Bitte frei lassen!

(1) :
(2) :
(3) :
(4) :

Gesamtpunkte:

Analysis für Informatik und WI - Abschlusstest

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Gruppe:

(1) [10 Punkte] Gegeben ist die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} b_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3+n}}.$$

(a) Ist die Reihe konvergent? Geben Sie an, was Sie dafür überprüfen müssen und führen Sie diese Rechnungen aus.

(b) Ist die Reihe absolut konvergent? Geben Sie an, was Sie dafür überprüfen müssen und führen Sie diese Rechnungen aus.

Lösung: (a) Die Reihe hat die Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{3+n}} \geq 0$, ist daher alternierend, und wir können das Kriterium von Leibniz (Satz 4.41) anwenden.

Die Folge (a_n) ist monoton fallend: $3+n \leq 3+(n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3+n} \leq \sqrt{3+n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{3+n+1}} \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$.

Weiters ist (a_n) eine Nullfolge: $0 \leq \frac{1}{\sqrt{3+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0.$

Nach „Leibniz" ist die Reihe also konvergent.

(b) Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3+n}}$ nach dem Minorantenkriterium divergent ist. (Satz 4.48)

Wegen $3+n \leq 3n^2 + n^2 = 4n^2$ ist $\sqrt{3+n} \leq 2n$, also

$\frac{1}{\sqrt{3+n}} \geq \frac{1}{2n}$. Wäre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ konvergent, so auch

$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Das ist aber die harmonische Reihe, welche nach Beispiel 4.36 divergent ist. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ divergent und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

Die gegebene Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist also nicht absolut konvergent.

Anmerkung: Die Divergenz der harmonischen Reihe kann einerseits wie in Beispiel 4.36 gezeigt werden, andererseits aber auch – sehr elegant – mit dem wesentlich später behandelten „Integralkriterium".

(2) [10 Punkte] Gegeben ist die reelle Funktion

$$h(x) = \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right).$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion h.
(b) Unter Verwendung der Differentialrechnung (notwendiges und hinreichendes Kriterium anführen) bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion h.
(c) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $h_n := h(n) = \sin(n\frac{\pi}{2})$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: (a) Wir verwenden $\sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Also gilt: $h(x) = \sin(x \cdot \frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \frac{\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$.

(b) Wir haben $h'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(x \cdot \frac{\pi}{2})$, $h''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \cdot \sin(x \cdot \frac{\pi}{2})$.
Wir verwenden $\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
Damit gilt: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{2} + k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$.
Weiters gilt: $h''(2k+1) = -\frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\left((2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right) =$
$$= -\frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} \cdot (-1)^k = \begin{cases} \frac{\pi^2}{4} > 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ -\frac{\pi^2}{4} < 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$
Also liegt bei $x = 2k+1$ mit geradem k ein Maximum vor.
Der Funktionswert ist hier $h(x) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$, also haben wir lokale und globale Maxima.
Bei $x = 2k+1$ mit ungeradem k liegt ein Minimum vor.
Der Funktionswert ist hier $h(x) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = -1$, also haben wir lokale und globale Minima.

(c) Aus den Überlegungen zu (a)+(b) entnehmen wir:
$$h_n = h(n) = \sin(n \cdot \tfrac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases}$$
Also haben wir 3 unendliche konstante Teilfolgen und somit 3 Häufungspunkte: $0, 1, -1$.

(3) [10 Punkte] Gegeben sei die auf dem Intervall $(1, \infty)$ definierte reelle Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)(1+\ln x)}.$$

(a) Man bestimme eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.
(b) Man gebe die Ableitung der oben berechneten Funktion $F(x)$ an.
(c) Man berechne den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_e^\infty f(x)\,dx.$$

Lösung: (a) Die Substitution $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$, führt auf die Stammfunktion

$$F(x) = \int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot (1+\ln x)} = \int \frac{du}{u(1+u)} = \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \ln u - \ln(1+u) + C = \ln \frac{u}{1+u} + C =$$

$$= \ln\left(\frac{\ln x}{1+\ln x}\right) + C, \quad x \in (1, \infty).$$

(b) Nach der Kettenregel und Quotientenregel gilt:

$$F'(x) = \frac{1}{\frac{\ln x}{1+\ln x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{1+\ln x}\right)' = \frac{1+\ln x}{\ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x}(1+\ln x) - \frac{1}{x}\ln x}{(1+\ln x)^2}$$

$$= \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1+\ln x - \ln x}{x \cdot (1+\ln x)} = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot (1+\ln x)} = f(x).$$

Dies ist natürlich nur eine „Probe" der Rechnung (a).

(c) $$\int_e^\infty f(x)dx = \lim_{z\to\infty} \int_e^z f(x)dx = \lim_{z\to\infty} (F(z) - F(e)) =$$

$$= \lim_{z\to\infty} \left(\ln\left(\frac{\ln z}{1+\ln z}\right) - \ln\left(\frac{\ln e}{1+\ln e}\right)\right) =$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{1+1}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2, \quad \text{denn:}$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(\ln\left(\frac{\ln z}{1+\ln z}\right)\right) = \ln\left(\lim_{z\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln z}+1}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{\infty}+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{0+1}\right) = \ln 1 = 0.$$

(4) [10 Punkte] Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in zwei reellen Variablen, welche gegeben ist via

$$g(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

(a) Man bestimme den Gradienten grad $g(x, y)$.
(b) Man bestimme alle stationären Punkte von $g(x, y)$, also alle Lösungen der Gleichung grad $g(x, y) = \vec{0}$.
(c) Man ermittle die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 1)$ von g an der Stelle $(0, 1)$ nach (= in Richtung des Richtungsvektors) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.
(d) Man gebe das Taylorpolynom 1. Ordnung $T_1(x, y)$ (= lineare Approximation) von g im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ an.

Lösung: (a) $g_x = \frac{\partial g}{\partial x} = 3y - 3x^2$, $g_y = \frac{\partial g}{\partial y} = 3x - 3y^2$

$\Longrightarrow$ grad $g(x,y) = (g_x, g_y) = 3\cdot(y-x^2, x-y^2)$.

(b) grad $g(x,y) = \vec{0} \Longleftrightarrow y - x^2 = x - y^2 = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow y = x^2$ und $x = y^2$. Daraus folgt:
$x = y^2 = (x^2)^2 = x^4$, also $x = 0$ oder $x^3 = 1$.
Die Gleichung $x^3 = 1$ hat als einzige reelle Lösung $x = 1$, denn $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, und die Gleichung $x^2 + x + 1$ hat 2 konjugiert-komplexe Lösungen.
$x = 0$ liefert $y = 0$, und $x = 1$ liefert $y = 1$. Also sind $(0,0)$ und $(1,1)$ die stationären Punkte.

(c) Wir verwenden die Formel aus Satz 6.25:

$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \text{grad}\, g(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \text{grad}\, g(0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1) =$
$= 3 \cdot (1, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1) = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot (1 - 1) = 0.$

(d) Es gilt die Formel:

$T_1(x,y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$

Wir haben $(x_0, y_0) = (0,1)$, $g_x(0,1) = 3$, $g_y(0,1) = -3$, $g(0,1) = -1$.

$\Longrightarrow T_1(x,y) = -1 + 3\cdot(x-0) + (-3)\cdot(y-1) =$
$= -1 + 3x - 3y + 3 = 3x - 3y + 2.$