(x) + x \cdot v'(x) \\
 v(x) + x \cdot v'(x) = f(x) & \Rightarrow \mathbf{v}'(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}}{\mathbf{x}}
 \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{y}{x} - \sqrt{1 - \frac{y}{x}} \\
 \frac{y}{x} =: v & \Rightarrow y' = v + x \cdot v' \\
 v + x \cdot v' &= v - \sqrt{1 - v} \Rightarrow \frac{v'}{\sqrt{1 - v}} = -\frac{1}{x} \\
 1 - v = u^2 & \Rightarrow -dv = 2u \cdot du \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1 - v}} dv &= \int \frac{2u}{u} du = -2u = -2\sqrt{1 - v} \\
 -2\sqrt{1 - v} &= -\ln x + \check{c} \Rightarrow \frac{1 - \frac{y}{x}}{x} = \frac{1}{2} \ln x + c \\
 \mathbf{x} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \ln \mathbf{x} + \mathbf{c}\right)^2\right) &= \mathbf{y}(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

3.2.2 Bernoulli-Differentialgleichung

Allgemeine Gestalt:

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x) \cdot (y(x)^\alpha)$$

Substitutionsmethode:

$$\begin{aligned} \eta(x) := y(x)^{1-\alpha} &\Rightarrow \eta'(x) = (1-\alpha) \cdot y(x)^{-\alpha} \cdot y'(x) \\ \underbrace{\frac{\eta'(x)}{1-\alpha} \cdot y(x)^\alpha}_{y'(x)} + a(x) \cdot \underbrace{y(x)^{1-\alpha}}_{\eta(x)} &= b(x) \cdot y(x)^\alpha \\ \eta'(x) + (1-\alpha)a(x)\eta(x) &= (1-\alpha)b(x) \end{aligned}$$

Substitution ergibt eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, deren allgemeine Lösung man bestimmt. Abschließend macht man die Substitution mit $y(x) = \eta(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ rückgängig.

3.2.3 y tritt nicht explizit in Differentialgleichung auf

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, y') \\ u := y' &\Rightarrow u' = f(x, u) \end{aligned}$$

Substitution ergibt eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

3.2.4 x tritt nicht explizit in Differentialgleichung auf - autonome Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(y, y') \\ v(y) := y' &\Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot v = v'(y) \cdot v(y) \\ &\Rightarrow \mathbf{v}(y) \cdot \mathbf{v}'(y) = \mathbf{f}(y, \mathbf{v}(y)) \end{aligned}$$

Substitution ergab eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

Beispiel:

$$\begin{aligned} y'' = -\frac{(y')^2}{5y} &\Rightarrow v(y) = y' \\ v \cdot v' = -\frac{v^2}{5y} &\Rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{1}{5y} \\ \ln v(y) = -\frac{1}{5} \cdot \ln x + \tilde{c} &\Rightarrow v(y) = \frac{c}{y^{\frac{1}{5}}} \Rightarrow y'(x) = \frac{c}{\mathbf{y}(\mathbf{x})^{\frac{1}{5}}} \end{aligned}$$

3.3 Numerisches Lösen von Anfangswertproblemen für Differentialgleichungen 1. Ordnung

Gegeben ist das Anfangswertproblem:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$$

Zerlegen $[x_0, x]$ in n gleich grosse Teilintervalle \Rightarrow Punkte $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Berechnen Näherungswerte für $y(x_i)$, d.h. $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Approximative Lösung $y(x)$ durch Näherung, die auf Diskretisierung des Anfangswertproblems beruht.

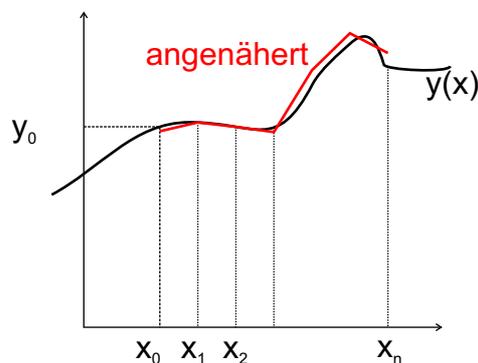


Abbildung 6: Approximative Lösung durch Näherung

Prinzipielle Unterteilung:

- Einzelschrittverfahren: Zur Berechnung von y_i wird auf y_{i-1} Werte zurückgegriffen
- Mehrschrittverfahren: Zur Berechnung von y_i wird auf mehrere zurückliegende Werte zurückgegriffen

Einzelschrittverfahren - Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} &= y'(\xi) \quad \xi \in (x_{i-1}, x_i) \\ y(x_i) &= y(x_{i-1}) + y'(\xi) \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=: h \dots \text{Schrittweite}} \\ \Rightarrow y(x_i) &= y(x_{i-1}) + h \cdot \underbrace{f(\xi, y(\xi))}_{\text{verwenden Ersatzfunktion}} \end{aligned}$$

Näherungsweise Berechnung durch Verwendung von Ersatzfunktion: Explizites Einzelschrittverfahren

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_i, \mathbf{h})$$

Verfahren von Euler (Euler-Cauchy): Es ist das einfachste Verfahren zur numerischen Lösung eines Anfangswertproblems. Wir verwenden für $F(x_i, y_i, h)$ die Funktion $f(x_i, y_i)$:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$$

Verfahren von Heun: In diesem Einschrittverfahren erfolgt die Näherung über ein Trapez und nicht über ein Rechteck:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i)) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot \underbrace{F(x_i, y_i)}_{\frac{1}{2} \cdot (K_1 + K_2)} \end{aligned}$$

Verfahren von Runge-Kutta: Verwende zusätzlichen Zwischenwert $x_i + \frac{h}{2}$, gewichtetes Mittel aus Funktionswerten an den Stellen $x_i, x_i + \frac{h}{2}, x_i + h$:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_i, y_i) \\ K_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_3\right) \\ \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \mathbf{h} \cdot \frac{1}{6} \cdot (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \end{aligned}$$

Konsistenzmaße: Ein Einzelschrittverfahren besitzt die Konsistenzordnung p , wenn es ein $c \cdot h_0 > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - F(x, y, h) \right| \leq c \cdot h^p$$

p ist konkret für folgende Verfahren:

- Euler-Verfahren: 1
- Heun-Verfahren: 2
- Runge-Kutta-Verfahren: 4

Festlegung der optimalen Schrittweite \tilde{h} durch Berücksichtigung von Verfahrensfehlern und Rundungsfehlern:

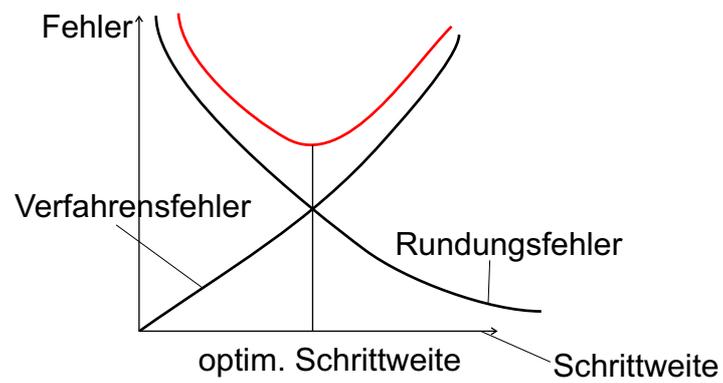


Abbildung 7: Optimale Schrittweite

4 Potenzreihenansatz zur Lösung von DGLen

Es liegt eine Differentialgleichung in folgender Form vor:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

und wir nehmen an, dass die Lösung $x_0 = x$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d.h.:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

Die Bestimmung der Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n kann auf zwei Arten erfolgen:

4.1 Fortgesetzte Differentiation

Ausgangspunkt ist das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Mit der Taylor-Formel gilt:

$$a_m = \frac{y^{(m)}(x_0)}{m!},$$

Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ bei $x = x_0$ (Kettenregel) bestimmt man nacheinander die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= y(x_0) = y_0 \\ a_1 &= y'(x_0) = f(x_0, y_0) \\ 2!a_2 &= y''(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) \\ 3!a_3 &= y'''(x_0) = [f_{xx} + f_{xy}y' + (f_{yx} + f_{yy})y' + f_y y'']_{x_0, y_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

4.2 Koeffizientenvergleich

1. Ableitungen bilden:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2} \end{aligned}$$

2. Potenzen von $y(x)$ ($(y(x))^2, (y(x))^3, \dots$) nach der Cauchy-Produktformel entwickeln:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot (x - x_0)^n$$

$$h(x) := f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{h_n}_{h_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot g_{n-k}} \cdot (x - x_0)^n$$

3. Reihenentwicklung in Differentialgleichung einsetzen und nach Potenzen von $(x - x_0)^n$ ordnen. Dann die Koeffizienten von $(x - x_0)^n$ vergleichen, d.h. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ setzen.

⇒ Gleichungssystem (unendlich dimensional) für a_0, a_1, \dots

Die Reihenentwicklung wird unter Annahme einer guten Approximation abgebrochen.

Zum Beispiel die **Laguerre-Differentialgleichung**:

$$x \cdot y'' + (1 - x) \cdot y' + m \cdot y = 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

Wir formen den Summanden $x \cdot y''$ in eine Potenzreihe um:

$$x \cdot y'' = x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

Nun verschieben wir den Summationsindex:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-1} = \sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} (\mathbf{n}+1) \cdot \mathbf{n} \cdot a_{\mathbf{n}+1} x^{\mathbf{n}-1} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} (\mathbf{n}+1) \cdot \mathbf{n} \cdot a_{\mathbf{n}+1} x^{\mathbf{n}} = A$$

Nun formen wir den Summanden $(1 - x) \cdot y'$ in eine Potenzreihe um:

$$(1 - x) \cdot y' = (1 - x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \cdot a_n + x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \cdot a_n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \cdot a_n + x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n \cdot a_n$$

Nun verschieben wir den Summationsindex:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} \cdot a_n + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n \cdot a_n = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} (\mathbf{n}+1) \cdot x^{\mathbf{n}} \cdot a_{\mathbf{n}+2} + \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} (\mathbf{n}+1) \cdot x^{\mathbf{n}} \cdot a_{\mathbf{n}+1} = B$$

Abschliessend formen wir den Summanden $m \cdot y$ in eine Potenzreihe um:

$$m \cdot y = m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot a_n = C$$

In Kurzschreibweise:

$$A + B + C = 0$$

Da die Summationsindizes gleichgesetzt wurden, fallen sie weg und es ergibt sich:

$$((n+1)^2 \cdot a_{n+1} + (m-n) \cdot a_n) \cdot x^n = 0$$

Wir führen den Koeffizientenvergleich für $(n+1)^2 \cdot a_{n+1} + (m-n) \cdot a_n$ für alle $n \geq 0$ durchführen und danach versuchen wir, ein Bildungsgesetz zu erkennen:

1. $n = 0$:

$$a_1 + m \cdot a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -m \cdot a_0$$

a_0 frei wählbar

2. $n = 1$

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot a_2 + (m-1) \cdot a_1 = 0 & \Rightarrow a_2 = -\frac{m-1}{2} \cdot \frac{a_1}{2} = \\ & (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{(m-1) \cdot m}{2} \cdot \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

3. $n = 2$

$$\begin{aligned} 3^2 \cdot a_3 + (m-2) \cdot a_2 = 0 & \Rightarrow \\ a_3 = -\frac{m-2}{3^2} \cdot a_2 = (-1)^3 \underbrace{\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}_{\frac{m!}{3!(m-3)!} = \binom{m}{3}} \cdot \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das **Bildungsgesetz**:

$$a_n = (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot \frac{a_0}{n!}$$

Beweis müsste mittels vollständiger Induktion erfolgen. Die Funktion allgemein als Potenzreihe ausgedrückt (ist auch die Lösung der Differentialgleichung von Laguerre) lautet nun:

$$\mathbf{y(x)} = \mathbf{a_0} \cdot \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} (-1)^{\mathbf{n}} \cdot \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \cdot \frac{x^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n!}}$$

Falls $m \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe bei $n > m$ ab - es bleibt das Laguerre-Polynom übrig.

4.3 Modifizierter Potenzreihenansatz f. lineare DGL 2. Ord.

Wenn der bisher erwähnte Ansatz nicht zum Ziel führt wird der modifizierte Potenzreihenansatz verwendet. Die DGL muss in folgender Form vorliegen:

$$p(x) \cdot y'' + q(x) \cdot y' + r(x) \cdot y = 0$$

$\frac{q(x)}{p(x)}$ und $\frac{r(x)}{p(x)}$ müssen um $x = x_0$ in eine Taylorreihe entwickelbar sein.

Das Problem sind dabei die Nullstellen von $p(x)$. Wenn $p(x_0) = 0$, so wird x_0 ein **singulärer Punkt** genannt.

Eine Nullstelle x_0 von $p(x)$ heißt **reguläre Singularität** der DGL, falls die Funktionen $p_0(x), p_1(x), \dots$ mit $p(x) = (x - x_0)^2 \cdot p_0(x), y(x) = (x - x_0) \cdot p_1(x), r = p_2(x)$ existieren, so dass $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ um x_0 in eine Taylorreihe entwickelbar sind und zusätzlich $p_0(x_0) \neq 0$ gilt.

Falls x_0 ist reguläre Singularität der DGL

$$(x - x_0)^2 \cdot p_0(x) \cdot y'' + (x - x_0) \cdot p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0$$

und r eine Nullstelle der Indexgleichung

$$r \cdot (r - 1) \cdot p_0(x_0) + r \cdot p_1(x_0) + p_2(x_0) = 0$$

ist, dann gilt die Potenzreihendarstellung:

$$y(x) = (x - x_0)^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

Beispiel: **Bessel-Differentialgleichungen**, welche die folgende Form haben:

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 - \alpha^2) \cdot y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Wenn $x = 0$, liegt reguläre Singularität vor - Lösung mittels Potenzreihenansatz um $x_0 = 0$ möglich. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle: (a) $\alpha = m \in \mathbb{N}$ und (b) $\alpha = m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

- $\alpha = m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 + m^2) \cdot y &= 0 \\ p_0(x_0) = 1, \quad p_1(x_0) = 1, \quad p_2(x_0) &= x^2 - m^2 \\ \text{Indexgleichung: } r \cdot (r - 1) \cdot 1 + r \cdot 1 - m^2 &= 0 \\ \Rightarrow r^2 - m^2 = 0, \quad \Rightarrow r_{1,2} &= \pm m \end{aligned}$$

$$- r_1 = +m$$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } y(x) &= x^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) \cdot (n+m-1) \cdot a_n \cdot x^{n+m} &+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) \cdot a_n \cdot x^{n+m} + \\ &+ \underbrace{(x^2 - m^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+m}}_{= \blacksquare} = 0 \\ \blacksquare \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+m+2} - \sum_{n=0}^{\infty} m^2 \cdot a_n \cdot x^{n+m}}_{=\diamond} & \\ \diamond \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} \cdot x^{n+m} - \sum_{n=0}^{\infty} m^2 \cdot x^{n+m} & \end{aligned}$$

Durchführung des Koeffizientenvergleichs:

$$* n = 0$$

$$m \cdot (m-1) \cdot a_0 + m \cdot a_0 - m^2 \cdot a_0 = 0$$

Da $0 \cdot a_0 = 0$ gilt ist a_0 frei wählbar!

$$* n = 1$$

$$\begin{aligned} (m+1) \cdot m \cdot a_1 &= (m+1) \cdot a_1 - m^2 \cdot a_1 = 0 \\ 2 \cdot (m+1) \cdot a_1 &= 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{m \in \mathbb{N}} \quad a_1 = 0 \end{aligned}$$

$$* n \geq 2$$

$$\begin{aligned} (m+n) \cdot (n+m-1) \cdot a_n &= (m+n) \cdot a_n + a_{n-2} - m^2 \cdot a_n = 0 \\ ((n+m)^2 - m^2) \cdot a_n + a_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

Rekursion für die Bestimmung für $n \geq 2$ (Differenzgleichung).
Mittels Induktion ergibt sich für die ungeraden Koeffizienten immer 0.
Betrachten nun die geraden Koeffizienten (a_{2n}):

$$\begin{aligned} ((2 \cdot n + m)^2 - m^2) \cdot a_{2n} + a_{2n-2} &= 0 \\ \Rightarrow a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{(2n+m)^2 - m^2} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n+2m) \cdot 2n} = \\ &= -\frac{a_{2n-2}}{4(n+m) \cdot n} = \underbrace{\dots}_{\text{iterieren}} = \\ &= (-1)^n \cdot \frac{a_0 \cdot m!}{4^n \cdot n! \cdot (n+m)!} \end{aligned}$$

Die folgende Funktion ist somit eine Lösung der Bessel-Differentialgleichung ($a_0 \in \mathbb{R}$):

$$y(x) = x^m \cdot a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{a_0 \cdot m!}{4^n \cdot n! \cdot (n+m)!} \cdot x^{2n}$$

Frei wählbares a_0 : Mit folgendem speziellen a_0 ergibt sich die **Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung m**:

$$a_0 = \frac{1}{2^m \cdot m!}$$

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{4^n \cdot n! \cdot (n+m)!}$$

– $r_2 = -m$

Nicht in der LVA behandelt, aber der Vollständigkeit halber erwähnt. Die zweite Lösung der Differentialgleichung in der Gestalt

$$Y_m(x) = c \cdot J_m(x) \cdot \ln x + \frac{1}{x_m} \cdot P_2(x)$$

($c \in \mathbb{R}, P_2$ ist Potenzreihe um x_0 (singuläre Stelle)) ist die **Bessel-Funktion 2. Art der Ordnung m** (J_m und Y_m bilden eine Lösungsbasis).

- $\alpha = m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Berechnung analog wie bei r_1 , nur statt dessen bei letzter Umformung statt $m!$ die Gamma-Funktion $\Gamma(\alpha + 1)$.

Der Vollständigkeit halber (nicht in LVA behandelt) seien der Ansatz $a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$ (Gamma-Funktion ist eine höhere Funktion und als $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ definiert) mit der folgenden Lösung erwähnt:

$$y(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{4^n \cdot n! \cdot \Gamma(n + \alpha + 1)} \cdot x^{2n}$$

Ergänzungen

- Die Indexgleichung ist ein quadratisches Polynom mit zwei Lösungen r_1, r_2
 - Wenn $r_1 \neq r_2 \wedge r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ - modifizierten Potenzreihenansatz verwenden - ergibt zwei unabhängige Lösungen: ($P(x)$ ist Potenzreihe)
 1. $(x - x_0)^{r_1} \cdot P(x)$
 2. $(x - x_0)^{r_2} \cdot P(x)$
 - $r_1 = r_2 \wedge r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ - wähle das 'grössere' r ($r = \max(r_1, r_2)$) für den Lösungsansatz

$$(x - x_0)^r \cdot P(x)$$

Liefert aber keine allgemeine Lösung (nur durch Variation der Konstanten erhältlich)

5 Lineare DGL n-ter Ordnung

5.1 Grundlagen

$$a_n(x) \cdot y^n(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{n-1}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y(x)' + a_0(x)y(x) = b(x)$$

($a_n(x) \neq 0, a_0(x), \dots$ sind stetige Funktionen in einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$)

$b(x)$ ist die Störfunktion (inhomogener Anteil). Ist $b = 0$ liegt eine homogene DGL vor.

Zum **Satz vom Lösungsraum homogener linearer DGL n-ter Ordnung**: $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ seien Lösungen der homogenen DGL - dann folgt daraus, dass $\alpha \cdot \varphi_1(x) + \beta \cdot \varphi_2(x)$ auch eine Lösung ist.

Die Gesamtheit aller Lösungen bildet einen n -dimensionalen Vektorraum über \mathbb{R} . Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet:

$$y_h = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + c_n \cdot \varphi_n(x)$$

Für alle Werte $((y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ und $x \in I$ gilt: Das AWP $y^n(x) + \dots + a_0(x) \cdot y(x) = 0$ mit $y^{(n)}(x_0) = y_0^k$ hat immer eine eindeutige Lösung.

Die n Lösungen der DGL ($\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$) bilden genau dann eine Basis des Lösungsraums (= Lösungsbasis, Fundamentalsystem), wenn die **Wronski-Determinante** $W(x) \neq 0$ für ein $x \in I$ ist:

$$W(x) = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(x) & \varphi_2^{n-1}(x) & \dots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Vollständige Lösung $y^{(n)}(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- **Homogene DGL**

Die homogene DGL hat die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

und ihre allg. Lösung hat die Form

$$y_{[h]}(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$$

- **Inhomogene DGL**

Die inhomogene DGL hat die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x)$$

$s(x)$ ist eine Störfunktion.

Angenommen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind unabh. Lösungen der homogenen DGL und bekannt - wie erhält man die **Partikulärlösung** $y_{[p]}$?

Die allg. Lösung ergibt sich aus:

$$y(x) = y_{[h]}(x) + y_{[p]}(x)$$

Erhalten *eine* partikuläre Lösung über den Ansatz '**Variation der Konstanten**' ($c \Rightarrow c(x)$):

$$y_{[p]}(x) := c_1(\mathbf{x})\varphi_1(x) + c_2(\mathbf{x})\varphi_2(x) + \dots + c_n(\mathbf{x})\varphi_n(x)$$

Für $c_1(x), \dots, c_n(x)$ gelten folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad & c'_1(x)\varphi_1(x) + c'_2(x)\varphi_2(x) + \dots + c'_n(x)\varphi_n(x) = 0 \\ (2) \quad & c_1(x)\varphi'_1(x) + c_2(x)\varphi'_2(x) + \dots + c_n(x)\varphi'_n(x) = 0 \\ & \vdots \\ (n-1) \quad & c'_1(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + c'_2(x)\varphi_2^{(n-2)}(x) + \dots + c'_n(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ (n) \quad & c_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = s(x) \end{aligned}$$

Folgendes Lineare Gleichungssystem ergibt für $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$ eindeutige Lösungen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \dots & \varphi'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{[n-1]}(x) & \varphi_2^{[n-1]}(x) & \dots & \varphi_n^{[n-1]}(x) \end{pmatrix}}_{\text{Fundamentalmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \\ \vdots \\ c'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{s}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $c_1(x), \dots, c_n(x)$ durch die Integration der aus dem Linearen Gleichungssystem errechneten $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$

Anmerkung: Bei einer DGL 1. Ordnung sieht dieser Ansatz einfach so aus: $\varphi_1(x) \Rightarrow \varphi_1(x) \cdot c'_1(x) = s(x)$.

Beispiel einer **Eulerschen DGL**:

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$$

Im ersten Schritt bestimmen wir das Fundamentalsystem $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ der zugehörigen homogenen DGL., und zwar mit dem Ansatz $\varphi(x) = x^r$:

$$y(x) = x^r, \quad y'(x) = rx^{r-1}, \quad y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$$

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} - 2xr x^{r-1} + 2x^r = 0$$

$$r(r-1)x^r - 2rx^r + 2x^r = 0 \quad | \cdot \frac{1}{x^r}$$

$$r(r-1) - 2r + 2 = 0 \quad \text{Indexgleichung}$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-2)(r-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r_{1,2} = 1, 2}$$

Die Lösungen der homogenen DGL sind somit: $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$.

Mit Hilfe der Wronski-Determinante prüfen wir die Unabhängigkeit der Lösungen:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$$

$$W(1) = 1^2 = 1 \neq 0$$

Somit sind die Lösungen unabhängig und die Lösung der homogenen DGL lautet:

$$y_{[h]}(x) = c_1x + c_2x^2$$

Nun wenden wir die 'Variation der Konstanten' an:

$$\mathbf{x}^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \quad | : \frac{1}{x^2}$$

$$1y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = x$$

$$\varphi_1 = x, \varphi_2 = x^2$$

$$\text{Ansatz } y_{[p]} = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)$$

$$\begin{bmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^3}{x^2} = x \end{pmatrix}$$

Cramer'sche Regel anwenden

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x & 2x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-x^3}{x^2} = -x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Nach Integration ergibt sich $c_1(x) = -\frac{x^2}{2}$ und $c_2(x) = x$ und damit:

$$y_{[p]}(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot x + x \cdot x^2 = \frac{x^3}{2}$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^3}{2} + \mathbf{c}_1\mathbf{x} + \mathbf{c}_2\mathbf{x}^2 \quad \text{allg.Lsg.}$$

Eine weitere Anwendung für die Variation der Konstanten ist die folgende: Es sei eine homogene lineare DGL gegeben und es sei angenommen, man kenne eine Lösung $\varphi_1(x)$. In diesem Fall führt man eine Reduktion der Ordnung n der DGL durch den **Reduktionsansatz**

$$y(x) = \varphi_1(x) \cdot c(x)$$

durch, was eine DGL der Ordnung $n - 1$ für $c'(x)$ ergibt.

Beispiel (s. vorhergehendes):

$$\begin{aligned}
 x^2 y'' - 2xy' + 2y &= 0, & \varphi_1(x) &= x \\
 \text{Ansatz } y = c(x)x &\Rightarrow y' = c'(x) + c \\
 y'' = c''x + c' + c' &= c''x + 2c' \\
 x^2(c''x + 2c') - 2x(c'x + c) + 2cx &= 0 \\
 x^3 c'' = 0 &\Rightarrow c'' = 0 &\Rightarrow c' = 1 &\Rightarrow \mathbf{c = x} \\
 y(x) = c(x) \cdot x = x \cdot x = x^2 &\Rightarrow \text{unabh. Lsg.}
 \end{aligned}$$

5.2 Lineare DGL n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Form (**homogen**) ist:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0(x)y = 0 \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Verwendug des Exponentialansatzes $\mathbf{y(x)} = \mathbf{e^{\lambda x}}$, was das folgende charakteristische Polynom von Grad n ergibt:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Nullstellen (Vielfachheit k):

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_i)^{k_i} \\
 \lambda_i &\neq \lambda_j, \quad 1 \leq j \leq i, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

Die Lösungsbasis $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ der homogenen DGL erhält man wie folgt:

- Falls λ eine reelle Nullstelle mit der Vielfachheit k ist: k_i ist unabhängige Lösung, gegeben durch $e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_i x}$,
- Falls $\lambda = \alpha - i\beta$ eine komplexe Nullstelle mit der Vielfachheit k ist, dann ist auch $\lambda_j = \alpha + i\beta$ eine komplexe Nullstelle mit der Vielfachheit k_j .

Unabhängige Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\
 e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), x^2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)
 \end{aligned}$$

Die allgemeine Form (**inhomogen**) ist:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0(x)y = s(x) \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$$

Zur Lösung kann die Variation der Konstanten verwendet werden oder bei speziellen $s(x)$ verschiedene unbestimmte Ansätze, z.B.:

$$\begin{aligned}
 s(x) &= (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) e^{\mu x}, \quad \mu \in \mathbb{R} \\
 \text{Ansatz } y_p(x) &= (A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m) e^{\mu x}
 \end{aligned}$$

μ ist die Lösung des aus der zugehörigen homogenen DGL resultierenden charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$.

Wenn μ eine k -fache Nullstelle ist, so tritt der Resonanzfall auf und es gilt:

$$y_p(x) = (A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\mu x}x^k$$

Anderes Beispiel:

$$s(x) = (c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$s(x) = (c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$\text{Ansatz } y_p(x) = (A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \\ (A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

(Falls $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ ist)

$$\text{Ansatz } y_p(x) = x^k(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \\ x^k(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

(Falls $\alpha + i\beta$ k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ ist)

6 Lösen von DGLen mittels Laplace(L-)-Transformation

6.1 Grundlagen

Gegeben ist eine Funktion $f(t) [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Falls das uneigentliche Integral für zumindest ein $s \in \mathbb{R}$ existiert, dann heißt $F(s)$ (Bildfunktion) die **Laplace-Transformierte** (**L-transformierte**) von $f(t)$ (Zeitfunktion):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

Der **Existenz- und Eindeutigkeitsatz für L-transformierte**:

- Ist die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf beschränkten Intervallen stückweise stetig (d.h. sie besitzt in Intervallen nur endlich viele Sprungstellen) und $f(t)$ hat höchstens exponentielles Wachstum, d.h. es existieren Konstanten $M, \delta > 0$

$$|f(t)| \leq M e^{\delta t}, \quad t \geq 0$$

dann gilt:

- $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existiert für alle $s > \delta$
- Das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$ konvergiert für alle $s \geq s_0 > \delta$ gleichmässig
- $f(t)$ ist durch $F(s)$ eindeutig bestimmt (bis auf die Sprungstellen). Die Rücktransformierbarkeit ist daher gewährleistet
- $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$

Es gibt allerdings auch L-transformierbare Funktionen, die o.g. Bedingungen nicht vollständig genügen.

Es gilt:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} =: F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt$$

Inverse Transformation $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{s-a}$
$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Beispiel:

$$e^{a \cdot t} \quad a = \alpha + i \cdot \beta$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s) \cdot t} dt = \frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a-s} \Big|_0^{\infty} =$$

wenn $a-s < 0$ dann ok
 $e^{(a-s) \cdot t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a-s}}_{\rightarrow 0} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

$\cos(\omega \cdot t), \sin(\omega \cdot t)$: setze $a = 0 + i \cdot \omega$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega \cdot t) + i \cdot \sin(\omega \cdot t) = \dots$$

6.2 Rechenregeln

$f(t), g(t)$ - Zeitfunktion $\xrightarrow{\mathcal{L}} F(s), G(s)$

- *Linearität*

$$\mathcal{L}\{\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)\} = \alpha \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$$

Beispiel:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh t\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^t\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s^2-1}$$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{analog}$$

- *Streckung*

$$\mathcal{L}\{f(c \cdot t)\} = \frac{1}{c} \cdot F\left(\frac{s}{c}\right), c > 0$$

Beweis: Variable im Integral substituieren

- *Differentiation und Integration im Zeitbereich*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - \underbrace{f(0^+)}_{\text{rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle 0}}$$

Voraussetzungen:

1. f, f' \mathcal{L} -transformierbar
2. f stetig auf $[0, \infty)$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^+) - s^{n-2} \cdot f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Voraussetzungen für die Integration analog denen von der Differentiation:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) \, d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(t) &= t, \mathcal{L}\{t\} = ? \\ f'(t) &= 1, \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \\ s \cdot F(s) - f(0^+) &= s \cdot F(s) \\ \Rightarrow F(s) \cdot s &= \frac{1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Analog: $f(t) = t^n, n = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= n(n-1)(n-2) \dots 1 \cdot t^0 = n! \cdot t \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n \cdot F(s) \\ \mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} &= n! \cdot \mathcal{L}\{1\} = n! \cdot \frac{1}{s} \\ \Rightarrow F(s) &= \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

Weitere wichtige Eigenschaften:

- *Differentiation und Integration im Bildbereich*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} &= -\frac{d}{ds} F(s) = -F'(s) \\ \mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} &= (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s) \\ \mathcal{L}\left\{\frac{\mathbf{f}(\mathbf{t})}{\mathbf{t}}\right\} &= \int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u} \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\mathcal{L}\{t \cdot \sin(\omega t)\} = -\frac{d}{ds} \cdot F(s) = -\frac{d}{ds} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{2s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

- Dämpfung und Verschiebung

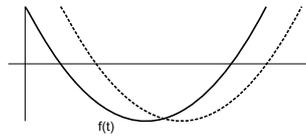


Abbildung 8: Dämpfung und Verschiebung

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot f(t)\} = F(s + a), \quad f(t) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, a > 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t - a) \cdot u(t - a)\} = e^{-as} \cdot F(s)$$

$u(t)$... Heavisidische Sprungfunktion

(hat für eine beliebige nichtpositive Zahl den Wert Null, andernfalls den Wert Eins)

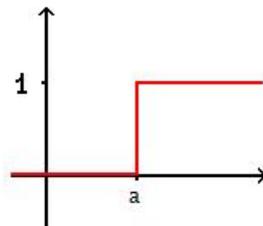
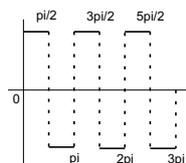


Abbildung 9: Heavisidische Sprungfunktion

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u(t - a)\} = e^{-as} \cdot \frac{1}{s}$$

Beispiel: \mathcal{L} -Transformation der Rechteckperiode T , Amplitude A ($T, A > 0$):

Abbildung 10: \mathcal{L} -Transformation der Rechteckperiode T , Amplitude A

$$f(t) = [2A \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u(t - \frac{nT}{2})] - A$$

Für jedes t ist die Reihe nur eine endliche Reihe - $0 \leq t < \frac{T}{2}$, nur $n = 0$ liefert:

$$f(t) = 2A \cdot \underbrace{(-1)^0}_{=1} \cdot \underbrace{u(t)}_{=1} - A = 2A - A = A$$

$\frac{T}{2} \leq t < T$: $n = 0$ und $n = 1$ liefert:

$$f(t) = 2A \cdot \underbrace{(-1)^0}_{=1} \cdot \underbrace{u(t)}_{=1} + 2A(-1)^1 \cdot u(t - \frac{T}{2}) - A = 2A - 2A - A = -A$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= 2A \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot u(t - \frac{nT}{2})\right\} - A \cdot \mathcal{L}\{1\} = \\ &= 2A \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t - \frac{nT}{2}) dt - \frac{A}{s} = \\ &= 2A \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-st} (-1)^n u(t - \frac{nT}{2}) dt - \frac{A}{s} = \\ &= 2A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} (-1)^n u(t - \frac{nT}{2}) dt - \frac{A}{s} \blacksquare \end{aligned}$$

■ Darf man hier machen, ist aber i.A. *nicht* erlaubt!

- *Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen*

Definition: Eine Funktionenfolge $f_0(x), f_1(x), \dots$ heisst auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gleichmässig konvergent gegen eine Funktion $f(x)$, wenn $\forall \epsilon > 0$ ein von x unabhängiger Index $N = N_\epsilon > 0$ existiert, sodass

$$n \geq N : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall x \in I$$

Satz: Wenn $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmässig auf I gegen $f(x)$ konvergiert, dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(n) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) dx = \int_a^b f(n) dx$$

Betrachten Reihe:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

Integration und Summation einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}$ dürfen vertauscht werden, wenn die Folge der Partialsummen

$$s(n)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

gleichmässig gegen

$$s(n)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

konvergiert.

- *Weierstrass'scher M-Test*

Für gleichmässige Konvergenz von Funktionenreihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_k(x)$: Wenn für jede Funktion $f_k(x)$ ein Wert $M \geq 0$ angegeben werden kann, sodass

$$|f_k(x)| \leq M_k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} M_k < \infty$, dann folgt daraus: Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig auf I .

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2A \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-st} \cdot (-1)^n \cdot u(t - \frac{n \cdot T}{2}) dt - \frac{A}{s} = \blacksquare$$

f und \sum sind wegen gleichmässiger Konvergenz vertauschbar.

$$f_k(t) = e^{-st} \cdot (-1)^k \cdot u(t - \frac{k \cdot T}{2})$$

$$|f_k(t)| = \underbrace{|e^{-st}|}_{s>0} \cdot (-1)^k \cdot \underbrace{u(t - \frac{k \cdot T}{2})}_{\text{Sprungfunktion}} \leq |e^{-s \cdot \frac{k \cdot T}{2}}| = e^{-s \cdot \frac{k \cdot T}{2}} = M_k$$

$$t = \frac{K \cdot t}{2}, \quad 0 \leq t < \frac{K \cdot T}{2} \Rightarrow u(t - \frac{K \cdot T}{2}) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_k = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\frac{st}{2}})^k = \frac{1}{1 - e^{-\frac{st}{2}}} < \infty, s > 0 \checkmark$$

Fortsetzung von ■:

$$\begin{aligned}
 & 2A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} (-1)^k - u\left(t - \frac{kT}{2}\right) dt - \frac{A}{s} = \\
 & 2A \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k - \mathcal{L}\left\{u\left(t - \frac{kT}{2}\right)\right\} - \frac{A}{s} = \\
 & 2A \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k - e^{-\frac{T_s}{2}} - \frac{1}{s} - \frac{A}{s} = \\
 & \frac{2A}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{T_s}{2}} - \frac{A}{s} = \frac{2A}{s} \frac{1}{1 + e^{-\frac{T_s}{2}}} - \frac{A}{s} \\
 & \frac{A}{s} \cdot \left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{T_s}{2}}} - 1\right) = \frac{A}{s} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T_s}{2}}}{1 + e^{-\frac{T_s}{2}}} = \frac{A}{s} \tanh\left(\frac{sT}{k}\right)
 \end{aligned}$$

- *Faltung*

$$\begin{aligned}
 (f * g)(t) &= \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \\
 \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} &= F(s) \cdot G(s)
 \end{aligned}$$

- *Umkehrformel*

Gegeben $F(s)$ - gültig falls $F(\delta)$ existiert

$$\underbrace{\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}_{=f(t) \text{ falls stetig}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\delta+i\omega)t} \cdot F(\delta + i\omega) d\omega$$

6.3 Anwendungen der \mathcal{L} -Transformation

6.3.1 AWP für lineare DGL mit konst. Koeffizienten

Vorteil: Die Anfangswerte werden sofort eingesetzt.

Vorgangsweise: DGL \mathcal{L} -transformieren - ergibt eine lineare Gleichung für $X(s)$ (= \mathcal{L} -transformierbar); danach Lösung der Gleichung und Rücktransformation (\mathcal{L}^{-1}) mit

- Rechenregeln
- Tabellen

Beispiel:

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = \sin(\omega t), \quad \omega > 0, \quad x(0) = c_1, \dot{x} = c_2$$

\mathcal{L} -transformieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} &:= X(s) \\ \mathcal{L}\{\ddot{x} + 4x\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} \\ \mathcal{L}\{\underbrace{\ddot{x}}_{\square} + 4\underbrace{x}_{\blacksquare}\} &= \mathcal{L}\{\underbrace{\sin(\omega t)}_{\diamond}\} \\ \square \quad s^2 X(s) - s \underbrace{x(0)}_{c_1} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{c_2} & \\ \blacksquare \quad 4X(s) & \\ \diamond \quad \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} & \\ \square + \blacksquare = \diamond & \\ X(s)(s^2 + 4) &= \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \\ X(s) &= \frac{1}{s^2 + 4} \left[\frac{\omega}{\omega^2 + s^2} + c_1 s + c_2 \right] = \\ &= \frac{c_1 s}{s^2 + 4} + \frac{2c_2}{2(s^2 + 4)} + \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= c_1 \cos(2t) + \frac{c_2}{2} \sin(2t) + \begin{cases} \frac{1}{2(\omega^2 - 4)} (\omega \sin(2t) - 2 \sin(\omega t)) & \omega \neq 2 \\ \frac{1}{8} (\sin(2t) - 2t \cos(2t)) & \omega = 2 \end{cases} \blacklozenge \\ \blacklozenge \quad \text{Resonanzfall, s. Vachener 2, S.72} & \end{aligned}$$

6.3.2 AWP für lineare DGL mit nichtkonstanten Koeffizienten

I.A. liefert die \mathcal{L} -Transformation keine Erleichterung, in Spezialfällen jedoch eine 'einfachere' DGL im Bildbereich.

Beispiel:

$$t\ddot{x} - x = 0$$

Ist eine DGL 2. Ordnung im Zeitbereich, $\mathcal{L}\{x(t)\} := X(s)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t\ddot{x} - x\} &= \mathcal{L}\{t\ddot{x}\} - \mathcal{L}\{x\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\ddot{x}\} - [sX(s) - x(0)] = \\ &-\frac{d}{ds}(s^2X(s) - sx(0) - x(0)) - sX(s) + x(0) = \\ &2sX(s) - s^2X'(s) + x(0) - sX(s) + x(0) = 0 \\ &-s^2X'(s) - 3sX(s) = -2x(0) \\ &x'(s) + \frac{3}{s}X(s) = \frac{2x(0)}{s^2}\end{aligned}$$

DGL 1. Ordnung im Bildbereich

$$X(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{C}{s^3}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(0) + \frac{c}{2}t^2$$

6.3.3 Elektrische Schaltungen (RCL-Schwingkreis)

Schaltelemente: Widerstand, Kondensator, Spule

Spannung $u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$ (Kirchhoff'sche Regel)

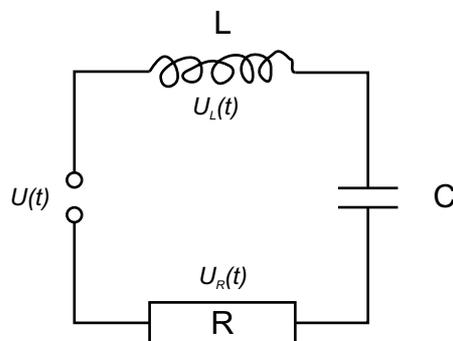


Abbildung 11: RCL-Schwingkreis

Stromstärke $i(t)$, $i(0) = 0$

$$I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}, U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

Zeitbereich	Bildbereich
$u_R(t) = Ri(t)$	$U_R(s) = RI(s)$
$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$U_C(s) = \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = \frac{1}{Cs} I(s)$
$u_L(t) = Li(t)$	$U_L(s) = LsI(s)$

Im Bildbereich gilt das Ohmsche Gesetz:

$$U(s) = H(s) \cdot I(s) \quad \text{mit} \quad H(s) = R + \frac{1}{cs} + Ls$$

Nach Lösung im Bildbereich Rücktransformation notwendig.

6.3.4 Lösen von Integralgleichungen

Integralgleichungen sind Funktionalgleichungen, in denen die gesuchte Funktion als Integrand in einem best. Integral vorkommt.

Best. Integralgleichungstyp:

$$y(t) + \int_0^t \kappa(\tau)y(t-\tau) d\tau = f(t)$$

$$f(t), g(t), \quad \underbrace{(f * g)(t) = \int f(\tau) \cdot g(t-\tau) dt}_{\text{Faltung}}$$

\mathcal{L} -Transformierte:

$$Y(s) + \kappa(s) \cdot Y(s) = F(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{F(s)}{1 + \kappa(s)}$$

Voraussetzung: y, κ, f müssen \mathcal{L} -transformierbar sein.

Beispiel:

$$y(t) + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = 1$$

$$Y(s) + \frac{1}{s^2 + 1} \cdot Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(1 + \frac{1}{s^2+1})} = \frac{s^2 + 1}{\underbrace{s(s^2 + 1)}} \blacktriangleright$$

★ Partialbruchzerlegung

$$\frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2}$$

$$s^2 + 1 = A(s^2 + 2) + (Bs + C) = (A + B)s^2 + Cs + 2A$$

$$1 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

$$0 = Cs \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$1 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\blacktriangleright = \frac{1}{s} + \frac{s}{2(s^2 + 2)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(t)) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{2(s^2 + 2)}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{2}t)$$

7 Randwertaufgaben, -probleme (RWA, RWP)

Definition: Treten in der Bestimmungsgleichung für die eindeutige Charakterisierung der Lösung einer DGL Auswertungen der gesuchten Funktion und deren Ableitungen nicht nur an einer Stelle (wie beim AWP), sondern an zwei Stellen $a \neq b$ auf, dann spricht man von einer **Randwertaufgabe (RWA)** bzw. von einem **Randwertproblem (RWP)**.

Allgemeines Prinzip zur Lösung von RWA/RWP:

- Auffinden der allgemeinen Lösung der gegebenen DGL (mit Parametern c_1, c_2, \dots, c_n)
- Anpassen der Koeffizienten c_1, c_2, \dots, c_n durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Lösung

⇒ Gleichungssystem c_1, c_2, \dots, c_n

Spezialfall: DGL ist linear und Randbedingungen sind auch Linear ⇒ Lineares Gleichungssystem für c_1, c_2, \dots, c_n .

Falls nichtlineare RWA/RWP, so ist das Problem i.A. wesentlich komplizierter.

Beispiel: Biegebalken

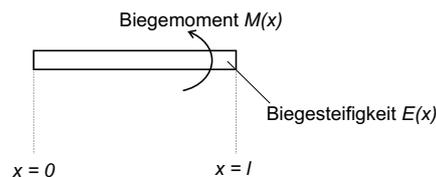


Abbildung 12: Biegemoment und Biegesteifigkeit beim Biegebalken

$y(x)$ ist dabei die Auslenkung (Elongation) an der Stelle x .

Die das Modell beschreibende DGL für $y(x)$ lautet (vereinfacht):

$$y''(x) = -\frac{M(x)}{E(x)} = -b(x)$$

Deren allgemeine Lösung ist:

$$y(x) = c_1x + c_2 - \int_0^x \int_0^\xi b(\eta) d\eta d\xi$$

Betrachten RWA: Träger fest aufliegend

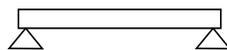


Abbildung 13: Biegebalken: RWA-Träger fest aufliegend

Am Ende fest - daraus folgt: $y(0) = 0, y(l) = 0$.

Einsetzen der Randbedingungen:

$$0 = y(0) = c_1 \cdot 0 - c_2 - \underbrace{y_p(0)}_{=0} \Rightarrow c_2 = 0$$

$$0 = y(l) = c_1 \cdot l + \underbrace{c_2}_{=0} - y_p(l) \Rightarrow c_1 = \frac{y_p(l)}{l}$$

\Rightarrow egal wie $M(x)$, $E(x)$ gewählt werden - die RWA hat immer eine eindeutige Lösung.
RWA: an Enden eingespannt

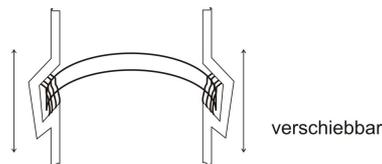


Abbildung 14: Biegebalken: RWA - Biegebalken an Enden eingespannt

Es gilt: $y'(0) = \varphi_1$, $y'(l) = \varphi_2$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 x + c_2 - y_p(x)$$

Zwei Gleichungen (I,II):

$$I : \quad \varphi_1 = y(0) = c_1 - \underbrace{y_p'(0)}_{=0} = c_1$$

$$II : \quad \varphi_2 = y(l) = c_1 - y_p'(l) = c_1 - y_p'(l)$$

$$y_p(x) = \int_0^x \int_0^\xi b(\eta) \, d\eta \, d\xi$$

$$y_p'(x) = \int_0^x b(\eta) \, d\eta$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: $c_1 = \varphi_1$, $c_1 = \varphi_2 + y_p'(l)$:

1. $\varphi_1 \neq \varphi_2 + y_p'(l)$ - keine Lösung
2. $\varphi_1 = \varphi_2 + y_p'(l)$ - unendlich viele Lösungen weil c_2 frei wählbar.

Daraus folgt: **Es kann keinen EE-Satz für RWA/RWP geben!**

Vergleiche hierzu Lineare Gleichungssysteme: n Gleichungen für n Unbekannte - $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

- $\det A \neq 0$ - LGS mit Lsg. für jedes \vec{b}
- $\det A = 0$ - LGS hat entweder unendlich viele Lösungen oder keine.

7.1 Lineare RWA

Lineares DGL: $L[y] = y(x)^n + a_{n-1} \cdot y(x)^{n-1} + a_{n-2} \cdot y(x)^{n-2} + \dots + a_0 \cdot y(x) = b(x)$.

Lineare Randbedingungen: n Gleichungen (Stelle a):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t) + b(t) \\ Rx(a) + Sx(b) &= R, \quad \text{Rang}(R, S) = n \end{aligned}$$

Klassifikation:

- inhomogene lineare RWA: $b(x) \neq 0 \wedge r \neq 0$
- vollhomogene lineare RWA: $b(x) = 0 \wedge r = 0$
- halbhomogene lineare RWA: $b(x) = 0 \vee r = 0$

Bemerkung: Vollhomogene RWP besitzen immer die triviale Lösung $x(t) = 0$.

Das halbhomogene RWP muss i.A. keine Lösung haben.

Jede Lösung $y(x)$ (sofern existent) des inhomogenen RWP lässt sich wie folgt schreiben (nach dem Superpositionssatz):

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Wobei $y_p(x)$ die spezielle Lösung des inhomogenen RWP ist; $y_h(x)$ eine Lösung des vollhomogenen RWP.

7.2 RWP - Alternativsätze

Fall: halbhomogenes lineares RWP:

- homogene lineare DGL: $L[y] := y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0y(x) = 0$
- inhomogene lineare Randbedingung: $R = \vec{y}(a) + S\vec{y}(b) = \vec{p}$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Allg. Lsg. der homogenen linearen DGL ($\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungsbasis):

$$\begin{aligned}
 & y(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \\
 & \vec{\varphi}_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i(x) \\ \varphi_i'(x) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow R(c_1\vec{\varphi}_1(a) + c_2\vec{\varphi}_2(a) + \dots + c_n\vec{\varphi}_n(a)) + \\
 & \quad S(c_1\vec{\varphi}_1(b) + c_2\vec{\varphi}_2(b) + \dots + c_n\vec{\varphi}_n(b)) = \vec{p} \\
 & \quad = R\Phi(a)\vec{c} + S\Phi(b)\vec{c} = \vec{p} \quad \text{wobei} \\
 & \Phi(x) = (\vec{\varphi}_1(x) | \vec{\varphi}_2(x) | \dots | \vec{\varphi}_n(x)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \\
 & \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow \text{LGS } \underbrace{[R\Phi(a) + S\Phi(b)]}_{D} \cdot \vec{c} = \vec{p} \quad \mathbf{D} \cdot \vec{c} = \vec{p}
 \end{aligned}$$

LGS ist mit n Unbekannten c_1, \dots, c_n und n Gleichungen sowie mit $n \times n$ Matrix D .

- $\det D \neq 0$ - LGS für alle \vec{p} eindeutig lösbar
- $\det D = 0$ - LGS hat entweder keine oder unendlich viele Lsg.

Alternativsatz: Gegeben sei ein halbhomogenes lineares RWP $L[y] = 0$, $R \cdot \vec{y}(a) + S \cdot \vec{y}(b) = \vec{p}$. Seien $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ eine Lösungsbasis der zugehörigen homogenen DGL und sei $D := R \cdot \Phi(a) + S \cdot \Phi(b)$, Φ definiert wie oben (=Fundamentalmatrix), dann gilt:

1. Ist $D \neq 0$, dann besitzt das halbhomogene RWP eine eindeutige Lösung für alle \vec{p} .
2. Ist $D = 0$, dann besitzt das halbhomogene RWP genau dann eine eindeutige Lösung wenn $\text{rg } D = \text{rg}(D, \vec{p})$.
3. Das entsprechende vollhomogene RWP, d.h. für $\vec{p} = \vec{0}$, besitzt genau dann nichttriviale Lsg. $y(x) \neq 0$, falls $\det D = 0$.

Bemerkung zum inhomogenen RWP $L[y] = b(x)$, $R \cdot \vec{y}(a) + S \cdot \vec{y}(b) = \vec{p}$: Allgemeine Lösung der zugehörigen inhomogenen DGL ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots + c_n \cdot \varphi_n(x) + y_p(x)$$

$y_p(x)$ ist die Partikulärlösung.

Anpassen an Randbedingungen liefert wiederum ein LGS der Gestalt

$$\begin{aligned} D \cdot \vec{c} &= \vec{q} \\ D &= R \cdot \Phi(a) + S \cdot \Phi(b) \\ \vec{q} &= \vec{p} - R \cdot \vec{y}_p(a) - S \cdot \vec{y}_p(b) \end{aligned}$$

Alternativsatz: Entweder ist das inhomogene RWP für alle $b(x)$ und \vec{p} eindeutig lösbar (falls $\det D \neq 0$), oder das entsprechende vollhomogene RWP, d.h. $b(x) = 0 \wedge \vec{p} = \vec{0}$, besitzt nichttriviale Lösung (falls $\det D = 0$).

Beispiel: $y'' + \omega^2 y = c$, $y(0) = p_1$, $y(\pi) = p_2$.

Diese homogene DGL mit konstanten Koeffizienten besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ mit den Lösungen $\lambda = \pm i \cdot \omega$ (konjugiert komplex). Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL lautet somit:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= c_1 \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t) \\ R &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{linker Rand}}, \quad S = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rechter Rand}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \cdot y(0) & + & 0 \\ 0 \cdot y(0) & + & 0 \end{bmatrix}}_R y'(0) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \cdot y(\pi) & + & 0 \\ 1 \cdot y(\pi) & + & 0 \end{bmatrix}}_S y'(\pi) &= \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \\ R\vec{y}(a) + S\vec{y}(b) &= \vec{p}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) & -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechnen nach Alternativsatz, betrachten

$$\begin{aligned} D = R\Phi(0) + S\Phi(\pi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\omega\pi) & \cos(\omega\pi) \\ \omega \cos(\omega\pi) & -\omega \sin(\omega\pi) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin(\omega\pi) & \cos(\omega\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\omega\pi) & \cos(\omega\pi) \end{bmatrix} \\ \det D &= -\sin(\omega\pi) \end{aligned}$$

Wann ist $\sin(\omega\pi) = 0$? Wenn $\omega \in \mathbb{Z}$.

Falls $\omega \notin \mathbb{Z}$ besitzt das RWP für alle p_1 und p_2 eine eindeutige Lösung (da Determinante von D nicht Null ist).

Ist die Determinante 0 und $\omega \in \mathbb{Z}$, so gibt es entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

$$D \cdot \vec{c} = \vec{p}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & p_1 \\ \underbrace{\sin(\omega\pi)}_{=0} & \cos(\omega\pi) & p_2 \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & p_1 \\ 0 & \cos(\omega\pi) & p_2 \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 - p_1 \cdot \cos(\omega\pi) \end{array} \right]$$

Daraus folgt: $p_2 - p_1 \cdot \cos(\omega\pi) = 0$ hat unendlich viele Lösungen, $p_2 - p_1 \cdot \cos(\omega\pi) \neq 0$ hat keine Lösung.

7.3 Lösen von RWP mit Hilfe der Green-Funktion

Gegeben: halbhomogenes lineares RWP: $L[y] := y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0y(x) = b(x)$, $R \cdot \vec{y}(a) + S \cdot \vec{y}(b) = \vec{0}$.

Satz über die Green-Funktion von RWP: Seien $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ eine Basis des Lösungsraumes der zugehörigen homogenen DGL $L[y] = 0$, gelte für das halbhomogene RWP, dass $\det D = \det(R\Phi(a) + S\Phi(b)) \neq 0$. Dann existiert für jede Störfunktion $b(x)$ eine eindeutige Lösung des RWP. Diese lässt sich darstellen als

$$y(x) = \int_a^b g(x, \omega) \cdot b(\omega) d\omega,$$

wobei die sog. Green-Funktion $g(x, \omega) : [a, b] \times [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften besitzt:

- $g(x, \omega)$ erfüllt für jedes feste ω in Bezug auf $x (x \neq \omega)$ die homogene DGL, d.h. $L[g(x, \omega)] = 0$ für alle $x \neq \omega$.
- $g(x, \omega)$ erfüllt für jedes feste ω , $a < \omega < b$ die homogene Randbedingung, d.h..

$$R\vec{g}(a, \omega) + S\vec{b}(a, \omega) = \vec{0}, \quad \text{wobei}$$

$$\vec{g}(x, \omega) = (g(x, \omega), g'(x, \omega), \dots, g^{(n-1)}(x, \omega)) \quad \text{und}$$

$$g^{(k)}(x, \omega) = \frac{d^k}{dx^k} g(x, \omega)$$

- Die Funktionen $g(x, \omega), g'(x, \omega), \dots, g^{(n-1)}(x, \omega)$ sind stetig auf $[a, b] \times [a, b]$. Die Funktion $g^{(n-1)}(x, \omega)$ existiert für $x \neq \omega$ und es gilt:

$$g^{(n-1)}(x^+, x) - g^{(n-1)}(x^-, x) = 1$$

(x^+ ist der rechtsseitige, x^- der linksseitige Grenzwert)

$g(x, \omega)$ heißt auch Einflussfunktion, weil sie den Einfluss der Störfunktion $b(\omega)$ zur Lösung $y(x)$ im Punkt x angibt.

Bemerkung zum praktischen Rechnen: Erste Bedingung impliziert, dass $g(x, \omega)$ folgende Gestalt hat:

$$g(x, \omega) = \begin{cases} c_1(\omega) \cdot \varphi_1(x) + c_2(\omega) \cdot \varphi_2(x) + \cdots + c_n(\omega) \cdot \varphi_n(x) & a \leq x \leq \omega \\ d_1(\omega) \cdot \varphi_1(x) + d_2(\omega) \cdot \varphi_2(x) + \cdots + d_n(\omega) \cdot \varphi_n(x) & \omega < x \leq b \end{cases}$$

Beispiel: Biegebalken $y''(x) = b(x)$, $0 \leq x \leq l$, RB: $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

Die Determinante D ist nicht Null, daher existiert eindeutige Lösung.

Homogene DGL $y''(x) = 0$ - Allgemeine Lösung: $y(x) = cx + d$. Daraus folgt: $y' = c$.

Ansatz Green-Funktion:

$$g(x, \omega) = \begin{cases} \int c_1(\omega)x + c_2(\omega) & 0 \leq x \leq \omega \\ \int d_1(\omega)x + d_2(\omega) & \omega < x \leq l \end{cases}$$

Randbedingungen müssen erfüllt sein, wähle ω : $0 < \omega \leq l$:

- RB $y(0) = 0$ - $x = 0$ - $c_1(\omega)x + c_2(\omega) = 0$ - $c_2(\omega) = 0$
- RB $y(l) = 0$ - $x = l$ - $d_1(\omega)l + d_2(\omega)$

Bei Stetigkeit von g wähle $x = \omega$: Daraus folgt $c_1(\omega)\omega + c_2(\omega) = d_1(\omega)\omega + d_2(\omega)$. Die Differenz zwischen rechtsseitigem und linksseitigem Grenzwert ist 1, daraus folgt:

$$g'(x, \omega) = \begin{cases} c_1(\omega), & 0 \leq x \leq \omega \\ d_1(\omega) & \omega < x \leq l \end{cases} \quad d_1(\omega) - c_2(\omega) = 1$$

$c_2(\omega) = 0$ - daher ist $c_1(\omega) = d_1(\omega) - 1$:

$$\begin{aligned} \omega(d_1(\omega) - 1) &= d_1(\omega)\omega - d_1(\omega)l \\ d_1(\omega)(\omega - \omega + l) &= \omega \quad \Rightarrow \quad d_1(\omega) = \frac{\omega}{l} \end{aligned}$$

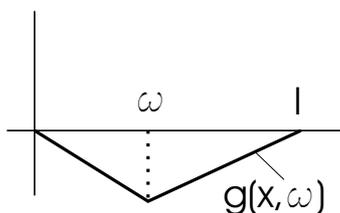


Abbildung 15: Green-Funktion

$$c_1(\omega) = d_1(\omega) - 1 = \frac{\omega}{l} - 1 = \frac{\omega - l}{l}.$$

$$d_2(\omega) = -ld_1(\omega) = -\omega$$

Somit gilt:

$$g(x, \omega) = \begin{cases} \frac{\omega-l}{l}, & 0 \leq x \leq \omega \\ \frac{\omega}{l} & \omega < x \leq l \end{cases}$$
$$y(x) = \int_0^l g(x, \omega) \cdot (-b(\omega)) d\omega$$

8 Eigenwertprobleme

Spezielle Randwertprobleme, die von einem Parameter λ abhängen. Betrachte vollhomogenes lineares RWP. Die Existenz von nichttrivialer Lösung $y(x) = 0$ hängt von der Wahl des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ (oder $\lambda \in \mathbb{R}$) ab.

Definition: Jeder Wert λ , für den das vollhomogene RWP nichttriviale Lösungen besitzt, heißt Eigenwert. Die zugehörigen nichttrivialen Lösungen $y(x)$ heißen Eigenfunktionen zum Eigenwert λ .

Anmerkung: Aus dem Alternativsatz folgt: $\det D = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert.

Beispiel: 'Knickstab' - RWP: $y''\lambda y = 0$, $y(0) = 0, y(l) = 0$. Uns interessieren die reellen Eigenwerte $\lambda > 0$ (Stab bricht).

Betrachte zunächst $\lambda = 0$. Die allgemeine Lösung der zugehörigen DGL ergibt sich aus $\alpha^2 + \lambda = 0$ mit $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$.

Die allgemeine Lösung ist somit: $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}x) & \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) & \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) \end{bmatrix}$$

$$D = R\Phi(0) + S\Phi(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}x) & \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) & \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{bmatrix}$$

$\det D = \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ - d.h. $\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Es gibt unendlich viele Eigenwerte: $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$.

Eigenfunktion: $D \cdot \vec{c} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 0$$

c_2 kann somit beliebig gewählt werden. Die zugehörige Eigenfunktion lautet somit:

$$y_k = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}l) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}l) = \mathbf{c}_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}l)$$

9 Fourier-Analysis - Fourier-Reihen

9.1 Grundlagen - periodische Funktionen

Periodische Funktion: $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

Periode $T : f(t + T) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$. Beispiel Rechtecksschwingung:

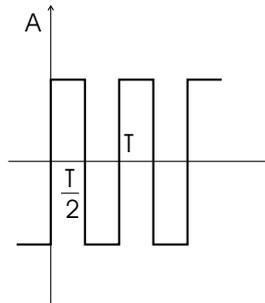


Abbildung 16: Rechtecksfunktion

Beispiel Sägezahnschwingung:

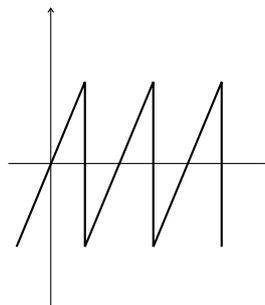


Abbildung 17: Sägezahnschwingung

Wichtig ist die genaue Kenntnis des Verlaufs von Sinus und Cosinus (s. Abb. 18, S. 51).

Idee: Wir wollen periodische Funktionen durch Überlagerung von sin- und cos-Funktion verschiedener Amplituden und Frequenzen darstellen.

$f(t)$ ist eine T -periodische Funktion. Aus $\omega := \frac{2\pi}{T}$ folgt:

$$F(x) := f\left(\frac{x}{\omega}\right) \text{ ist } 2\pi\text{-periodische Funktion}$$

Nachweis:

$$F(x + 2\pi) = f\left(\frac{x + 2\pi}{\omega}\right) = f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2\pi T}{2\pi}\right) = f\left(\frac{x}{\omega}\right) = F(x)$$

Trigonometrische Polynome. Sinus-Cosinus-Term

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{N=1}^n a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{N=1}^n a_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

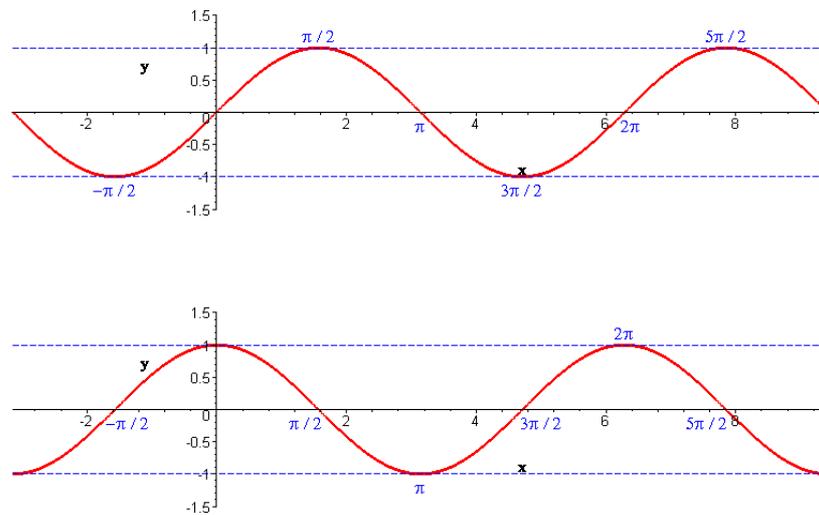


Abbildung 18: Verläufe von Sinus und Cosinus

In der Exponentialform:

$$\sum_{K=-N}^N c_K \cdot e^{i \cdot \omega \cdot k \cdot T}$$

N ist dabei der Grad des trigonometrischen Polynoms.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: Trigonometrische Polynome sind T -periodische Funktionen

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

Umrechnen zwischen beiden Formen:

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \omega \cdot k \cdot T} &= \cos(\omega \cdot K \cdot T) + i \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T) \\ \sum_{K=-N}^N c_K \cdot e^{i \cdot \omega \cdot k \cdot T} &= \sum_{K=-N}^N c_k \cdot \cos(\omega \cdot K \cdot T) + \sum_{K=-N}^N i \cdot c_k \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T) = \\ &= \sum_{K=1}^N c_k \cdot \cos(\omega \cdot K \cdot T) + c_0 + \sum_{K=1}^N c_k \cdot \cos(-\omega \cdot K \cdot T) + \sum_{K=1}^N i \cdot c_k \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T) + \\ &\quad + i \cdot \sin(0) \cdot c_0 + \sum_{K=1}^N i \cdot c_k \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T) \\ \Rightarrow \sum_{K=-N}^N c_K \cdot e^{i \cdot \omega \cdot k \cdot T} &= \underbrace{c_0}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{K=1}^N \underbrace{(c_k + c_{-k})}_{a_k} \cdot \cos(\omega \cdot K \cdot T) + \sum_{K=1}^N \underbrace{(c_k - c_{-k})}_{b_k} \cdot i \cdot \sin(\omega \cdot K \cdot T) \end{aligned}$$

Beim **Koeffizientenvergleich** erfolgt die Umrechnung $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n + c_{-n} = a_n, n \geq 1$, $c_n - c_{-n} = b_n, n \geq 1$:

$$a_n, b_n \text{ geg.} \Rightarrow c_k = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2}, c_{-k} = \frac{a_k + i \cdot b_k}{2}$$

Beispiel: Gegeben sind $\sin^3 t, \cos^3 t$. Gesucht sind trigonometrische Polynome, die diese darstellen.

$$\begin{aligned} e^{i \cdot t} &= \cos t + i \cdot \sin t \quad | x^3 \\ \cos 3 \cdot t + i \cdot \sin 3 \cdot t &= (\cos t + i \cdot \sin t)^3 = \cos^3 t + 3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t \cdot i - 3 \cdot \cos t \cdot \sin^2 t - i \cdot \sin^3 t \\ \text{Re, Im: } \cos 3 \cdot t &= \cos^3 t - 3 \cdot \cos t \cdot \underbrace{\sin^2 t}_{1 - \cos^2 t} \quad \square \\ \sin 3 \cdot t &= \underbrace{3 \cdot \cos^2 t}_{1 - \sin^2 t} \cdot \sin t - \sin^3 t \Rightarrow \dots \\ \square &= \cos^3 t - 3 \cdot \cos t + 3 \cdot \cos^3 t = 4 \cdot \cos^3 t - 3 \cdot \cos t \\ \Rightarrow \cos^3 t &= \frac{\cos 3 \cdot t + 3 \cos t}{4} \text{ trigonometr. Polynom von Grad 3} \end{aligned}$$

Frage: Gegebene T -periodische Funktion $f(t)$. Wir setzen voraus: $f(t)$ lässt sich durch trigonometrische Polynome vom Grad N darstellen. Wie bestimmt man die Koeffizienten a_n, b_n bzw. c_k ? Antwort: Mit Hilfe der **Formeln von Euler-Fourier**, d.h.:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= \frac{2}{T} \cdot \int \mathbf{f}(t) \cdot \cos(\mathbf{n} \cdot \omega \cdot t) dt \\ \mathbf{b}_n &= \frac{2}{T} \cdot \int \mathbf{f}(t) \cdot \sin(\mathbf{n} \cdot \omega \cdot t) dt \\ \mathbf{c}_k &= \frac{1}{T} \cdot \int \mathbf{f}(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t} dt \end{aligned}$$

Beweisidee: Funktion $\{1\} \cup \{\cos(n \cdot \omega \cdot t), n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{\sin(n \cdot \omega \cdot t), n = 1, 2, 3, \dots\}$ bilden ein Orthonormalsystem bezüglich:

$$\begin{aligned} (f(t), g(t)) &\mapsto \int_0^T f(t) \cdot \overline{g(t)} dt \\ \text{d.h. } \int_0^T \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt \cdot \cos(m \cdot \omega \cdot t) dt &= 0 \quad m \neq n \\ \int_0^T \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt \cdot \sin(m \cdot \omega \cdot t) dt &= 0, \quad \forall m, n \\ \text{d.h. } \int_0^T \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt \cdot \sin(m \cdot \omega \cdot t) dt &= 0 \quad m \neq n \end{aligned}$$

Analog: Funktion $\{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t}, k \in \mathbb{Z}\}$ bilden ein Orthonormalsystem, d.h.:

$$\int e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-i \cdot l \cdot \omega \cdot t} dt = \begin{cases} 0 & K \neq l \\ T & K = l \end{cases}$$

Nachteil: Trigonometrische Funktionen sind nicht immer differenzierbare Funktionen.

Definition trigonometrische Reihen:

$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{K=1}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{K=1}^{+\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

Nachteil: Reihen müssen nicht notwendigerweise konvergieren.

Eigenschaften für T -periodische Funktionen $f(t)$:

- Stückweise stetig auf Intervall $I = [a, b]$

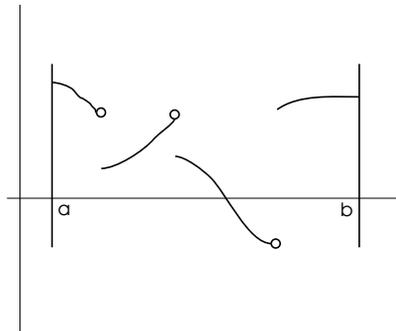


Abbildung 19: Stückweise stetige T -periodische Funktion

Stetig auf $[a, b]$ bis auf endlich viele Punkte t_1, t_2, \dots, t_n z.B. der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert $f(t^+)$ bzw. $f(t^-)$ existiert für t_1, t_2, \dots, t_n

- Stückweise stetig differenzierbar auf $I = [a, b]$. Stetig differenzierbar (differenzierbar und Ableitung stetig) bis auf endlich viele Punkte t_1, t_2, \dots, t_n , für die aber die rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwerte $f(t^+)$, $f(t^-)$, $f'(t^+)$, $f'(t^-)$ existieren.

Definition: Gegeben T -periodische Funktion $f(t)$, die stückweise stetig auf $[0, T]$ sein soll. Dann ist die Fourierreihe $S_f(t)$ von $f(t)$ definiert als trigonometrische Reihe

$$S_f(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}, \quad S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{+\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

wobei die Koeffizienten c_K bzw. a_n, b_n über die Formeln von Euler-Fourier berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= \frac{2}{T} \cdot \int \mathbf{f}(t) \cdot \cos(\mathbf{n} \cdot \omega \cdot t) dt \\ \mathbf{b}_n &= \frac{2}{T} \cdot \int \mathbf{f}(t) \cdot \sin(\mathbf{n} \cdot \omega \cdot t) dt \\ \mathbf{c}_k &= \frac{1}{T} \cdot \int \mathbf{f}(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t} dt \end{aligned}$$

Beispiel Rechtecksschwingung:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \pi \\ -1 & \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad f(t) \dots 2\pi\text{-periodisch fortges.}$$

$$\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

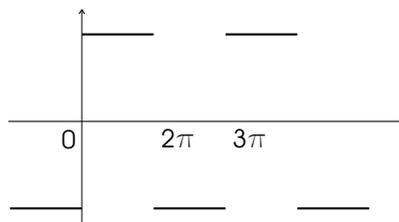


Abbildung 20: Fourier-Reihe: Rechtecksschwingung

Gesucht: Fourier-Reihe von $f(t)$ - wähle Sinus-Cosinus-Form:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^\pi 1 \, dt + \int_\pi^{2\pi} (-1) \, dt \right] = \frac{1}{\pi} \cdot [t|_0^\pi + (-t)|_\pi^{2\pi}] = \frac{1}{\pi} \cdot (\pi - 0 - 2\pi + \pi) = 0 \\
 n \geq 1 : \quad a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^\pi 1 \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \, dt - \int_\pi^{2\pi} (-1) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \, dt \right] = \\
 &\quad \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin(n \cdot t)}{n} \Big|_0^\pi - \frac{\sin(n \cdot t)}{n} \Big|_\pi^{2\pi} \right] = \\
 &\quad \frac{1}{\pi} \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin(n \cdot \pi)}{n} - \frac{\sin(0)}{n} - \frac{\sin(2 \cdot n \cdot \pi)}{n} + \frac{\sin(n \cdot \pi)}{n} \right]}_0 = 0 \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int_0^\pi 1 \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) \, dt - \int_\pi^{2\pi} (-1) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) \, dt \right] = \\
 &\quad \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{-\cos(n \cdot t)}{n} \Big|_0^\pi + \frac{\cos(n \cdot t)}{n} \Big|_\pi^{2\pi} \right] = \\
 &\quad \frac{1}{n \cdot \pi} \cdot \left[\underbrace{-\cos(n \cdot \pi)}_{\diamond} + \underbrace{\cos(0)}_1 + \cos(2 \cdot \pi \cdot n) - \cos(n \cdot \pi) \right] = \dots \\
 &\quad \diamond \quad 1, n \text{ gerade}, \quad -1, n \text{ ungerade} \Rightarrow (-1)^n \\
 \dots &= \frac{1}{n \cdot \pi} \cdot [1 - 2 \cdot (-1)^n + \underbrace{(-1)^{2 \cdot n}}_1] = \frac{2}{n \cdot \pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n \cdot \pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Fourier-Reihe von $f(t)$ lautet:

$$S_f(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3 \cdot t)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot t)}{5} + \dots \right)$$

Als **Gibbssches Phänomen** oder 'Ringing' bezeichnet man das typische Verhalten von Fourierreihen in der Umgebung von Sprungstellen. Entwickelt man eine Fourierreihe aus einer unstetigen Funktion, so ergeben sich an den Unstetigkeitsstellen typische Über- und Unterschwinger, die sich auch dann nicht verringern, wenn man versucht, die Funktion noch besser zu approximieren. Dies liegt daran, dass die Reihe an der Unstetigkeitsstelle nicht mehr gleichmäßig, sondern nur punktweise konvergiert.

Die Höhe des Überschingers in einer Richtung lässt sich bestimmen zu:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \, dt - \frac{1}{2} = 0.089490 \dots$$

womit sich ein prozentueller Fehler von 17,898%, gerundet 18%, der Sprunghöhe ergibt.

Der Effekt wurde nach seinem Entdecker, dem amerikanischen Physiker Josiah Willard Gibbs, benannt.

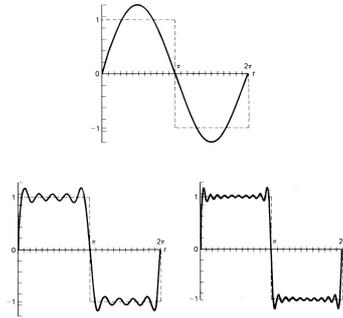


Abbildung 21: Gibb'sches Phänomen

9.2 Rechenregeln für Fourier-Reihen

$f(t)$, $g(t)$ stückweise stetige Funktionen:

$$S_f(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}, \quad S_g(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} d_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

- Linearität

$$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t) \text{ besitzt Fourier-Reihe } \sum_{K=-\infty}^{+\infty} (\alpha \cdot c_K + \beta \cdot d_K) \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

- Zeitumkehr, Konjugation

$$f(-t) \rightsquigarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}, \quad \overline{f(t)} \rightsquigarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \overline{c_K} \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

- Streckung

$$f(c \cdot t) \rightsquigarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot c \cdot \omega \cdot T} \quad c > 0$$

$$f(c \cdot T) \dots \frac{T}{c} \text{-periodische Funktion}$$

- Verschiebung im Zeitbereich

$$f(t+a) \rightsquigarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} (c_K \cdot e^{i \cdot a \cdot K \cdot \omega \cdot T}) \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

- Verschiebung im Frequenzbereich

$$e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T} \cdot f(t) \rightsquigarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_{K-n} \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

Beweis: Über Definition des Euler-Fourier-Integrals.

Satz: Betrachte $f(t)$, periodisch mit Periode T , stetig auf \mathbb{R} und stückweise stetig differenzierbar. $f(t)$ besitzt die Fourier-Reihe

$$S_f(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

\Rightarrow Fourier-Reihe $S_{f'}(t) \sim f'(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot i \cdot K \cdot \omega \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$.

Satz: Betrachte periodisch mit Periode T , stetig auf $[0, T]$, $S_f(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_K \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$.
Fourier-Reihe der Stammfunktion:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

$F(t)$ i.A. nicht mehr periodisch, nur wenn

$$\int_0^T f(t) dt = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0 \Rightarrow$$

$$S_F(t) = -\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt + \sum_{K=-\infty, K \neq 0}^{\infty} \frac{c_K}{i \cdot K \cdot \omega} \cdot e^{i \cdot K \cdot \omega \cdot T}$$

9.3 Wichtige Sätze zu Fourier-Reihen

Geg.: $f(t)$, T -periodisch $\sim S_f(t)$ - zusammengesetzt aus $g(t) \sim S_g(t), h(t) \sim S_h(t)$.

- **Eindeutigkeitssatz**

Gilt für zwei stückweise stetige Funktionen $g(t), h(t)$ mit Periode T die sog. Mittelwertigkeit

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t)$$

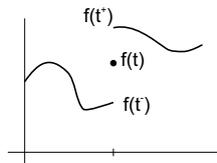


Abbildung 22: Mittelwertigkeit bei Fourier-Reihen

Falls nun $S_g(t) = S_h(t)$ so gilt $g(t) = h(t)$ -

- **Darstellungssatz (für gleichmäßige Konvergenz von $S_f(t)$)**

Geg.: Stetige, T -periodische Funktion $f(t)$, deren Fourierreihe $S_f(t)$ gleichmäßig auf $[0, T]$ konvergiert.

Dann gilt: $S_f(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$

• Darstellungssatz (für stückweise differenzierbare Funktionen)

Geg., T -periodische Funktion $f(t)$, stückweise stetig differenzierbar auf $[0, T]$. Dann gilt für die Fourier-Reihe $S_f(t)$:

– $S_f(t)$ konvergiert punktweise für alle $t \in \mathbb{R}$

–

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

d.h. $S_f(t) = f(t)$, für alle stetigen Punkte $t \in \mathbb{R}$

– Falls $f(t)$ stetig auf Intervall $I = [a, b]$ konvergiert $S_f(t)$ gleichmässig auf I

– An den Unstetigkeitsstellen von $f(t)$ tritt das Gibb'sche Phänomen auf

10 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

10.1 Grundlagen

Geg.: Diskrete periodische Funktion $f(t)$, periodisch mit Periode T , wobei wir annehmen, dass in ein Periodenintervall genau N Werte der Funktion fallen.

Weitere Annahme: Werte der Funktion an äquidistanten Stützstellen, d.h.:

$$\underbrace{f(0)}_{f_{t_0=y_0}}, \underbrace{f(1 \cdot \Delta t)}_{f_{t_1=y_1}}, \underbrace{f(2 \cdot \Delta t)}_{f_{t_2=y_2}}, \dots, \underbrace{f((N-1) \cdot \Delta t)}_{f_{t_{N-1}=y_{N-1}}}, \quad \Delta t = \frac{T}{N}$$

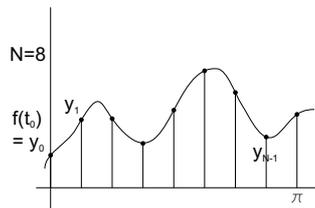


Abbildung 23: Äquidistante Stützstellen

Diese diskrete periodische Funktion ist durch N Werte (y, y_1, \dots, y_{N-1}) vollständig charakterisiert.

Def.: Gegeben sind N Werte (y, y_1, \dots, y_{N-1}) der diskreten periodischen Funktion. Dann bezeichnen wir mit

$$c_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} \cdot k \cdot j}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

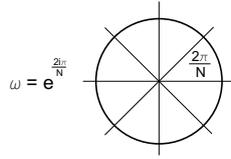
als **Spektralkoeffizienten** (oder Fourier-Koeffizienten) von (y, y_1, \dots, y_{N-1})

$$\begin{aligned} c_k &:= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{y_j}_{f(t_j)=f(j \cdot \Delta t)} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} \cdot k \cdot j} = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} f(j \cdot \Delta t) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N \cdot \Delta t} \cdot k \cdot j \cdot \Delta t} \cdot \Delta t = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{T} \cdot k \cdot \Delta t_j} \cdot \Delta t = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot k \cdot \Delta t_j} \cdot \Delta t \end{aligned}$$

Betrachte Fourier-Reihe:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot k \cdot t} dt$$

Notation: N gegeben, ω erste von 1-verschiedene N -te Einheitswurzel. Es gilt: $\omega^N = 1 = e^{2\pi i}$.

Abbildung 24: N -te Einheitswurzel

Fourier-Matrix F_N : $N \times N$ -Matrix

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Satz: Es gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = \overline{F_N} \cdot F_N = N \cdot E_N$$

E_N ist die Einheitsmatrix der Grösse $N \times N$:

$$E_N = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{F_N}$ ist die konjugierte Fourier-Matrix.

$$\overline{\omega^j} = \frac{1}{\omega^j} = \omega^{-j}$$

Betrachte \vec{c} (Spektralkoeffizienten) und \vec{y} :

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-k \cdot j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \overline{\omega^{kj}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}} &= \frac{1}{N} \cdot \overline{\mathbf{F}_N} \cdot \tilde{\mathbf{y}}. & N \cdot F_N \cdot \vec{c} &= \underbrace{F_N \cdot \overline{F_N}}_{N \cdot E_N} \cdot \vec{y} = N \cdot E_N \cdot \vec{y} = N \cdot \vec{y} \\ & & & \Rightarrow \mathbf{F}_N \cdot \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Def.: Gegeben $\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$. Dann wird durch DFT: $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ $\vec{y} \xrightarrow{\text{DFT}} \vec{c} = \frac{1}{N} \cdot \overline{F_N} \cdot \vec{y}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung beschrieben, die sog. **Diskrete Fourier-Transformation**.

Die **Inverse Fourier-Transformation** ist gegeben durch: IDFT: $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ $\vec{c} \xrightarrow{\text{IDFT}} \vec{y} = F_N \cdot \vec{c}$

$\vec{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T$ ist der Vektor der Spektralkoeffizienten von \vec{y} .

Beispiel: $\vec{y} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)^T$, Anmerkung: $N = 2M$ gerade. Gesucht: $\vec{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T$:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-kj} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{y_{2j}}_{=1} \cdot \omega^{-k \cdot 2 \cdot j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (\omega^{-k \cdot 2})^j$$

$$\text{Betrachte } \sum_{j=0}^n q^j = \begin{cases} n+1, & q=1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\omega^{-2k} = 1, \quad e^{\frac{2\pi i}{N}(-2k)} = 1$$

$$\omega^q = 1 \Leftrightarrow N|Q (\Leftrightarrow q = l \cdot N, l \in \mathbb{Z})$$

$$\omega^{-2k} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ k = \frac{N}{2} \end{cases}$$

$$\omega^{-2k} = 1 \Rightarrow c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (\omega^{-k \cdot 2})^j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} 1 = \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{2} = \frac{1}{2}, \quad \forall k=0, k = \frac{N}{2}$$

$$\omega^{-2k} \neq 1 \Rightarrow c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (\omega^{-k \cdot 2})^j = \frac{1}{N} \cdot \frac{(\omega^{-2k})^{\frac{N}{2}} - 1}{\underbrace{\omega^{-2k} - 1}_{\neq 0 \checkmark}}$$

$$\begin{aligned} \text{betrachte: } \omega^{-2k})^{\frac{N}{2}} &= \omega^{-kN} = e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot (-k \cdot N)} = e^{-2\pi i k} = 1 \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1-1}{\omega^{-2k} - 1} = 0, k \in \{0, \dots, N-1\} \setminus \{0, \frac{N}{2}\} \end{aligned}$$

10.2 Rechenregeln für DFT

DFT($\vec{y} = \vec{c} = (c_0, \dots, c_{N-1})^T$); für $\vec{y} = (y_0, \dots, y_{N-1})^T$. Periodische Funktion (y_k), wobei $y_k = y_{k+N}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

- Linearität

$$\alpha \vec{y} + \beta \vec{z} \xrightarrow{\text{DFT}} \alpha \vec{c} + \beta \vec{d}, \quad \vec{c} = \text{DFT}(\vec{y}), \vec{d} = \text{DFT}(\vec{z})$$

- Verschiebung im Zeitbereich

$$(y_{k+N})_{k \in \mathbb{Z}} \xrightarrow{\text{DFT}} (\omega^{k \cdot n} \cdot c_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \omega = e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{N}}$$

- Verschiebung im Frequenzbereich

$$(y_k \cdot \omega^{k \cdot n})_{k \in \mathbb{Z}} \xrightarrow{\text{DFT}} (c_{k-n})_{k \in \mathbb{Z}}$$

- Periodisches Faltungsprodukt

$$\vec{y} * \vec{z} = \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot z_{k-j} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\vec{y} * \vec{z} \xrightarrow{\text{DFT}} (c_k \cdot d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

Komplexitätsanalyse: Algorithmus mit $\mathcal{O}(N \log N)$, danach $\mathcal{O}(N)$.

10.3 FFT-Algorithmus

Betrachten nur IDFT: $\vec{c} \xrightarrow{\text{IDFT}} \vec{y}$, $y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot \omega^{k \cdot j}$, mit $0 \leq j \leq N-1$.

Idee: 'Die Kosten', um alle Werte (y_0, \dots, y_{N-1}) zu berechnen ist i.A. viel geringer als das N -fache einer Berechnung von z.B. y_j .

Betrachten den wichtigsten Fall, daß $N = 2^r$, $r \in \mathbb{N}$. Idee ($k = 2 \cdot m$, gerade):

$$y_j = \sum_{k=0}^{2^r-1} c_k \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^r} \cdot k \cdot j} = \sum_{m=0}^{2^r-1} c_{2 \cdot m} \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^r} \cdot 2 \cdot m \cdot j} + \sum_{m=0}^{2^r-1} c_{2 \cdot m+1} \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^r} \cdot (2 \cdot m+1) \cdot j} =$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{2^r-1} c_{2 \cdot m} \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^{r-1}} \cdot m \cdot j}}_{u(j)} + e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^r} \cdot j} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{2^r-1} c_{2 \cdot m+1} \cdot e^{\frac{2 \cdot r \cdot i}{2^{r-1}} \cdot m \cdot j}}_{v(j)}$$

- $u(j)$ ist Element der IDFT von den geraden Koeffizienten $([c_0, c_2, \dots, c_{N-2}])$
- $v(j)$ ist Element der IDFT von den ungeraden Koeffizienten $([c_1, c_3, \dots, c_{N-1}])$

Einziges Problem: IDFT $[c_0, c_2, \dots, c_{N-2}]$ liefert nur $\frac{N}{2}$ Werte, analog IDFT $[c_1, c_3, \dots, c_{N-1}]$; d.h. erhalte y_j zunächst für Werte $0 \leq j \leq 2^{r-1} - 1$.

Problem ist leicht zu lösen, weil $u(j)$ und $v(j)$ periodisch mit der Periode $\frac{N}{2} = 2^{r-1}$ sind, d.h. (bitte nachrechnen!):

- $u(j + 2^{r-1}) = u(j)$
- $v(j + 2^{r-1}) = v(j)$

Allgemeine FFT: Um die diskrete Fouriertransformation durchzuführen, genügt es, den Vektor f mit der $N \times N$ -Matrix F_N zu multiplizieren. Dies erfordert (neben den Additionen) N^2 Multiplikationen, für große N ein zu hoher Aufwand. Die schnelle Fouriertransformation beruht darauf, dass man im Fall $N = 2^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ nur $d \cdot N = N \cdot \log_2(N)$ Multiplikationen benötigt, wenn man gewisse Symmetrien ausnutzt. Dies machen wir uns am Beispiel $d = 2$ klar. Dann ist

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{4}\right) = \exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = i.$$

Es ergibt sich für $k = 0, \dots, 3$

$$\hat{f}_k = f_0 + f_1 i^k + f_2 i^{2k} + f_3 i^{3k} = f_0 + f_2 (i^2)^k + i^k (f_1 + f_3 (i^2)^k).$$

Wir setzen $g = (f_0, f_2)^t$ und $u = (f_1, f_3)^t$. Dann lässt sich die Gleichung für \hat{f}_k umformen. Für $k \leq 1 = N/2 - 1$ gilt

$$\hat{f}_{k,N} = \hat{g}_{k,N/2} + i^k \hat{u}_{k,N/2}.$$

(Wir haben dabei durch den zusätzlichen Index N bzw. $N/2$ angedeutet, dass es sich um eine diskrete Fouriertransformation im \mathbb{C}^N bzw. $\mathbb{C}^{N/2}$ handelt.) Für $k = 2$ bzw. 3 sei $k' = k \bmod N/2$. Dann ist $\hat{f}_{k,N} = \hat{g}_{k',N/2} + i^k \hat{u}_{k',N/2}$. Wir haben also Fouriertransformationen in $\mathbb{C}^{N/2}$ und eine anschließende "Zusammensetzung" erhalten. Allgemein ergibt sich das folgende rekursive Schema:

$$g(f) = (f_0, f_2, f_4, \dots, f_{N-2}), u(f) = (f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$$

$$\hat{f}_{k,N} = \widehat{g(f)}_{k \bmod N/2, N/2} + \overline{\omega}^k \widehat{u(f)}_{k \bmod N/2, N/2} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Die Rekursion kann man $d = \log_2(N)$ mal aufrufen. Pseudocode s. Abb.25, S.63.

Komplexitätsanalyse:

$M(r)$ sei die Anzahl der komplexen Multiplikationen im FFT eines Vektors der Länge $N = 2^r$:

$$M(r) = 2^r + 2 \cdot M(r-1), \quad r > 1$$

$$M(0) = 0, \quad \frac{M(r)}{2^r} = M\left(\frac{r-1}{2^{r-1}}\right) + 1 = r - \underbrace{M(0)} = 0$$

$$M(r) = r \cdot 2^r = N \cdot \log_2 N = \mathcal{O}(N \cdot \log N)$$

```

FUNCTION FFT(  $f, d, \omega$  )
  *  $f \in \mathbb{C}^{2^d}$ ,  $d \in \mathbb{N}_0$ ,  $\omega = \exp(-2\pi i/2^d)$  *
   $N := 2^d$ ;

  IF (N=1) THEN     $\hat{f} = f$  ;
                    ELSE   $M := N/2$ ;
                           $g := (f_{2k})_{0 \leq k \leq M-1}$  ;
                           $u := (f_{2k+1})_{0 \leq k \leq M-1}$  ;
                           $h_1 := \text{FFT}(g, d-1, \omega^2)$  ;
                           $h_2 := \text{FFT}(u, d-1, \omega^2)$  ;
                          FOR  $j = 0$  TO  $M-1$  DO
                             $\hat{f}_j := h_{1,j} + \omega^j h_{2,j}$  ;
                             $\hat{f}_{j+M} := h_{1,j} + \omega^{M+j} h_{2,j}$  ;
                          END; * FOR *
                    END; * ELSE *
  END; * IF *
AUSGABE  $\hat{f}$  .

```

Abbildung 25: FFT-Pseudocode

10.4 Beispiele für Anwendung der DFT

10.4.1 Approximation der Fourier-Koeffizienten einer Fourier-Reihe

Betrachten $2r$ -periodische Funktion $f(t)$.

Auswerten an den Stützstellen $f(\frac{2\pi}{N}, j)$, $0 \leq j \leq N - 1$:

$$\Rightarrow (y_0, y_1, \dots, \underbrace{y_j}_{\frac{2r}{N}}, \dots, y_{N-1}) = y$$

Betrachte $\vec{c} = (c_0, \dots, c_{N-1}) = \text{DFT}(y)$.

Betrachte N -periodische Fortsetzung (c_k) .

Es gilt: c_k für $-\frac{N}{2} \leq l \leq \frac{N}{2}$ sind eine gute Approximation für Fourier-Koeffizienten der Fourier-Reihe von $f(t)$.

10.4.2 Trigonometrische Interpolation

Gegeben sind Werte $(y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) = \vec{y}$.

Gesucht ist ein trigonometrisches Polynom von kleinstem Grad

$$\sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot t},$$

sodass dieses an den Stützstellen $\frac{2\pi}{N} \cdot j$ genau die Werte y_j annimmt.

Falls N ungerade ist, so ist das trigonometrische Polynom eindeutig bestimmt und es gilt dann $N = 2n + 1$.

Einsetzen der Werte an den Stützstellen liefert N Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{k=-n}^n c_k \cdot \omega^{k \cdot j}, & 0 \leq j \leq 2n, \omega &= e^{\frac{2\pi i}{N}} \\ y_j &= \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{(k-n) \cdot j} = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{kj} \cdot \omega^{-nj} \\ \Rightarrow \omega^{nj} \cdot y_j &= \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{kj}, & 0 \leq j \leq 2n = N - 2 \\ &\Rightarrow (\omega^{nj} \cdot y_j)_{j \in \mathbb{Z}} = \text{IDFT}(c_{k-n}) \\ &\Rightarrow c_{k-n} = \text{IDFT}((\omega^{nj} \cdot y_j)_{j \in \mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

Liefert schließlich $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n, c_{n+1}, \dots, c_{2n}) = \text{DFT}(y_0, y_1, \dots, y_{2n})$.

11 Fourier(\mathcal{F} -)Transformation

11.1 Grundlagen

Gegeben: Funktion $f(t)$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Falls der Cauchy-Hauptwert

$$\mathcal{F}\{f(t)\} := F(\omega) := (\text{CHW}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, dann heißt $F(\omega)$ die Fourier-Transformierte oder **Spektralfunktion** von $f(t)$. $f(t)$ liegt im Zeitbereich (= Originalbereich), $F(\omega)$ liegt im Frequenzbereich (= Bildbereich).

Definition: Geg. ist eine Funktion $f(t)$. Der Cauchy-Hauptwert $(\text{CHW}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ ist folgendermassen definiert:

$$(\text{CHW}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(t) dt$$

Beispiel: $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$, $\int_{-N}^N f(t) dt = 0$, $\forall N$:

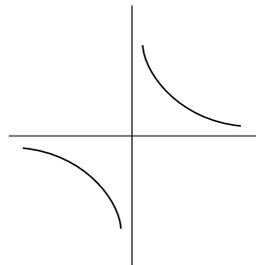


Abbildung 26: Fourier-Transformation: $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$

Anmerkung: Falls für die Funktion $f(t)$ das uneigentliche Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ existiert, dann existiert auch $(\text{CHW}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ und es gilt: $(\text{CHW}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathcal{F}\{\mathbf{f}(\mathbf{t})\} = (\text{CHW}) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{t}) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot \mathbf{t}} d\mathbf{t}$$

Beispiel Rechteckfunktion:

$$\begin{aligned} \square(t) &= \begin{cases} 0, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \\ \mathcal{F}\{\square(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \square(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \\ &= \frac{1}{-i\omega} (\cos(-\omega) + i \sin(-\omega) - \cos(\omega) - i \sin(\omega)) = \frac{2 \sin \omega}{\omega} \\ &\quad \omega \neq 0, (\omega = 0 \Rightarrow F(0) = 2) \end{aligned}$$

Beispiel Spaltfunktion:

$$\text{sinc}(x) = \text{si}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Die Spaltfunktion ist die Fouriertransformierte der Rechteckfunktion

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \chi_{[-\tau/2, \tau/2]}(t) := \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

denn es gilt

$$\mathcal{F}(\chi_{[-\tau/2, \tau/2]})(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Wichtige Frage: Wann existiert die \mathcal{F} -Transformation der Funktion $f(t)$?

Definition: Eine Funktion $f(t)$ heisst **absolut integrierbar**, wenn sie in jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist und wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Satz: Falls eine Funktion $f(t)$ absolut integrierbar ist, dann existiert die \mathcal{F} -transformierte $F(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$; $F(\omega)$ ist stetig und beschränkt.

Ergänzungen zum Begriff 'absolut integrierbar': Die Behauptung, dass bei einer absolut integrierbaren Funktion $f(t)$ gelte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

ist i.A. falsch.

Damit diese Behauptung gilt, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. $f(t)$ absolut integrierbar
2. $f(t)$ stetig
3. $f'(t)$ absolut integrierbar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)| dt = c \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) dt = \check{c}$$

4. $f(t)$ stückweise stetig differenzierbar.

Dan gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$.

Allgemein gilt:

$$|f(t)| = f'_+(t) + |f'_-(t)|$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \check{c}$$

Weiters gilt die Plancherel-Gleichung (Energiegleichung). Der parsevalschen Gleichung für die Fourierreihe entspricht eine Identität der Fouriertransformation, die gemeinhin als Satz von Plancherel bezeichnet wird:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Satz: **Fourier-Integraltheorem:** Ist die Funktion $f(t)$ absolut integrierbar und ist $f(t)$ auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\frac{f(t)^+ f(t)^-}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Anmerkung: Falls $f(t)$ stetig ist gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(-\omega)\}$$

11.2 Umkehr- und Eindeutigkeitsatz

Gilt für eine Funktion $f(t)$

- $f(t)$ ist absolut integrierbar
- $f(t)$ ist auf endlichen Intervallen stückweise stetig differenzierbar
- $f(t)$ ist Mittelwerteigenschaft $f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$

Dann gilt, dass neben $f(t)$ auch $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ \mathcal{F} -transformierbar ist, und es gilt:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(-\omega)\} = \frac{1}{2\pi} (\text{CHW}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot F(\omega) d\omega$$

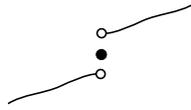


Abbildung 27: Mittelwerteigenschaft der Fourier-Transformation

11.3 Rechenregeln für die \mathcal{F} -Transformation

$f(t), g(t)$ seien absolut integrierbare Funktionen; $F(\omega), G(\omega)$ entsprechende Spektralfunktionen:

- Linearität:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\} = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

- Streckung:

$$\mathcal{F}\{f(c \cdot t)\} = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad c \neq 0$$

- Verschiebung im Zeitbereich:

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-ia\omega} F(\omega), \quad a \in \mathbb{R}$$

- Verschiebung im Frequenzbereich:

$$\mathcal{F}\{e^{i\Omega t} f(t)\} = F(\omega - \Omega), \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

- Differentiation im Zeitbereich:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$$

Voraussetzung; $f(t)$ stetig, $f'(t)$ \mathcal{F} -transformierbar

- Differentiation im Frequenzbereich:

$$\mathcal{F}\{t \cdot f(t)\} = i \cdot F'(\omega)$$

Voraussetzung; $t \cdot f(t)$ ist \mathcal{F} -transformierbar

- Faltungsprodukt $f(t) * g(t)$

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

- Faltung:

$$\mathcal{F}\{f * g\} = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

- Konjugation:

$$\mathcal{F}\{\overline{f(t)}\} = \mathcal{F}(-\omega)$$

- Symmetrien:

$$\begin{aligned} f(t) = f(-t) &\Leftrightarrow F(\omega) = F(-\omega) \\ f(t) = -f(-t) &\Leftrightarrow -F(\omega) = F(-\omega) \end{aligned}$$

11.4 Anwendung der \mathcal{F} -Transformation

11.4.1 Hilfsmittel zum Lösen von DGL

Anmerkung: i.A. ist \mathcal{L} -Transformation vorzuziehen. Ein Beispiel von Bedeutung: Lösen bestimmter PDGen, z.B. Wärmeleitungsgleichungen, z.B.:

<http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs19/seite40.html>

11.4.2 Lösen von Integralgleichungen

Die im Gegensatz zur \mathcal{L} -Transformation andere Form des Faltungsproduktes ermöglicht die Lösung von Integralen vom Fredholm-Typ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t - \tau)x(\tau) d\tau - \lambda x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Wenn alle Funktionen absolut integrierbar sind, lautet die Gleichung für die zugehörigen Spektralfunktionen:

$$K(\omega)X(\omega) - \lambda X(\omega) = F(\omega)$$

Wenn $x(t)$ dem Umkehr und Eindeutigkeitssatz genügt, erhält man die Lösung $X(\omega)$ dieser Gleichung mit der inversen \mathcal{F} -Transformation als Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{K(\omega) - \lambda} e^{i\omega t} d\omega$$

11.4.3 Nachrichtentechnik

Betrachten idealen 'Tiefpassfilter':



Abbildung 28: Tiefpassfilter

Wirkung eines Filters: Für ein periodisches Eingangssignal wird nur die Amplitude des Signals verändert, aber die Frequenz unverändert gelassen.

Idealer Tiefpassfilter: Alle Frequenzen $|\omega| > \Omega$ werden gesperrt, aber alle Frequenzen $|\omega| \leq \Omega$ werden unverändert durchgelassen,

Betrachten Spektralbereich:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}, G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$$

Wirkung: $G(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega)$. Dabei ist $H(\omega)$ die Übertragungsfunktion für den idealen Tiefpassfilter;

$$H(\omega) := \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega \\ 0, & |\omega| > \Omega \end{cases}$$

Betrachte $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$. Im Zeitbereich liefert dies:

$$\begin{aligned} g(t) &= g(t) * f(t) \\ h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \cdot H(\omega) \, d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} 1 e^{i\omega t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{it} \Big|_{-\Omega}^{\Omega} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{it} = \frac{1}{2\pi it} (i(\sin(\Omega t) + \sin(\Omega t))) = \\ &= \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t} = \frac{\Omega}{\pi} \cdot \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} = \\ &= \frac{\Omega}{\pi} \cdot \sin(\Omega t) \end{aligned}$$

$\sin(\Omega t)$ ist die Spaltfunktion. Daraus folgt weiter:

$$g(t) = \frac{\Omega}{\pi} \cdot \sin(\Omega t) * f(t)$$

12 Partielle Differentialgleichungen (PDG)

Eine Gleichung der Form

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_x, \dots, \frac{d^m}{dx_1^{m_1} x_1^{m_2} \dots x_1^{m_m}} u) = 0$$

in der neben der unbekannteten Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ auch partielle Ableitungen vorkommen heißt PDG.

Ordnung der PDG; Die größte $m := m_1 + \dots + m_n$ heißt Ordnung der PDG,

Definition: Eine Funktion $u : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung der DGL, wenn die m -ten Ableitungen von n existieren und u auf G die obige DGL erfüllt.

Anmerkung: Die Lösungen $u(x, y)$ einer PDG in 2 Variablen sind Flächen in \mathbb{R}^3 . (Lösungsflächen, Integralflächen).

12.1 PDGen, die sich wie gewöhnliche DGLen behandeln lassen

Die einzige Schwierigkeit besteht darin, dass die Integrationskonstanten i.A. von allen übrigen Variablen abhängen.

Beispiel: Gegeben $u(x, y)$:

- $u_{xx} = 0 \Rightarrow u_x = c(y)$. Daraus folgt weiter nach $\int dx$: $c(y)x + d y$.

Dabei ist $d y$ eine beliebige, differenzierbare Funktion.

- $u_{xy} = 0$. Daraus folgt weiter nach $\int dy$: $u_x = \check{c}(x)$. Daraus folgt weiter nach $\int dx$: $c(x) + d y$.

Dabei ist $\check{c}(x)$ eine beliebige Funktion.

12.2 Lineare PDG 1. Ordnung mit Konstanten Koeffizienten

2 Variablen, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$au_x + bu_y = f(x, y)$$

Idee: geeignete Variablensubstitution, so dass gewöhnliche DGL entsteht:

$$\begin{aligned} \xi &= bx + ay, & \eta &= bx - ay \\ x &= \frac{\xi + \eta}{2b}, & y &= \frac{\xi - \eta}{2a} \\ (x, y) &\mapsto (\xi, \eta), & U(\xi, \eta) &= u\left(\frac{\xi + \eta}{2b}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) = u(x, y), \\ F(\xi, \eta) &:= f\left(\frac{\xi + \eta}{2b}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) = f(x, y) \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Kettenregel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 F(\xi, \eta) &= au_x + bu_y = a(U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + b(U_\xi + \xi_y + U_\eta \eta_y) = \\
 &a(U_\xi b + U_\eta b) + b(U_\xi a + U_\eta(-a)) = abU_\xi + abU_\eta + abU_\xi - abU_\eta = 2abU_\xi \\
 &\Rightarrow U_\xi = \frac{1}{2ab} \cdot F(\xi, \eta) \\
 &\Rightarrow U(\xi, \eta) = \frac{1}{2ab} \int F(\xi, \eta) d\xi + G(\eta) \\
 &\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2ab} \int F(\xi, bx - ay) d\xi + G(\eta) \\
 &\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2ab} \int_{bx_0+ax_0}^{bx+ay} F(\xi, bx - ay) d\xi + G(\eta)
 \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 2u_x + 3u_y &= e^{x+y} \\
 \xi &= 3x + 2y, \quad \eta = 3x - 2y, \quad x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad y = \frac{\xi - \eta}{2} \\
 U_\xi &= \frac{1}{12} F(\xi, \eta) = \frac{1}{12} e^{\frac{4+\eta}{6} + \frac{\xi-\eta}{6}} = \frac{1}{12} e^{\frac{5}{12}\xi - \frac{1}{12}\eta} \\
 \Rightarrow U(\xi, \eta) &= \frac{1}{12} \int e^{\frac{5}{12}\xi - \frac{1}{12}\eta} d\xi + G(\eta) = \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{12}\eta} \int e^{\frac{5}{12}\xi} d\xi + G(\eta) = \\
 &\frac{1}{12} e^{-\frac{1}{12}\eta} \frac{e^{\frac{5}{12}\xi}}{\frac{5}{12}} + G(\eta) = \frac{1}{5} e^{\frac{5}{12}\xi - \frac{1}{12}\eta} + G(\eta) = \\
 &\frac{1}{5} e^{x+y} + G(3x - 2y)
 \end{aligned}$$

G ist eine beliebig differenzierbare Funktion.

12.3 Eindimensionale Schwingungsgleichung (Wellengleichung)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} = f(x, t)$$

u_{tt} ist Auslenkung (Elongation) der Saite zum Zeitpunkt t an der Stelle x .

c^2 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

$f(x, t)$ bezeichnet den Einfluss der äusseren Kräfte.

Geeignete Substitution: $\xi = x - ct$, $\tau = x + ct$. Daraus folgt weiter: $x = \frac{\xi + \tau}{2}$, $t = \frac{\xi - \tau}{2}$:

$$\begin{aligned}
 U(\xi, \tau) &= u\left(\frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\xi - \tau}{2}\right) = u(x, t) \\
 F(\xi, \tau) &= f(x, t) \\
 U_t &= U_\xi \cdot \xi_t + U_\tau \cdot \tau_t = U_\xi(-x) + U_\tau c = -cU_\xi + cU_\tau \\
 u_{tt} &= (-cU_\xi + cU_\tau) = -c(U_{\xi\xi}\xi_t + U_{\tau\xi}\tau_t) + c(c(U_{\tau\xi}\xi_t + U_{\tau\tau}\tau_t)) = \\
 &= -c(U_{\xi\xi}(-c) + U_{\tau\xi}c) + (U_{\tau\xi}(-c) + U_{\tau\tau}c) = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\tau\xi} + U_{\tau\tau}) \\
 U_x &= U_\xi\xi_x + U_\tau\tau_x = U_\xi + U_\tau \\
 U_{xx} &= U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\tau\tau}\tau_x + U_{\tau\xi}\xi_x + U_{\tau\xi}\tau_x = U_{\xi\xi} + 2U_{\tau\xi} + U_{\tau\tau} \\
 F(\xi, \tau) &= u_{tt} - c^2u_{xx} = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\tau\xi} + U_{\tau\tau}) - c^2(U_{\xi\xi} + 2U_{\tau\xi} + U_{\tau\tau}) = -4c^2U_{\tau\xi} \\
 &\Rightarrow U_{\tau\xi} = -\frac{1}{4c^2}F(\xi, \tau)
 \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL:

$$\Rightarrow U(\xi, \tau) = -\frac{1}{4c^2} \int \int F(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau$$

Dies ergibt eine Partikulärlösung. Die allgemeine Lösung setzt sich aus der Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer Partikulärlösung zusammen (Summe).

$$\begin{aligned}
 U_{\tau\xi} &= 0 \Rightarrow \int d\tau \Rightarrow U_\xi \check{\psi}(\xi) \\
 &\Rightarrow \int \check{\psi} \, d\xi + \varphi(\tau) = U(\xi, \tau) = \varphi(\tau) + \psi(\xi) \\
 u(x, t) &= \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)
 \end{aligned}$$

Das ist die Lösungsformel von d'Alembert (Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen).

12.4 Lineare PDG 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
 &a_1(x_1, \dots, x_n)u_{x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n)u_{x_2} + \dots + \\
 &+ a_n(x_1, \dots, x_n)u_{x_n} + c(x_1, \dots, x_n)u + d(x_1, \dots, x_n) = 0 \\
 &a_1(\vec{x})u_{x_1} + a_2(\vec{x})u_{x_2} + \dots + a_n(\vec{x})u_{x_n} + c(\vec{x})u + d(\vec{x}) = 0
 \end{aligned}$$

Für Funktion $u = u(x_1, \dots, x_n)$.

Sonderfall: $c = d = 0$ - 'Rumpf'-DGL:

$$a_1(x_1, \dots, x_n)u_{x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n)u_{x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)u_{x_n} = 0$$

Betrachten in Systemen von linearen DGL 'gekoppelte' Grössen $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, beschrieben durch ein System von DGL:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2(t) &= v_2(t, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= v_n(t, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(t, \vec{x})$$

Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Systeme: Wenn das Vektorfeld $\vec{v}(t, \vec{x})$ für alle $a < t < b$ und für alle \vec{x} im Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig partiell nach x_1, \dots, x_n differenzierbar ist, dann besitzt das AWP

$$\dot{\vec{c}}(t) = \vec{v}(t, \vec{x}), \quad \vec{c}(t_0) = \vec{x}_0$$

genau eine (maximale) Lösung.

Betrachten autonomes DGL-System (hängt nicht von t ab) und setzen voraus, dass $\vec{v}(\vec{x})$ stetig nach x_1, \dots, x_n partiell differenzierbar ist für $\vec{x} \in D$:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$$

Nach dem EE-Satz gibt es für jedes $\vec{a} \in D$ eine Lösungskurve, die für $t = 0$ durch \vec{a} geht. 'Notation'

$$\vec{x}(t) = \Phi(t, \vec{a})$$

Dabei ist $\Phi(t, \vec{a})$ die Lösungskurve.

Definition: Eine Funktion $u : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **erstes Integral (=Invariante)** des DGL-Systems $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$, falls $u(\vec{a}) = u(\Phi(t, \vec{a}))$ für alle $\vec{a} \in D$, d.h. u ist konstant entlang jeder Lösungskurve:

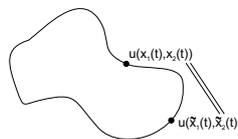
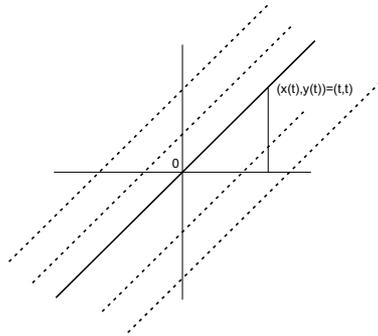


Abbildung 29: Erstes Integral

Beispiel: $\dot{x} = 1, \dot{y} = 1, x(0) = 0, y(0) = 0$. Lösen $x(t) = t + c$ und ergibt $c = 0$ (wegen $x(0) = 0$) und daraus $x(t) = t$. Analog $y(t) = t$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Abbildung 30: Erstes Integral $x(t) = t$

Behauptung: $y - x$ ist erstes Integral. $u(x(t), y(t)) = t - t = 0$.

Allgemein gilt:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = t + d - (t + c) = d - c = \text{const.}$$

'Methode' zum Finden eines möglichst allgemeinen ersten Integrals:

$$\text{System der Phasen-DGL } (n-1) \quad \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{v_1(\vec{x})}{v_n \vec{x}}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{v_{n-1}(\vec{x})}{v_n \vec{x}}$$

Aus den ersten $n-1$ Gleichungen gewonnen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2(t) &= v_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= v_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Annahme: $v_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Nach dem Hauptsatz impliziter Funktionen lösen wir x_n nach t auf, d.h. $t = x_n(t)$.

Nun ersetzen wir t überall durch x_n und erhalten:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(x_n(t)) = x_1 \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= x_{n-1}(x_n(t)) = x_{n-1} \end{aligned}$$

Ergibt allgemeine Lösung mit frei wählbaren Parametern c_1, \dots, c_{n-1} :

$$\begin{aligned} x_1(x_n) &= g_1(x_n, c_1, \dots, c_{n-1}) \\ x_2(x_n) &= g_2(x_n, c_1, \dots, c_{n-1}) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(x_n) &= g_{n-1}(x_n, c_1, \dots, c_{n-1}) \end{aligned}$$

Weiter gilt: Wir können nach c_1, \dots, c_{n-1} auflösen:

$$\begin{aligned} c_1 &= \varphi_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ c_2 &= \varphi_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ c_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

Es gilt: $\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\vec{x})$ sind unabhängige erste Integrale von $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}(t))$.

Allgemein gilt: $\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_k(\vec{x})$ sind erste Integrale - dann ist

$$F(\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_k(\vec{x}))$$

erstes Integral für jede k -stellige, differenzierbare Funktion.

Beispiel: $u(x, y) = y - x = \text{const.}$: Daraus folgt dass

$$F(\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\vec{x}))$$

i.A. ein erstes Integral von $\vec{x}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t))$.

Weiteres Beispiel: Gegeben sei die Rumpf-DGL

$$a_1(\vec{x})u_{x_1} + a_2(\vec{x})u_{x_2} + \dots + a_n(\vec{x})u_{x_n} = 0$$

begründet folgendes charakteristische DGL-System für eine Rumpf-DGL $\vec{a}(a_1, \dots, a_n)^T$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_1(\vec{x}) \\ \dot{x}_2(t) &= a_2(\vec{x}) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_n(\vec{x}) \end{aligned}$$

Dieses System kann man kürzer mit $\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x})$ anschreiben.

Es gilt folgender Satz: Sei $U \in G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, nach x_1, \dots, x_n differenzierbare Funktion. Dann gilt, dass $u(x_1, \dots, x_n)$ ist eine Lösung der Rumpf-DGL und ist erstes Integral des charakteristischen DGL-Systems.

Beispiel: $yu_x = xu_y$ - setzen $y = x$ und $x = y$ und erhalten nach $\dot{x} = y$ und $\dot{y} = x$ die trennbare Phasen-DGL:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} = x &\quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} &\quad \Rightarrow \quad x dx = y dy \\ \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c_1 &\quad \Rightarrow \quad c_1 = \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}_{\varphi(x,y)} = \text{const.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Allgemeines erstes Integral:} \quad F(\varphi_1(x, y)) = F\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)$$

Die allgemeine Lösung lautet: $u(x, y) = F\left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)$.

Allgemein für $n = 2$:

$$\begin{aligned}
 & a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + cu + d = 0 \\
 & \text{Subst. } (x, y) \mapsto (\xi, \eta) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) \\
 & u(x, y) = U(\xi, \eta), a(x, y) = A(\xi, \eta), b(x, y) = B(\xi, \eta) \\
 & u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x \\
 & u_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y \\
 & A(\xi, \eta)(U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x) + B(\xi, \eta)(U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y) + c(\xi, \eta)U + D(\xi, \eta) = 0 \\
 & \underbrace{(A\xi_x + B\xi_y)}_{\blacktriangledown} U_\xi + (A\eta_x + B\eta_y)u_\eta + CU + D = 0
 \end{aligned}$$

Wählen in \blacktriangledown ξ so, dass $A\xi_x + B\xi_y = 0$ (zugehörige Rumpf-DGL) - da dieser Term dann wegfällt entsteht eine gewöhnliche DGL.

η kann beliebig gewählt werden in Hinblick auf:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Abbildungsverzeichnis

1	Lokale Lösung des Anfangswertproblems	2
2	Richtungsfeld, Eulersches Polygonzugverfahren	3
3	Rechtecksbereich D liegt vollständig in Gebiet G	4
4	Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten	6
5	Stetige Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite	7
6	Approximative Lösung durch Näherung	15
7	Optimale Schrittweite	17
8	Dämpfung und Verschiebung	33
9	Heavisidische Sprungfunktion	33
10	\mathcal{L} -Transformation der Rechteckperiode T , Amplitude A	33
11	RCL-Schwingkreis	38
12	Biegemoment und Biegesteifigkeit beim Biegebalken	41
13	Biegebalken: RWA-Träger fest aufliegend	41
14	Biegebalken: RWA - Biegebalken an Enden eingespannt	42
15	Green-Funktion	47
16	Rechtecksfunktion	50
17	Sägezahnschwingung	50
18	Verläufe von Sinus und Cosinus	51
19	Stückweise stetige T -periodische Funktion	53
20	Fourier-Reihe: Rechtecksschwingung	54
21	Gibb'sches Phänomen	56
22	Mittelwerteigenschaft bei Fourier-Reihen	57
23	Äquidistante Stützstellen	59
24	N -te Einheitswurzel	60
25	FFT-Pseudocode	64
26	Fourier-Transformation: $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$	66
27	Mittelwerteigenschaft der Fourier-Transformation	69
28	Tiefpassfilter	70
29	Erstes Integral	75
30	Erstes Integral $x(t) = t$	76

Literaturverzeichnis

Als Literatur zur Vorlesung wurde empfohlen: MEYBERG UND VACHENAUER, *Höhere Mathematik 2*, 4. Auflage, Springer, Berlin 2001.

Sehr hilfreich war für mich weiters folgendes Buch: ERWIN KREYSZIG. *Advanced Engineering Mathematics*, 9. Auflage, Wiley & Sons, 2005, ISBN: 978-0471728979