# 6 Impuls

## 6.1 Kraftstoß und Impuls: Impulssatz

Das Grundgesetz der Mechanik $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ läßt sich durch Zusammenfassung noch kürzer formulieren. Unter der (bisher selbstverständlichen) Annahme konstanter Masse $m$ läßt sich diese unter das Differential ziehen.

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{p}}. \quad (6.1)$$

Definition:

$$\boxed{\textit{Impuls:} \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad \text{Einheit: kg m/s.}} \quad (6.2)$$

Die Größe $\vec{p}$ nennt man *Impuls* des Körpers. Dieser charakterisiert seinen Bewegungszustand wesentlich besser als die kinematische Größe Geschwindigkeit. Er ist wie diese ein Vektor und ihr parallel gerichtet.

Die Gleichung $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ läßt sich durch Integration nach $\vec{p}$ auflösen. Es folgt unmittelbar

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p},$$

integriert

$$\int \vec{F}\,\mathrm{d}t = \int_{(1)}^{(2)} \mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}. \quad (6.3)$$

Definition:

$$\boxed{\textit{Kraftstoß:} \quad \vec{S}_F = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t \quad \text{Einheit: N s.}} \quad (6.4)$$

Die Integralgröße $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$ heißt *Kraftstoß*. Bei einem Kraftstoß ändert sich die wirkende Kraft zeitlich; sie wächst bis auf einen maximalen Wert, wirkt eine gewisse Zeit, um dann wieder auf Null abzufallen. Der zeitliche Verlauf

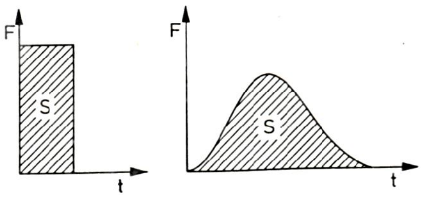


*Fig. 6.1:* Verschiedene Formen von Kraftstößen.

kann sehr unterschiedlich sein (Fig. 6.1). Er ist in vielen Fällen experimentell nur schwer oder gar nicht bestimmbar.

Im speziellen Fall eines rechteckförmigen Kraft-Zeit-Verlaufs kann man Gl. (6.4) vereinfachend als Produkt schreiben, wenn man die Wirkungszeit $\Delta t$ einführt:

$$\vec{S}_F = \int_{\Delta t} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{F}_0 \cdot \Delta t. \tag{6.5}$$

In allen anderen Fällen kann man die Integralform des Stoßes durch Einführung eines Kraftmittelwerts $\bar{F}$ zwar auch in die Produktform

$$S_F = \int_{\Delta t} F\,\mathrm{d}t = \bar{F} \cdot \Delta t \tag{6.6}$$

bringen, hat damit das Integral aber nur formal beseitigt.

Offenbar hat jedoch das Zeitintegral der Kraft seine eigenständige Bedeutung. Der Kraftstoß wird durch die Fläche unter der $F(t)$-Kurve veranschaulicht (s. Fig. 6.1). Um die Eigenständigkeit dieser neuen Größe hervorzuheben, wurde sie mit einem eigenen Symbol $\vec{S}_F$ bezeichnet ($S$ = Stoß, der Index „$F$" weist auf „Kraft" hin, da später noch weitere Arten von Stößen zu behandeln sein werden). Ein Kraftstoß läßt sich mit einem ballistischen Pendel (Feder- oder Schwerependel) direkt messen; der zeitliche Verlauf der Kraft ist dabei völlig unerheblich; man braucht ihn nicht zu kennen. Kraftstoßmesser werden in Abschnitt 7.2 noch eingehender behandelt werden.

Die physikalische Bedeutung und die Wirkung des Kraftstoßes kommen in der obigen Gl. (6.3) zum Ausdruck. Diese Gleichung stellt den *Impulssatz der Mechanik* dar. Folgende Formulierungen dieses zweiten fundamentalen Satzes der Mechanik bieten sich an:

*Impulssatz der Mechanik:*

*(1) Durch einen Kraftstoß ändert sich der Impuls eines Körpers.*

$$\vec{S}_F = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1. \tag{6.7}$$

*(2) Der Kraftstoß ist gleich der vektoriellen Impulsänderung.*

*(3) Eine von außen am System angreifende Kraft hat eine zeitliche Impulsänderung des Systems zur Folge.*

$$\vec{F}_a = \dot{\vec{p}}. \tag{6.8}$$

Der Index „a" bei $F$ soll eindringlich betonen, daß eine äußere Kraft am System angreifen muß, um den Impuls zu ändern. Innere Kräfte sind dazu nicht fähig. Münchhausen kann sich nicht selbst an den Haaren aus dem Sumpf ziehen!

## 6.2 Der Impulserhaltungssatz

Durch die Einwirkung von äußeren Kräften ändert sich der Impuls eines Systems: $\vec{F}_a = \dot{\vec{p}}$. Schließt man das System jedoch gegen die Einwirkung derartiger Kräfte ab, verlangt also $\vec{F}_a = 0$ (oder $\sum \vec{F}_a = 0$, falls mehrere angreifende Kräfte zu berücksichtigen sind), dann kann sich sein Impuls nicht ändern.

> *Bei* $\vec{F} = 0$ *folgt* $\dot{\vec{p}} = 0$ *oder* $\vec{p} = const.$ (6.9)
>
> *Impulserhaltungssatz: Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems ist nach Betrag und Richtung konstant.*

In diesem Fall bedeutet „abgeschlossen": abgeschlossen gegen die Wirkung äußerer Kräfte. Diese Bedingung unterscheidet sich grundlegend von der Abgeschlossenheit, die für die Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes gefordert wurde.

**Experiment:**

Zwei auf einem völlig ebenen Tisch ruhende Wagen mit den Massen $m_1$ und $m_2$ sind durch eine gespannte Feder aneinandergekoppelt und durch einen Faden arretiert. Die von außen an ihnen angreifenden Gewichtskräfte werden durch entgegengesetzte, vom Boden ausgehende Kräfte aufgehoben. Es gilt $\sum \vec{F}_a = 0$. Die beiden Wagen ruhen. Der Gesamtimpuls des Systems ist null: $\vec{p}_{ges} = 0$. Das Lösen der Arretierung zwischen den Wagen setzt nur innere Kräfte $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ frei, die dem Betrage nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, so daß ihre Vektorsumme verschwindet. Die beiden Wagen fahren auseinander, aber nach wie vor bleibt der Gesamtimpuls $\vec{p}_{ges} = 0$.

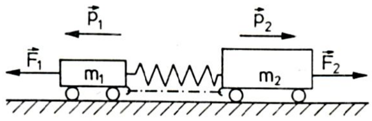


*Fig. 6.2:* Demonstration des Impulserhaltungssatzes: Zwei Wagen sind mit einer Feder aneinandergekoppelt und arretiert. Die Arretierung wird gelöst, die Wagen fahren auseinander. Dadurch kann sich der Gesamtimpuls des Systems jedoch nicht ändern, denn es werden nur innere Kräfte freigesetzt. Das Demonstrationsexperiment wird auf einer exakt waagerecht ausgerichteten Luftkissenbahn durchgeführt.

Vor dem Lösen der Arretierung wird die Gleichung $\vec{p}_{ges} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$ durch $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = 0$, nach dem Lösen durch $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ erfüllt.

Diese Beziehung gibt eine einfache Möglichkeit an die Hand, die Massen zweier Körper allein durch Geschwindigkeitsmessungen miteinander zu vergleichen, ohne auf spezielle, oft nur näherungsweise realisierbare Eigenschaften von Kraft/Masse-Meßinstrumenten zurückgreifen zu müssen (lineare Federwaage, Balkenwaage, s. Abschnitt 3.3). Betragsmäßig gilt nämlich:

$$p_1 = p_2 \quad \longrightarrow \quad m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \longrightarrow \quad m_2 = \left(\frac{v_1}{v_2}\right) \cdot m_1. \tag{6.10}$$

Wählt man für $m_1$ die Masse 1 kg eines Standardkörpers, dann ist $m_2$ vollständig durch das Geschwindigkeitsverhältnis $(v_1/v_2)$ bestimmt. Dieses kann man – nach Festlegung zweier z. B. gleich langer Laufstrecken – mit einer Stoppuhr messsen.

## 6.3 Schwerpunktsatz

Für ein System, das aus vielen einzelnen Körpern (Teilchen) zusammengesetzt ist, läßt sich der Impulssatz mit Hilfe der Definition des Massenmittelpunktes vorteilhaft umformulieren. Der Ortsvektor $\vec{R}$ des Massenmittelpunktes wurde in Abschnitt 3.4 wie folgt definiert:

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum m_i \vec{r}_i. \tag{6.11}$$

Dabei stellen die $m_i$ die Massen der Teilchen $i$ und $\vec{r}_i$ ihren Ortsvektor dar. Bewegen sich die Teilchen, dann hängen die $\vec{r}_i$ von der Zeit ab, und i. allg. wird sich dann auch die Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$ zeitlich ändern. Die Zeitableitung von $\vec{R}$ liefert die Geschwindigkeit $\vec{V}$ des Schwerpunkts:

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i. \tag{6.12}$$

Die Größe $\vec{P} = M \cdot \vec{V}$ erkennt man als den Schwerpunktsimpuls, der sich aus der vektoriellen Addition der Teilchenimpulse $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ zusammensetzt:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i. \tag{6.13}$$

> *Schwerpunktsatz:*
>
> ***Der Gesamtimpuls eines Systems verhält sich so, wie wenn die gesamte Masse des Systems im Schwerpunkt vereinigt wäre und sich mit der Geschwindigkeit des Schwerpunkts bewegen würde.***

Das Ergebnis der zweimaligen Differentiation des Ortsvektors, die die zeitliche Änderung des Schwerpunktsimpulses bestimmt

$$\dot{\vec{P}} = M \cdot \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{F}_i. \tag{6.14}$$

läßt sich ebenfalls in Worte fassen:

> ***Der Massenmittelpunkt eines Systems bewegt sich so, wie wenn in ihm die gesamte Masse vereinigt wäre und die äußeren Kräfte in ihm angreifen würden.***

Sonderfall eines abgeschlossenen Systems:

> Bei $\vec{F}_a = 0$ gilt $\dot{\vec{P}} = 0$; $\vec{P} = const.$; $\vec{V} = const.$
>
> *In einem abgeschlossenen System bleibt die Schwerpunktsgeschwindigkeit unverändert (2. Form des Impulserhaltungssatzes).*

Zwei Beispiele für diesen Satz sind in den Figuren 6.3 und 6.4 beschrieben.

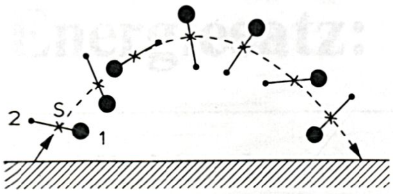


*Fig. 6.3:* Ein hantelförmiger Körper wird geworfen. Die Teilkörper (1) und (2) durchlaufen ein komplizierte Flugbahnen. Ihr gemeinsamer Schwerpunkt $S$ fliegt jedoch auf der bekannten einfachen „Wurfparabel" so, als ob die Schwerkraft nur in diesem Punkt angreifen würde.

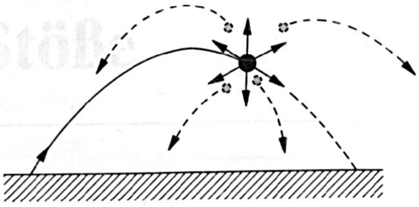

*Fig. 6.4:* Eine im Schwerefeld der Erde fliegende Granate explodiert unterwegs in mehrere Teile. Durch die Explosion werden nur innere Kräfte freigesetzt. Die Einzelteile fliegen wild durch die Gegend. Die Bewegung des Schwerpunkts kann jedoch durch die inneren Kräfte nicht beeinflußt werden. Der Schwerpunkt folgt auch nach der Explosion der durch die Anfangsbedingungen vorgegebenen Wurfparabel.

## 6.4 Zusammenfassung

| | |
|---|---|
| Definition des Impulses | $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ |
| Definition des Kraftstoßes | $\vec{S}_F = \int \vec{F}_a \, dt$ |
| Impulssatz | $\vec{F}_a = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; $\quad \vec{S}_F = \Delta \vec{p}$. |
| Schwerpunktssatz | $\vec{F}_{ges} = \sum \vec{F}_a = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{P}}$. |
| Impulserhaltungssatz | $\vec{F}_a = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{p}} = 0,\ \Delta\vec{p} = 0,\ \vec{p} = const.$ |