208-10-22 pdlt

1. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$h(x, y) = \log(\frac{x+y}{2}).$$

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D_h$ und den Wertebereich $W_h$ der Funktion $h(x, y)$ und fertigen Sie eine verständliche Skizze des Bereiches an! (2)

(b) Berechnen Sie die allgemeine Formel für die Konturlinien für $h(x, y)$ und zeichnen Sie die drei äquidistanten Konturlinien (Höhenschichtlinien) für die Funktionswerte $h(x, y) = -1,\ h(x, y) = 0,\ h(x, y) = 1$ in eine beschriftete Skizze ein (Skalen)! (3)

(c) Berechnen Sie die Tangentialabbildung von $h(x, y)$ im Punkt $(2, 0)$! (2)

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für $h(x, y)$ im Punkt $(2, 0)$! (3)

Der $\log(x)$ bezeichnet hier, wie in der Mathematik üblich, den *logarithmus naturalis*.

2. Gegeben seien die Kurven

$$f : [0, 3\pi) \to \mathbb{R}^2,\quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : [0, 4\pi) \to \mathbb{R}^2,\quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$$

(a) Zeichnen Sie eine Skizze der Funktion $f$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und markieren Sie den Startpunkt $S$ und den Endpunkt $E$ der Kurve! (2)

(b) Berechnen Sie die Länge beider Kurven $f$ und $g$! (3)

(c) Berechnen Sie die den (normierten) Tangentialvektor (Tangenteneinheitsvektor) der Kurve $f$ im Punkt $\frac{3\pi}{4}$ exakt! (2)

(d) Stellen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $f$ im Punkt $\frac{3\pi}{4}$ in Parameterform auf! (3)

3. (a) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$ (4)

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$
Hinweis: Setzen Sie für die partikuläre Lösung $y_p(x) = A \cdot x^2 \cdot e^{2x}$ an und bestimmen Sie die Konstante $A$. (3)

(b) Ermitteln Sie jene Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 2$ erfüllt. (3)

4. (a) Zeichnen Sie eine Skizze der folgenden Menge:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 1\}$$

(3)

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_B 1\ dx\, dy\, dz$ (3)

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_B x^2 + y^2\ dx\, dy\, dz$ (4)

9/10

1) a) $D_h = ]0; \mathbb{R}^+]$, $W_h = \mathbb{R}$

b) $c = \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$e^c = \frac{x+y}{2}$

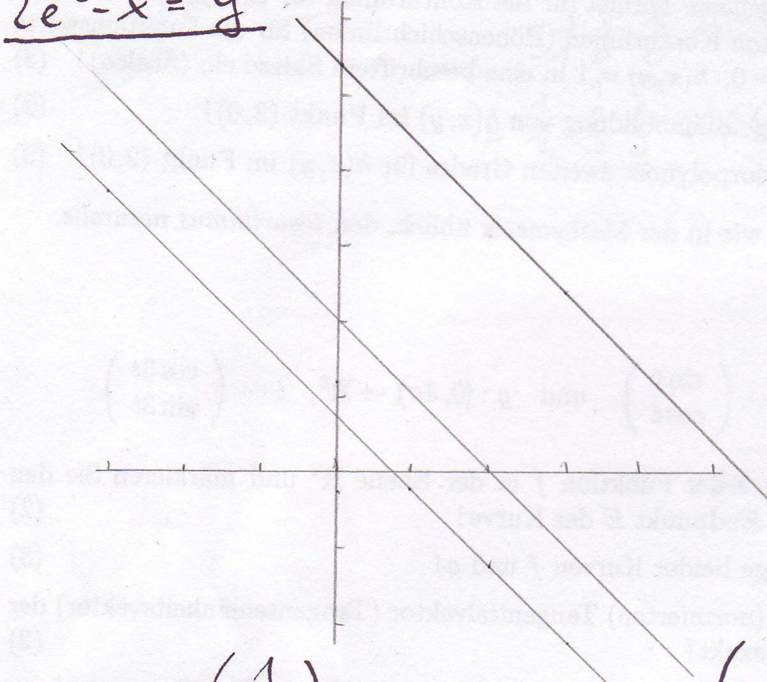
$2e^c = x+y$

$\underline{2e^c - x = y}$

$-1: y = \frac{2}{e} - x$

$0: y = 2 - x$

$1: y = 2e - x$



c) $\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{x+y} \end{pmatrix}$ $\quad \nabla^2 h(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \end{pmatrix}$

$TA = h(x_0) + \nabla h(x_0)(x - x_0)$

$= 0 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} = \frac{x-2}{2} + \frac{y}{2} = \underline{\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1}$

d) $TA + \frac{1}{2}(x-x_0)^T \nabla^2 h(x_0)(x-x_0)$

$= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1 + \begin{pmatrix} \frac{x-2}{2} & \frac{y}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}$

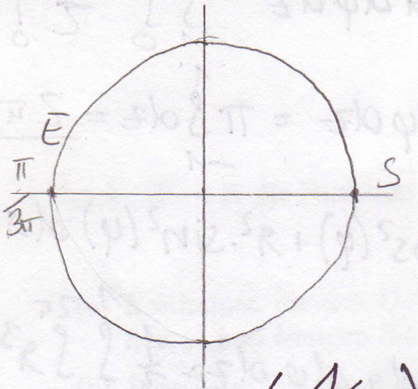
$= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1 + \begin{pmatrix} -\frac{y}{8} - \frac{x-2}{8} & -\frac{y}{8} - \frac{x-2}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}$

$= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1 + \left(-\frac{y^2}{8} - \frac{y(x-2)}{8} \cancel{+} - \frac{y(x-2)}{8} - \frac{(x-2)^2}{8}\right)$

$= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1 - \frac{y^2}{8} - \frac{xy}{8} + \frac{y}{4} - \frac{xy}{8} + \frac{y}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$= \underline{-\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} - \frac{xy}{4} + x + y - \frac{3}{2}}$

b) $f: t' \to \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$ $g: t' \to \begin{pmatrix} -3\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix}$




$$l_f = \int_0^{3\pi} \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}\, dt = \int_0^{3\pi} 1\, dt = t \Big|_0^{3\pi} = \underline{3\pi}$$

$$l_g = \int_0^{4\pi} \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t)}\, dt = 3\int_0^{4\pi} \sqrt{1}\, dt = 3(t)\Big|_0^{4\pi} = 12\pi$$

c) $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3) a) $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = \underline{2}$

$\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}}$

b) $y_p = A x^2 e^{2x}$

$y_p' = A(2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x})$

$y_p'' = 2A(e^{2x} + 2x e^{2x} + 2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x})$

$2A(e^{2x} + 4x e^{2x} + 2x^2 e^{2x}) - 4A(2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x}) + 4A x^2 e^{2x} = e^{2x}$

$4A e^{2x}\left(\frac{1}{2} + 2x + x^2\right) - 4A e^{2x}(2x + 2x^2) + 4A e^{2x} x^2 = e^{2x}$

$4A \cancel{e^{2x}}\left(\frac{1}{2} + \cancel{2x + x^2} - \cancel{2x - 2x^2} + \cancel{x^2}\right) = \cancel{e^{2x}}\ 1$

$4A \cdot \frac{1}{2} = 1$

$4A = 2$

$A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{x^2 e^{2x}}{2}$

c) $y' = 2C_1 e^{2x} + C_2(e^{2x} + 2x e^{2x}) + \frac{x^2 e^{2x}}{2}$

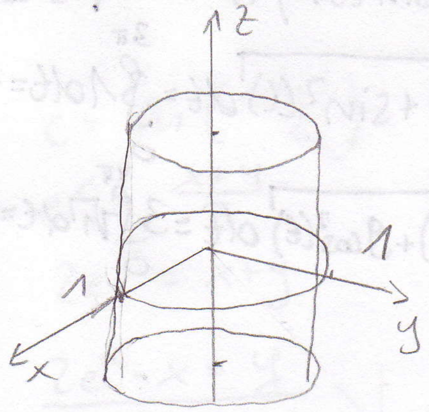
$\underline{0 = C_1}$

$2 = 2\cancel{C_1}^{0} + C_2 \cdot 1$

$\underline{C_2 = 2}$

$\underline{y = 2x e^{2x} + \frac{x^2 e^{2x}}{2}}$

4) a)




b) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} r\,dr\,d\varphi\,dz = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\varphi\,dz$

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} d\varphi\,dz = \pi\int_{-1}^{1} dz = \underline{2\pi}$

c) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} r^2\cos^2(\varphi) + r^2\cdot\sin^2(\varphi)\,dr\,d\varphi\,dz$

$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} r^2\,dr\,d\varphi\,dz = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} r^3\Big|_0^1 d\varphi\,dz$

$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} d\varphi\,dz = \frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} dz = \frac{2\pi}{3} z\Big|_{-1}^{1} = \underline{\frac{4\pi}{3}}$