Runde 1, Beispiel 1

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.10.2006

1 Angabe

Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach y differenzierbar, dann genügt f in jedem Rechteck $R = \{f(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, das ganz in G liegt, einer L-Bedingung (bezüglich y) mit L-Konstanten $L = max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in R\}$.
Mittelwertsatz: Ist f auf $[a, b]$ differenzierbar, dann gibt es ein $x \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2 Lösung des Beispiels

Gegeben ist die Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. f genügt dann lokal einer Lipschitzbedingung bezüglich y, falls für alle $(x_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von (x_0, y_0) und eine Konstante L existieren, so dass für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{U} \cap D$ gilt:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Es gilt der Satz: Wenn D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sind und besitzen eine stetige, partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$, dann genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung.
Zum Beweis setzen wir voraus, dass $\mathcal{U}$ abgeschlossen (eben das in der Angabe erwähnte Rechteck) und ganz in D enthalten ist. $\mathcal{U}$ ist eine kompakte Menge (abgeschlossen und beschränkt). Daher nimmt $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach dem Satz von Minimum und Maximum auf $\mathcal{U}$ ein Minimum und ein Maximum an. Daher gibt es ein L, so dass gilt:

$$\max_{(x,y)\in U} |\frac{\partial f}{\partial y}| \leq L$$

Nach dem Mittelwertsatz folgt, dass es für alle y_1, y_2 ein $\eta \in (y_1, y_2)$ gibt, so dass gilt:

$$f(x, y_1) - f(x, y_y) = (y_1 - y_2)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)$$

Daraus können wir schlussfolgern, was zu beweisen war:

$$\mathbf{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2| \max_{(x,y)\in U} |\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)| = L|y_1 - y_2|}$$

Runde 1, Beispiel 2

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.10.2006, 06.12.

1 Angabe

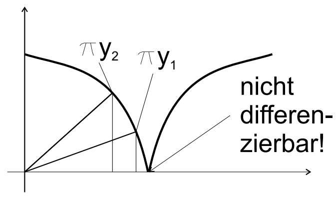
Man zeige, dass die Funktion $f(x, y) = 5|\cos(\pi y)| + x^2$ in $G = \mathbb{R}^2$ einer L-Bedingung (bezüglich y) genügt, und gebe eine L-Konstante an.

2 Lösung des Beispiels

2.1 Erster Lösungsversuch

$$|(5 \cdot |\cos(\pi \cdot y_1)| + x^2) - |(5 \cdot |\cos(\pi \cdot y_2) + x^2)| =$$
$$5 \cdot \underbrace{|(|\cos(\pi \cdot y_1)| - |\cos(\pi \cdot y_2)|)|}_{\in[0,1]} \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

1. $|y_1 - y_2| > 1$
2. $|y_1 - y_2| = 0$
3. $|\cos(\pi \cdot y_1)| - |\cos(\pi \cdot y_2)| \leq C \cdot |y_1 - y_2|$



2.2 Eigentliche Lösung

Folgerung: Dreiecksungleichung

$$||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|, \ |y_1| = |y_1 - y_2 + y_2| \leq |y_1 - y_2| + |y_2|$$
$$|y_1| - |y_2| \leq |y_1 - y_2|$$
$$||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$$

$$5 \cdot || \cos(\pi \cdot y_1)| - | \cos(\pi \cdot y_2)||(\leq L|y_1 - y_2|)$$
$$\leq 5 \cdot | \cos(\pi \cdot y_1) - \cos(\pi \cdot y_2)| = \underbrace{\frac{5 \cdot | \cos(\pi \cdot y_1) - \cos(\pi \cdot y_2)|}{|y_1 - y_2|} \cdot |y_1 - y_2|}_{\text{Mittelwertsatz}}$$
$$f'(\cos(\pi y)) = -\sin(\pi y)) \Rightarrow |f'| \leq \pi$$
$$\Rightarrow \leq \mathbf{5}\pi|\mathbf{y_1} - \mathbf{y_2}|$$

L ist somit 5π.

Runde 1, Beispiel 3

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 06.12.

1 Angabe

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$.
Man führe 3 Iterationsschritte der Picard-Iteration durch und vergleiche die erhaltenen Approximationen mit der exakten Lösung des AWP (Trennung der Variablen).

2 Lösung des Beispiels

$$y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x\ dx$$

$$G(y) = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$$

$$F(x) = \int 2x\ dx = x^2$$

$$G(y) - F(x) = c \ \Rightarrow\ -\frac{1}{y} - x^2 = c \underbrace{\Rightarrow}_{y(0)=1} -1 = c$$

$$-\frac{1}{y} - x^2 = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)}$$

Picard-Iteration:

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 1 + 2\int_0^x (1)\, dt = x^2$$

$$y_2 = 1 + 2\int_0^x t(1+t^2)\, dt = y_1 = 1 + 2\int_0^x t + t^2 + t^3 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{4}$$

$$y_3 = 1 + 2\int_0^x t(1 + x^2 + \frac{x^4}{4})\, dt = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \frac{2}{3}x^8 + \frac{1}{3}x^{10} + \frac{1}{9}x^{12} + \frac{1}{63}x^{14}$$

Runde 1, Beispiel 4

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.10.2006

1 Angabe

Man löse das folgende AWP durch Trennung der Variablen: $1 + y^2 - xy' = 0$, $y(1) = 1$.

2 Theoretische Grundlagen: 'Trennbare Differentialgleichungen'

Ergibt sich (eventuell nach Umformung) eine Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x),$$

welche stetige, auf den Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}(x, x_0 \in I)$ und $J \subseteq \mathbb{R}(y, y_0 \in J)$ stetig definierte Funktionen f und g besitzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $g(y) \neq 0$ - durch **Trennung der Variablen (Veränderlichen)** ergibt sich eine exakte Differentialgleichung in der Form:

   $$f(x) - \frac{1}{g(y)} \cdot y' = 0$$

   und der Stammfunktion ($x, x_0 \in I$, $y, y_0 \in J$):

   $$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi - \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

2. $g(\eta) = 0, \eta \in J$ - es gilt: $y(x) = \eta$, $x \in I$ ist eine konstante Lösung.

Für trennbare Differentialgleichungen ($x_0 \in I$, $y_0 \in J$) besagt der **Existenz- und Eindeutigkeitssatz**, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x) \cdot g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

lokal eindeutig lösbar ist wenn gilt:

1. $g(y_0) \neq 0$, oder
2. $|g(y)| < L \cdot |y - y_0|$ in einer Umgebung von y_0, $L > 0$ konstant (`Lipschitz`).

Das **Lösungsverfahren** für $y' = f(x) \cdot g(x)$ lautet allgemein:

1. Sämtliche Nullstellen von $\eta \in J$ bestimmen - $y(x) = \eta$ ist jeweils eine partikuläre Lösung

2. Trennung der Variablen ('y, dy nach links; x, dx nach rechts')

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

3. Unbestimmte Integration beider Seiten:

$$G(y) := \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad F(x) := \int f(x)\,dx.$$

   Allgemeine implizite Lösung lautet:

$$G(y) - F(x) = x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4. Anfangswertproblemlösung: Wenn $g(y_0) \neq 0, c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Soferne möglich $G(y) - F(x) = c - 0$ nach y auflösen.

   Wenn $g(y_0) = 0$, dann ist $y(x) = y_0$ die Lösung.

3 Lösung des Beispiels

3.1 Nullstellenbestimmung

Es sind keine Nullstellen in dem von y abhängigen Funktionsteil vorhanden.

3.2 Umformung (Trennung der Veränderlichen)

$$\begin{aligned} xy' &= 1 + y^2 \\ y' &= \frac{1+y^2}{x} \\ \frac{y'}{1+y^2} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

3.3 Beide Seiten unbestimmt integrieren

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y$$

(Integrationsergebnis lt. Meyberg/Vachenauer, 'Höhere Mathematik 1'. 3. Aufl., S. 167).

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

Die allgemeine Lösung in impliziter Form lautet somit:

$$G(y) - F(x) = c, c \in \mathbb{R}, \qquad \arctan y = \ln x + c \qquad \mathbf{y} = \tan(\ln \mathbf{x} + \mathbf{c})$$

3.4 Lösung des Anfangswertproblems

Es gilt: $y(1) = 1$, daher errechnet sich c aus $c = G(y_0) - F(x_0) = 0.7854 - 0 = 0.7854$.
Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit:

$$\arctan \mathbf{y} = \ln \mathbf{x} + \mathbf{0.7854}$$

4 Literatur

- Meyberg/Vachenauer, 'Höhere Mathematik 2'. 2. Aufl., S. 14ff.)

Runde 1, Beispiel 5

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.10.2006

1 Angabe

Zeige, dass $\cos x \cdot \cos y - (\sin \cdot \sin y + y^2) \cdot y' = 0$ eine exakte Differentialgleichung ist und löse das AWP $y(0) = 1$.

2 Theoretische Grundlagen: Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentalgleichungen stellen eine spezielle Form der Differentialgleichungen 1. Ordnung dar und entstehen durch Differentiation nach der Kettenregel aus $U(x, y) = const.$. Ihre implizite Form lautet

$$U_x(x, y) + U_y(x, y)y' = 0,$$

und die explizite für $U_y \neq 0$:

$$y' = -\frac{U_x(x, y)}{U_y(x, y}$$

Normalerweise ist die Exaktheit einer Differentialgleichung nicht auf den ersten Blick ersichtlich. Eine Differentialgleichung der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

ist dann exakt, wenn es eine Funktion U gibt, so dass gilt:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = A, \qquad U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = B$$

U ist dann die **Stammfunktion von $\mathbf{A(x, y) + B(x, y)y' = 0}$** (und ist nichts anderes als die Stammfunktion des Vektorfeldes

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} A(x, y) \\ B(x, y) \end{pmatrix}$$

Der **Exaktheitstest** ergibt für $A(x, y)+B(x, y)y' = 0$ genau dann ein positives Resultat, wenn folgende **Integrabilitätsbedingung** erfüllt ist:

$$\frac{\partial}{y}A(x, y) = \frac{\partial}{x}B(x, y)$$

Allgemein lautet die **Lösungsmethode für exakte Differentialgleichung der Form A(x,y) + B(x,y)y' = 0**:

1. Bestätigen von
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$
2. Bestimmung einer Stammfunktion über den Ansatz $u_x = A$, $U_y = B$:
   a) A unbestimmt nach x integrieren
   $$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y)$$
   b) y partiell nach y differenzieren, mit B gleichsetzen:
   $$U_y(x,y) = (\int A(x,y)\,dx)_y + c'(y) = B$$
   c) $c(y)$ durch Integration nach y bestimmen

   Allgemeine implizite Lösung: $U(x,y) = const.$
3. Implizite Lösung ist $U(x,y) = U(x_0,y_0)$ - wenn möglich nach y auflösen und Definitionsbereich bestimmen.

3 Lösung des Beispiels

3.1 Exaktheitstest

$$\begin{gathered}
\cos x \cdot \cos y - (\sin \cdot \sin y + y^2) \cdot y' = 0 \\
A(x,y) = \cos x \cdot \cos y \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \cos x \cdot (-\sin y) \\
B(x,y) = (-1) \cdot (\sin x \cdot \sin y + y^2) \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = \cos x \cdot (-\sin y) \\
\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \text{exakte DGL liegt vor}
\end{gathered}$$

3.2 Bestimmung einer Stammfunktion ($U_x = A$, $U_y = B$

1. $$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y) = \int \cos x \cdot \cos y\,dx + c(y) = \sin x \cdot \cos y + c(y)$$

2.

$$U_y(x,y) = (\int A(x,y)\,dx)_y + c'(y) = B(x,y)$$
$$(\sin x \cdot \cos y)_y + c'(y) = -\sin x \cdot \sin y - y^2$$
$$-\sin x \cdot \sin y + c'(y) = -\sin x \cdot \sin y - y^2$$
$$c(y)' = y^2$$

3.

$$c(y)' = y^2 \mid \int \qquad \Rightarrow \qquad c(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

Allgemeine Lösung somit:

$$\mathbf{U(x,y) = \sin x \cdot \cos y + c(y) = \sin x \cdot \cos y + \frac{y^3}{3} + c}$$

3.3 Lösung des AWPs

$$y(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin 0 \cdot$$
$$cos 1 + \frac{1}{3} + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{1}{3}$$
$$\mathbf{\sin x \cdot \cos y + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}}$$

Runde 1, Beispiel 6

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.10.2006

1 Angabe

Die Differentialgleichung

$$ydx + x(1 - 3x^2y^2)dy = 0$$

ist nicht exakt, aber mittels integrierendem Faktor $M(x, y) = \frac{1}{(xy)^3}$ geht sie in eine exakte Dgl. über. Man verifiziere dies und gebe dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

2 Theoretische Grundlagen: Integrierender Faktor

Eine nicht exakte Differentialgleichung in der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

geht durch die Multiplikation mit einer Funktion $M(x, y)$ in die exakte Differntialgleichung

$$M(x, y) \cdot A(x, y) + M(x, y) \cdot B(x, y)y' = 0$$

über. $M(x, y)$ ist der **integrierende Faktor** oder **Euler-Multiplikator**.
Allgemein lautet der Lösungsweg für $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$ mit integrierendem Faktor vom Typ $M(x, y) = m(u(x, y))$:

1. Berechnung von $A_y - B_x$. Wenn 0 herauskommt, dann liegt eine exakte Differentialgleichung vor, die wie gehabt gelöst werden kann.

2. Wenn $u(x, y)$ nicht explizit vorgegeben, Auswahl verschiedener Funktionen $u(x, y)$ und dazu Berechnung von

$$H(x, y) := \frac{Ay - Bx}{BU_x - Au_y}$$

Wenn $H(x, y) = h(u(x, y))$ weiter mit nächstem Schritt, ansonsten anderes $u(x, y)$ wählen.

Standard-Ansätze für $u(x, y)$:

$\mathbf{u(x,y)}$	$\mathbf{H(x,y)}$
x	$\frac{A_y - B_x}{B}$
y	$\frac{A_y - B_x}{-A}$
$x+y$	$\frac{A_y - B_x}{B-A}$
$x-y$	$\frac{A_y - B_x}{B+A}$
xy	$\frac{A_y - B_x}{yB-yA}$
y^2+y^2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_y - B_x}{xB-yA}$
x^2-y^2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{A_y - B_x}{xB+yA}$

3. Berechne $m(u) = e^{\int h(u)\,du}$. $M(x,y) = m(u(x,y))$ ist der Euler-Multiplikator
4. Lösung der exakten Differentialgleichung $M(x,y) \cdot A(x,y) + M(x,y) \cdot B(x,y)y' = 0$

3 Lösung des Beispiels

3.1 Exaktheitstest ('original'-Funktion)

$$A = y, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = 1$$
$$B = x \cdot (1 - 3x^2y^2) \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = 1 - 6xy^2$$
$$\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}$$

3.2 Exaktheitstest (Funktion mit integrierendem Faktor $M(x,y) = \frac{1}{(xy)^3}$ multipliziert)

$$A = \frac{1}{x^3y^2} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{2}{x^3y^3}$$
$$B = \frac{1 - 3x^2y^2}{x^2y^3} \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{2}{x^3y^3}$$
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \checkmark$$

3.3 Lösung der nun exakten Differentialgleichung

$$
\begin{gathered}
U_x = A, U_y = B \\
U(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y) = \int \frac{1}{x^3y^2}\,dx = -\frac{1}{2x^2y^2} + c(y) \\
U_y(x,y) = (-\frac{1}{2x^2y^2})_y + c'(y) = \frac{1}{x^2y^3} - \frac{3}{y} \\
\frac{}{x^2y^3} + c'(y) = \frac{1}{x^2y^3} - \frac{3}{y} \\
c'(y) = -\frac{3}{y} \qquad | \int \qquad \Rightarrow \qquad c(y) = -3\ln(y) \\
U(x,y) = -\frac{1}{2x^2y^2} + c(y) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x^2y^2}} - \mathbf{3}\ln(\mathbf{y})
\end{gathered}
$$

Runde 1, Beispiel 7

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.10.2006

1 Angabe

Man ermittle für die Differentialgleichung

$$4 - 4x^2 - y^2 - 3xyy' = 0$$

einen nur von x abhängenden integrierenden Faktor $m(x)$, der diese Differentialgleichung in eine exakte Diffeentialgleichung überführt und gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

2 Theoretische Grundlagen: Integrierender Faktor

Eine nicht exakte Differentialgleichung in der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

geht durch die Multiplikation mit einer Funktion $M(x, y)$ in die exakte Differntialgleichung

$$M(x, y) \cdot A(x, y) + M(x, y) \cdot B(x, y)y' = 0$$

über. $M(x, y)$ ist der **integrierende Faktor** oder **Euler-Multiplikator**.
Allgemein lautet der Lösungsweg für $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$ mit integrierendem Faktor vom Typ $M(x, y) = m(u(x, y))$:

1. Berechnung von $A_y - B_x$. Wenn 0 herauskommt, dann liegt eine exakte Differentialgleichung vor, die wie gehabt gelöst werden kann.

2. Wenn $u(x, y)$ nicht explizit vorgegeben, Auswahl verschiedener Funktionen $u(x, y)$ und dazu Berechnung von

   $$H(x, y) := \frac{Ay - Bx}{BU_x - Au_y}$$

   Wenn $H(x, y) = h(u(x, y))$ weiter mit nächstem Schritt, ansonsten anderes $u(x, y)$ wählen.

   Standard-Ansätze für $u(x, y)$:

$\mathbf{u(x,y)}$	$\mathbf{H(x,y)}$
x	$\frac{A_y-B_x}{B}$
y	$\frac{A_y-B_x}{-A}$
$x+y$	$\frac{A_y-B_x}{B-A}$
$x-y$	$\frac{A_y-B_x}{B+A}$
xy	$\frac{A_y-B_x}{yB-yA}$
y^2+y^2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{A_y-B_x}{xB-yA}$
x^2-y^2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{A_y-B_x}{xB+yA}$

3. Berechne $m(u) = e^{\int h(u)\,du}$. $M(x,y) = m(u(x,y))$ ist der Euler-Multiplikator
4. Lösung der exakten Differentialgleichung $M(x,y)\cdot A(x,y) + M(x,y)\cdot B(x,y)y' = 0$

3 Lösung des Beispiels

3.1 Exaktheitstest ('original'-Funktion)

$$A = 4 - 4x^2 - y^2, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = -2y$$
$$B = -3xy \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -3y$$
$$\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}$$

3.2 Euler-Multiplikator finden und Exaktheitstest

Standardansatz für $m(x) = x$:

$$m(x) = e^{\int \frac{A_y - B_x}{B}\,dx}$$

$\frac{A_y-B_x}{B}$ darf lt. Angabe nur von x abhängig sein:

$$\frac{A_y - B_x}{B} = \frac{-2y+3y}{3xy} = \frac{1}{3x} \qquad \checkmark \text{ nur von x abh.}$$
$$m(x) = e^{\int \frac{1}{3x}\,dx} = e^{\frac{-1}{3\ln x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^{\ln x}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad (e^{\ln x} = x)$$

Exaktheitstest mit 'neuer' Funktion:

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (4 - 4x^2 - y^2) \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{2y}{\sqrt[3]{x}}$$
$$B = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (-3xy) \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{2y}{\sqrt[3]{x}}$$
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \checkmark$$

Anmerkung von Prof. Panholzer - der integrierende Faktor kann auch wie folgt gefunden werden:

$$m(x) \cdot (4 - 4x^2 . y^2) = A, \qquad m(x) \cdot (-3xy) = B$$
$$A_y = B_x, \qquad \Rightarrow \qquad m(x) = -3m'(x) \cdot x, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial m}{m} = -\frac{1}{3x} \dots$$

3.3 Lösung der nun exakten Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (4 - 4x^2 - y^2) + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (-3xy)y' = 0$$
$$U_x = A, U_y = B$$
$$U(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y) = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (4 - 4x^2 - y^2)\,dx + c(y) =$$
$$\int 4x^{-\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\,dx + c(y) = 6x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2 + c(y)$$
$$U_y(x,y) = (6x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2)_y + c'(y) = -3x^{\frac{2}{3}}y$$
$$3x^{\frac{2}{3}}y + c'(y) = -3x^{\frac{2}{3}}y \qquad \Rightarrow \qquad c'(y) = -6x^{\frac{2}{3}}y \qquad | \int$$
$$c(y) = -3^{\frac{2}{3}}y^2$$
$$6x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2 - 3x^{\frac{2}{3}}y + c = 0$$
$$\mathbf{6x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2 + c = 0}$$