Bitte frei lassen! **Punkte:** **Note:**

# Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik - Vorlesungsprüfung - (Panholzer)*

Arbeitszeit: 100 min.

Familienname: Vorname:

Matrikelnummer:

(1) [8 Punkte] Man erläutere das Prinzip der vollständigen Induktion an Hand eines Beweises der Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+2}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)},$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. ($\binom{n}{m}$ sei in diesem Beispiel der Binomialkoeffizient.)

(2) [8 = 6(a)+2(b) Punkte] Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von $A$.

(b) Rechnen Sie nach, daß je zwei Eigenvektoren von $A$, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, zueinander orthogonal sind.

(3) [8 = 2(a)+2(b)+4(c) Punkte] Zwei Folgen $(x_n)_{n\geq 0}$ und $(y_n)_{n\geq 0}$ seien durch das Ergebnis von Matrizenmultiplikationen folgendermaßen definiert ($\binom{x}{y}$ ist in diesem Beispiel selbstverständlich ein Spaltenvektor):

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ mal}} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne $x_1$, $y_1$, $x_2$ und $y_2$.

(b) Unter Verwendung von $A^n = A \cdot A^{n-1}$ und $\binom{x_{n-1}}{y_{n-1}} = A^{n-1} \cdot \binom{x_0}{y_0}$ stelle man ein System von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung für $x_n$, $y_n$ auf, durch welches man die Werte $x_n, y_n$ aus den Werten $x_{n-1}, y_{n-1}$ berechnen kann. Also: man finde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sodaß $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta y_{n-1}$ und $y_n = \gamma x_{n-1} + \delta y_{n-1}$.

(c) Man löse dieses System von Differenzengleichungen und erhalte somit eine explizite Formel für die Werte $x_n$ und $y_n$.

**Anleitung für** $(c)$: man löse zuerst die (sehr einfache) Differenzengleichung für $y_n$ und setze erst anschließend die erhaltene Lösung in die Differenzengleichung für $x_n$ ein; diese läßt sich dann ebenfalls (problemlos) lösen.

*Bitte Umblättern!

(4) [8 = 1(a)+1(b)+2(c)+2(d)+2(e) Punkte]

(a) Wann ist die Operation $\circ$ einer algebraischen Struktur $\langle M, \circ \rangle$ assoziativ (Definition)?

(b) Wann ist die Operation $\circ$ einer algebraischen Struktur $\langle M, \circ \rangle$ kommutativ (Definition)?

(c) Sei $U$ eine Untergruppe einer endlichen Gruppe $\langle G, \circ \rangle$. Was drückt dann in diesem Zusammenhang der Satz von Lagrange aus (Formulierung)?

(d) Man definiere, wann eine Abbildung $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus zwischen den Gruppen $\langle G, \circ \rangle$ und $\langle H, * \rangle$ ist.

(e) Wie viele verschiedene Gruppenhomomorphismen $\varphi : \langle \mathbb{Z}_2, + \rangle \to \langle \mathbb{Z}_2, + \rangle$ gibt es? (**Anleitung:** man untersuchte, welche der 4 möglichen Abbildungen von $\mathbb{Z}_2$ nach $\mathbb{Z}_2$ tatsächlich Homomorphismen sind. Alternativ dazu kann man auch den Homomorphiesatz verwenden.)

(5) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema "Graphentheorie" (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen):

| |
|---|
| Wie viele Kanten besitzt ein Baum mit 5 Knoten?<br>☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 |
| Welche Bedingung(en) ist(sind) notwendig, damit ein gerichteter Graph $G$ eine geschlossene Euler'sche Linie besitzt?<br>☐ $G$ planar ☐ $G$ schwach zusammenhängend<br>☐ $d^+(v) = d^-(v), \quad \forall v \in V(G)$ ☐ $G$ besitzt eine Hamilton'sche Linie |
| Wofür sind die Adjazenzmatrix $A(G)$ eines Graphen $G$ sowie die Potenzen $A(G)^n$ nützlich?<br>☐ um die Knotengrade $d(v), v \in V(G)$ zu bestimmen<br>☐ um festzustellen, ob es eine Kantenfolge von einem Knoten $v_i$ zu einem Knoten $v_j$ gibt |
| Ein zusammenhängender planarer Graph $G$ besitzt 4 Knoten und 5 Kanten. In wie viele Gebiete zerfällt die Ebene, wenn die Kanten von $G$ entfernt werden? (Hinweis: Euler'sche Polyederformel)<br>☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ es gibt keinen planarer Graphen mit 4 Knoten und 5 Kanten |
| Besitzt $K_5$, also der vollständige Graph mit 5 Knoten, eine planare Darstellung?<br>☐ ja ☐ nein |
| Wozu dient der Dijkstra-Algorithmus?<br>☐ zum Bestimmen einer Hamilton'schen Linie in einem Graphen<br>☐ zum Bestimmen eines minimalen spannenden Baumes in einem Netzwerk<br>☐ zum Bestimmen des Entfernungsbaumes bezüglich eines Knotens in einem Netzwerk<br>☐ zum Bestimmen eines kürzesten Weges zwischen zwei Knoten in einem Netzwerk |
| Welche Bedingung(en) ist(sind) für das erfolgreiche Anwenden des Dijkstra-Algorithmus wesentlich?<br>☐ die Kantengewichte dürfen nicht negativ sein; also $w(e) \geq 0, \forall e \in E(G)$ muß gelten<br>☐ Graph muß kreisfrei sein ☐ Graph muß hamiltonsch sein |
| Welche Bedingung(en) ist(sind) für das erfolgreiche Anwenden des Kruskal-Algorithmus wesentlich?<br>☐ Graph muß zusammenhängend sein ☐ Graph darf keine Mehrfachkanten besitzen |