4.0 VU Theoretische Informatik und Logik Teil 1 SS 2015 22. Juni 2015			
Matrikelnummer	Familienname Lösung	Vorname	Gruppe A

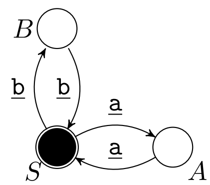
1.) Sei $\Sigma = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}$ und $G = \langle\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to Saa \mid a \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}\} \cup \{S \to \varepsilon\}, S\rangle$.

a) Geben Sie die von G erzeugte reguläre Sprache L an. **(2 Punkte)**

Lösung: $L = (\{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{a}}\}^* \cup \{\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\}^*)^*$

b) Geben Sie einen zu G äquivalente reguläre Grammatik an. **(3 Punkte)**

Lösung: Aus z.B.

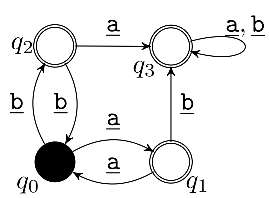


erhalten wir folgende reguläre Grammatik G':

$G' = \{\{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \{S \to \varepsilon | \underline{\mathtt{a}}A | \underline{\mathtt{b}}B, A \to \underline{\mathtt{a}}S, B \to \underline{\mathtt{b}}S\}, S\}$

c) Geben Sie einene deterministischen endlichen Automaten an, der $\overline{L}$ (also das Komplement von L) akzeptiert. (Graphische Darstellung genügt.) **(3 Punkte)**

Lösung:



2.) Sei $L = \{\underline{\mathtt{a}}^i \underline{\mathtt{b}}^j \underline{\mathtt{c}}^k \underline{\mathtt{d}}^l \mid i, j, k, l \geq 0, i = j \text{ und } k = l\}$.

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger, dass L kontextfrei ist, indem Sie eine entsprechende Sprache D_n und eine reguläre Menge R sowie einen entsprechenden Homomorphismus h so angeben, dass gilt: $L = h(D_n \cap R)$.
(D_n bezeichnet eine Dyck-Sprache über n verschiedenen Klammerpaaren.)
(4 Punkte)

Lösung:

L ist kontextfrei, da $L = h(D_2 \cap R)$, wobei $R = \{\underline{(}\}^*\{\underline{)}\}^*\{\underline{[}\}^*\{\underline{]}\}^*$ und

$h : \{\underline{(}, \underline{)}, \underline{[}, \underline{]}\}^* \longrightarrow \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}^*$ mit $h(\underline{(}) = \underline{\mathtt{a}}, \quad h(\underline{)}) = \underline{\mathtt{b}}, \quad h(\underline{[}) = \underline{\mathtt{c}}, \quad h(\underline{]}) = \underline{\mathtt{d}}$

b) Ist das Wortproblem für L entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

Lösung: Da L kontextfrei ist, und $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_{rec}$ ist das Wortproblem für L natürlich entscheidbar.

3.) Beweisen oder widerlegen Sie:

Es ist nicht entscheidbar, ob das Komplement einer rekursiven Sprache regulär ist.

(6 Punkte)

Lösung: Es geht um die Eigenschaft $P = \{L \mid L \in \mathcal{L}_{rec} \text{ und } \overline{L} \in \mathcal{L}_3\}$.
Diese ist nicht trivial, da z.B. $\{\underline{\mathtt{a}}\}^* \in P$ aber $\{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n \mid n \geq 0\} \notin P$.
Somit ist P nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

4.) Über die vier Sprachen A, B, C, D wissen wir Folgendes:

- A ist in **NP**.
- B ist NP-vollständig.
- C ist entscheidbar.
- D ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar.

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie

- *jedenfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis D handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *vielleicht* zutrifft (je nach dem worum es sich bei A bis D handelt, und/oder abhängig von der Lösung bisher unbewiesener Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)
- *keinesfalls* zutrifft (unabhängig davon, um welche Probleme es sich bei A bis D handelt, und auch unabhängig von (noch) unbewiesenen Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen)

Begründen Sie Ihre Antwort.

- D kann auf C reduziert werden ($D \leq C$).
  Begründung: ☐ jedenfalls ☒ keinesfalls ☐ vielleicht

  Lösung: Dies würde beweisen, dass D entscheidbar ist.
- B kann in polynomieller Zeit auf A reduziert werden ($B \leq_p A$).
  Begründung: ☐ jedenfalls ☐ keinesfalls ☒ vielleicht

  Lösung: A könnte auch NP-vollständig sein. Wäre allerdings A in P, so hätten wir damit einen Beweis für $P = NP$.

(4 Punkte)

5.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Ist L eine formale Sprache, so gibt es eine unbeschränkte Grammatik, die L erzeugt.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: Nicht jede formale Sprache ist rekursiv aufzählbar.
- Wenn **P** = **NP** ist, kann jedes Problem, das in exponentieller Zeit gelöst werden kann, schon in polynomieller Zeit gelöst werden.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: $P \neq EXPTIME$
- Sind L_1 und L_2 kontextfrei, so ist $L_1 \cap L_2$ nicht kontextfrei, da kontextfreie Sprachen nicht unter Durchschnitt abgeschlossen sind.
  Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

  Lösung: z.B. $\{\} \cap \{\underline{\mathtt{a}}\}$ ist regulär und damit auch kontextfrei.

(6 Punkte)