Mathe2 Formelsammlung

Marco Handl

01. September 2011

Letzte Bearbeitung: 4. November 2011

Inhaltsverzeichnis

1 nützliche Formeln und Umformungen

1.1 nützliche Winkelfunktionen und Winkelfunktiosumformungen

$\cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * cos(2x)$

$cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * cos(2x)$

$-2cos(x)sin(x) = -sin(2x)$

$2cos(x)sin(x) = sin(2x)$

$\sin(2x) = 2sin(x) \cdot \cos(x)$

$cos(2x) = cos^2(x) - sin^2 x$

$tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}$

$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$cos(a - \pi) = -cos(a)$

$sin(a - \pi) = -sin(a)$

$cosh(x) = cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$cot\varphi = \frac{cos\varphi}{sin\varphi} = \frac{1}{tan\varphi}$

1.2 Weitere Nützliche Formeln

Quadratische Gleichung:

groß : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4*a*c}}{2a}$ (für Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$)

klein: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ (für Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$)

Kreisformel: $x^2 + y^2 \leq 1$

Verschobener Kreis: $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ dieser Kreis ist in x Richtung um 1 nach rechts verschoben

Kreisring: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ Ellipsenformel: $\frac{x^2}{a^2} * \frac{y^2}{b^2} = 1$

Summenformeln: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} 4 = 4n$ $\sum\limits_{i=0}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ $\sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6}$

1.3 Logarithmus-Rechenregeln

$ln(a) + ln(b) = ln(a \cdot b)$

$ln(a) - ln(b) = ln(\frac{a}{b})$

$n \cdot ln(a) = ln(a^n)$

$ln(e^n) = n$

$e^{ln(a)} = a$

Entlogerithmieren:

$ln(a) = b \Rightarrow a = e^b$

$ln(a) = ln(b) \Rightarrow a = b$

2 Funktionen in einer Variable

2.1 Ableitungen in einer Variable

2.1.1 Begriffsdefinitionen

Stetigkeit:

Eine Funktion ist stetig im Punkt x_0 wenn die Annäherung von links und von rechts zu diesem Punkt gleich ist.
$\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o+} f(x)$

Differenzierbar:

wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für beide Funktionen gleich sind.

2.1.2 Ableitung von Winkelfunktionen

$$\begin{array}{ccc} \sin(x) & \rightarrow & \cos(x) \\ \uparrow & & \downarrow \\ -cos(x) & \leftarrow & -sin(x) \end{array}$$

$$f(x) = \sin^2(x) \Rightarrow f'(x) = \sin(2x)$$
$$f(x) = \sin^2(4x) \Rightarrow f'(x) = 4\sin(8x)$$

$$f(x) = \cos^2(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(2x)$$
$$f(x) = \cos^2(10x) \Rightarrow f'(x) = -10\sin(20x)$$

(Hinweis: dies ist zurückzuführen auf die Winkelfunktionsumformung: $2cos(x)sin(x) = sin(2x)$)

äusseren Ableitungen der Umkehrfunktionen

$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arccos(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2.1.3 Ableitung des ln

$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

2.1.4 Kurvendiskussion

Die erste Ableitung gibt uns Auskunft über das Anstiegsverhalten einer Funktion f(x):
$f'(x) > 0 \Rightarrow$ Anstieg wird gröSSer.
$f'(x) < 0 \Rightarrow$ Anstieg wird kleiner (negativer).
$f'(x) = 0 \Rightarrow$ Anstieg ist konstant.

Die zweite Ableitung gibt daher analog Auskunft über das Anstiegsverhalten der ersten Ableitung. Dieses wiederum entspricht dem Krümmungsverhalten der ursprünglichen Funktion:
$f''(x) > 0 \Rightarrow$ positive Krümmung
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ negative Krümmung
$f''(x) = 0 \Rightarrow$ keine Krümmung

Entwicklungsschritte zu Kurvendiskussionen:

1. Zunächst werden jene Ableitungen berechnet, die für die Kurvendisskusion benötigt werden ($f'(x) - f'''(x)$).
2. Nullstellen finden indem man $f(x) = 0$ setzt und nach x auflöst.
3. Extremwerte
   - 3.1 $f'(x)$ wird Null gesetzt und die Gleichung nach x gelöst. Somit hat man die x-Koordinate des potentiellen Extrempunkts.
   - 3.2 Diese x Komponente in die Ursprungsgleichung einsetzten und man erhält die y-Koordinate des potentiellen Extrempunkts.
   - 3.3 Einsetzten in $f''(x)$ gibt Auskunft, ob tatsächlich ein Hoch oder Tiefpunkt vorliegt.
     $f''(x) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt (positive Krümmung)
     $f''(x) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt (negative Krümmung)
4. Wendepunkte
   - 4.1 $f''(x)$ wird Null gesetzt und die Gleichung nach x gelöst. Somit hat man die x-Koordinate des potentiellen Wendepunkts.
   - 4.2 Diese x Komponente in die Ursprungsgleichung einsetzten und man erhält die y-Koordinate des potentiellen Wendepunkts.
   - 4.3 Einsetzten in $f'''(x)$ gibt Auskunft, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt (Wendepunkt wenn Ergebnis $\neq 0$).

Beispiel:
Man diskutiere die Funktion $f(x) = sin(x) - \sqrt{3} - cos(x)$ im Intervall
$I = [-\pi, \pi]$
Das heiSSt nichts anderes als finde alle Nullstellen, Extemwerte und Wendepunkte.

---

1) Bildung der Ableitungen

$$\begin{aligned} f(x) &= sin(x) - \sqrt{3}\ cos(x) \\ f'(x) &= cos(x) + \sqrt{3}\ sin(x) \\ f''(x) &= -sin(x) + \sqrt{3}\ cos(x) \\ f'''(x) &= -cos(x) - \sqrt{3}\ sin(x) \end{aligned}$$

2) Nullstellen suchen ($f(x) = 0$ und nach x auflösen)

$sin(x) - \sqrt{3}cos(x) = 0 \Rightarrow -sin(x) = -\sqrt{3}cos(x) \Rightarrow$
$\frac{sin(x)}{cos(x)} = \sqrt{3} \Rightarrow tan(x) = \sqrt{3} \Rightarrow$
$x = arctan(\sqrt{3}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \quad x = -\frac{2\pi}{3}$

---

3) Extremwerte

3.1) $f'x = 0$ somit erhält man die x-Koordinate der Extrema

$cos(x) + \sqrt{3}sin(x) = 0 \Rightarrow cos(x) = -\sqrt{3}sin(x) \Rightarrow \frac{cos(x)}{sin(x)} = -\sqrt{3}$
$\frac{sin(x)}{cos(x)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow \underline{\underline{x = -\frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6}}}$

3.2) Werte aus 3.1 in f(x) einsetzen um die y-Koordinaten zu bekommen

$sin(-\frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}cos(-\frac{\pi}{6}) = -2 \Rightarrow P(-\frac{\pi}{6}, -2)$
$sin(\frac{5\pi}{6}) - \sqrt{3}cos(\frac{5\pi}{6}) \quad = 2 \ \Rightarrow P(\frac{5\pi}{6}, -2)$

3.3) Werte aus 3.1 in $f''(x)$ einsetzen um Min,Max zu bekommen

$-sin(-\frac{\pi}{6}) + \sqrt{3}cos(-\frac{\pi}{6}) = 2 \Rightarrow -\frac{\pi}{=}Minimum$
$-sin(\frac{5\pi}{6}) + \sqrt{3}cos(\frac{5\pi}{6}) \quad = 2 \ \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = Maximum$

---

4) Wendepunkte

4.1) $f'' = 0$ somit erhält man die x-Koordinaten der Wendepunkte

$-sin(x) + \sqrt{3}cos(x) = 0 \Rightarrow sin(x) = \sqrt{3}cos(x) \Rightarrow$
$\sqrt{3} = \frac{sin(x)}{cos(x)} \Rightarrow x = arctan(\sqrt{3}) \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{\pi}{3}, \quad x = -\frac{2\pi}{3}}}$

4.2) diese Werte in $f(x)$ einsetzen um die y-Koordinaten des WP zu bekommen

$sin(\frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}cos(\frac{\pi}{3}) = 0$
$sin(-\frac{2\pi}{3}) - \sqrt{3}cos(-\frac{2\pi}{3}) = 0$

4.3) diese Werte in $f'''(x)$ einsetzen um festzustellen ob ein WP vorliegt

$-cos(\frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}sin(\frac{\pi}{3}) = -2$
$-cos(-\frac{2\pi}{3}) - \sqrt{3}sin(-\frac{2\pi}{3}) = 2$
Beide Ergebnisse $\neq 0 \Rightarrow$ beide sind Wendepunkte

2.2 Obersummen Untersummen

Obersumme: $O_z = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_0 + \frac{i}{n})$

Untersumme: $U_z = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(x_0 + \frac{i}{n})$

x_0 = Integral Untergrenze (das was beim Integral unten steht $\int_{x_0}$)

$x_\nabla = \frac{1}{n}$ $\qquad i$ = Laufvariable

Beispiel Obersumme:

Berechne $\int_2^3 x^2 dx$ mit Hilfe von Untersummen.

laut obiger Formel ergibt sich:

$U_z = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(2 + \frac{i}{n})^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} 4 + 4\frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} 4 + \frac{4}{n^2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n^3}\sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2$

$\sum\limits_{i=0}^{n-1} 4 = 4n \qquad \sum\limits_{i=0}^{n-1} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \qquad \sum\limits_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$

wenn man das ausrechnet kommt man auf : $\frac{38n^2+15n+1}{6n^2}$

jetzt lasst man noch $n \to \infty$ laufen

$\lim_{n\to\infty} \frac{38n^2+15n+1}{6n^2}$ Division $/n^2 \Rightarrow \frac{38+\frac{15}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \underline{\underline{6\frac{1}{3}}}$

2.3 Integration in einer Variable

2.3.1 Integration der Winkelfunktionen

$$\begin{array}{ccc} \sin(x) & \Leftarrow & \cos(x) \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ -\cos(x) & \Rightarrow & -\sin(x) \end{array}$$

$\int tan(x)dx = -ln(cos(x))$

$\int \frac{1}{cos^2(x)}dx = tan(x)$ $\int \frac{1}{sin^2(x)}dx = -cot(x)$

$\int sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - sin(x)cos(x))$ $\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + sin(x)cos(x))$

Integration der Umkehrfunktionen

$\int \arcsin(x) = x * \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$

$\int \arccos(x) = x * \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$

$\int \arctan(x) = x * \arctan(x) - \frac{1}{2} * log(x^2+1)$

Dies kann leicht mittels partieller Integration überprüft werden.

Integration auf arctan(x)

$\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x)$ $\int \frac{1}{2x^2+1} = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$

$\int \frac{1}{x^2+5} = \frac{\arctan(\frac{x}{\sqrt{5}})}{\sqrt{5}}$ $\int \frac{1}{2x^2+5} = \frac{\arctan(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}*x)}{\sqrt{5}*\sqrt{2}}$

2.3.2 Integration von $\frac{1}{x}$ und ln(x)

$\int \frac{1}{x} = \ln(x)$

$\int \frac{1}{2+x} = \ln(2+x)$ $\int \frac{1}{2-x} = -\ln(2-x)$ (mittels Substitution)

$\int \ln(x) = x * ln(x-1)$ $\int \ln(3x) = x * ln(3x-1)$

$\int \ln(x^5) = x * ln(x^5-5)$ $\int \ln(3x^5) = x * ln(3x^5-5)$

$\int \ln(x+2) = (x+2) * ln(x+2) - x$ dies kann jedoch mit Substituion berechnet werden u=x+2

2.3.3 Integrationsmethoden

Substitution

1) u auswählen
2) $\frac{du}{dx} = u' \Rightarrow dx = \frac{du}{u'}$
3) die Ersatzwerte in Ursprungsintegral einsetzen
4) Integral lösen und Rücksubstituieren

Beispiel Substitution

$\int \frac{2x}{x^2} dx \Rightarrow u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int \frac{2x}{u} \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{u} du = ln|u| = \underline{\underline{ln|x^2|}}$

partielle Integration

$u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Beispiel partielle Integration

$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dv}$

$u = x \Rightarrow du = 1$
$dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x = e^x$

$\Rightarrow x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1dx = x \cdot e^x - e^x = \underline{\underline{e^x(x-1)}}$

Partialbruchzerlegung

Hierbei werden 3 Fälle Unterschieden:

erster Fall:
Der Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners und Nenner ist in Binärfaktoren zerlegbar, die reell und verschieden sind.

Rechenregeln:

1. Zerlegung Nenner in Linearfaktoren.
2. Zerlegung von $\frac{Z(x)}{N(x)}$ in Partialbrüche.
3. Bestimmung der Konstanten(A,B,..)
4. Einsetzen der Konstanten und Integration der geteilten Funktion

Beispiel:

$$\int \frac{\overbrace{3}^{Grad0}}{\underbrace{x^2+3x+2}_{Grad2}} dx$$

1) $x^2+3x+2 \Rightarrow x_{12} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Die Vorzeichen werden negiert und unsere Aufteilung lautet somit:
$x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$.

2) $\frac{3}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

3)In diesen Schritt kann man entweder die oben ermittelten Werte einsetzen oder man löst es mittels Koeffizientenvergleich. Hier mit Einsetzen.

$3 = A(x+2) + B(x+1); \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -2$ einsetzen
$3 = A(-1+2) + B(-1+1) \Rightarrow A = 3$
$3 = A(-2+2) + B(-2+1) \Rightarrow B = -3$

4) $\int \frac{3}{x+1}dx + \int \frac{-3}{x+2}dx = 3\ln|x+1| - 3\ln|x+2| + C$

$\int \frac{3}{x^2+3x+2} = 3\ln|\frac{x+1}{x+2}| + C$

zweiter Fall:
Der Grad des Zählers ist kleiner als der Grad des Nenners und Nenner ist in Linearfaktoren zerlegbar, die reell aber **nicht** verschieden sind.

Rechenregeln:

1. Zerlegung Nenner in Linearfaktoren.
2. Zerlegung von $\frac{Z(x)}{N(x)}$ in Partialbrüche, wobei alle Potenzen $[(x-x_1)^1, (x-x_1)^2, ...]$ als Nenner zu berücksichtigen sind.
3. Bestimmung der Konstanten(A,B,..)
4. Einsetzen der Konstanten und Integration der geteilten Funktion

Beispiel:

$$\int \frac{\overbrace{3x^2+8x+2}^{Grad2}}{\underbrace{x^3+2x^2+x}_{Grad3}} dx$$

1) hier wird das ganze hin und wieder etwas blöd in was man etwas Zerlegen soll im Zweifelsfall man durch (x-1) dividieren, vielleicht erkennt man dann mehr.

$$x^3+2x^2+x = x*(x^2+2x^2+x) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{23} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = -1 \end{cases}$$

Die Vorzeichen werden negiert und unsere Aufteilung lautet somit:
$x^3+2x^2+x = x(x+1)^2$ das Quadrat aus dem Grund weil x_2 und x_3 gleich sind.

2) $\frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

3)In diesen Schritt kann man entweder die oben ermittelten Werte einsetzen oder man löst es mittels Koeffizientenvergleich. Hier mit Koeffizientenvergelich:

$x^3+2x^2+x = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$
$x^3+2x^2+x = x^2\cdot(A+B) + x\cdot(2A+B+C) + A$
$3 = A+B$
$8 = 2A+B+C$
$2 = A$
$\Rightarrow A = 2; B = 1; C = 3$

4) $\int \frac{2}{x}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}dx = 2\ln|x| + \ln|x+1| + 3\cdot\frac{-1}{\sqrt{x+1}} + C$

$$\underline{\underline{\int \frac{3x^2+8x+2}{x^3+2x^2+x}dx = \ln|x^2\cdot(x+1)| - \frac{3}{\sqrt{x+1}} + C}}$$

dritter Fall:
Der Grad des Zählers ist **größer oder gleich** als der Grad des Nenners.

Rechenregeln:

1. Zähler durch Nenner dividieren(Polynomdivision). Man erhält dadurch in Quotienten einzelne Summanden und einen Restbruch.

2. Auf diesen ist dann Fall 1 oder Fall 2 anzuwenden.

Beispiel:

$\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}dx$ Grad des Zählers = 3, des Nenner = 2.

1)$x^3 - x^2 + 2x + 2 : x^2 - 1 = x - 1$ und $3x - 1$ Rest.

$\Rightarrow x^3 - x^2 + 2x + 2 : x^2 - 1 = x - 1 + \frac{3x-1}{x^2-1}$

$\Rightarrow \int xdx - \int 1dx + \int \frac{3x+1}{x^2-1}$

das letzte Integral muss man jetzt nochmals mit partiell Zerlegen:

$$\frac{\overbrace{3x+1}^{Grad1}}{\underbrace{x^2-1}_{Grad2}} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$3x + 1 = A(x - 1) + B(x + 1)$
$3x + 1 = Ax - A + Bx + B$
$3 = A + B$
$1 = -A + B$
$\Rightarrow B = 2; A = 1$
$\Rightarrow \int xdx - \int 1dx + \int \frac{1}{x+1} + \int \frac{2}{x-1} = \frac{x^2}{2} - x + ln|x + 1| + 2ln|x - 1|$

$$\underline{\underline{\int \frac{x^3-x^2+2x+2}{x^2-1}dx = \frac{x^2}{2} - x + ln|(x + 1) \cdot (x - 1)^2| + C}}$$

3 Funktionen in mehreren Variablen

3.1 Quadratische Form

Wenn es heißt: bestimmen sie den Wert a sodass die quadratische Form *irgendein Polynom* positiv definit ist, dann rechnet man das folgendermaßen:

Polynom: $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$

$$q(x,y,z) = (x,y,z) * \begin{pmatrix} R & R & R \\ R & R & R \\ R & R & R \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rx & Rx & Rx \\ Ry & Ry & Ry \\ Rz & Rz & Rz \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$Rx^2 + Rxy + Rxz| + Ryx + Ry^2 + Ryz| + Rzx + Rzy + rz^2$
Das soll kein Betragszeichen sein sondern einfach nur eine Optische Trennung.

3.2 Homogenität von Funktionen

Ein k-dimensionaler Vektorraum ist homogen wenn gilt:

$$f(\alpha \cdot x_1, ..., \alpha \cdot x_n) = \alpha^r \cdot f(x_1, ..., x_n)$$

Beispiel für eine nicht homogene Funktion:

$$\begin{gathered} f(x,y) = ax^2 + y \\ f(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = \alpha^r f(x,y) \\ a \cdot (\alpha x)^2 + \alpha y = \alpha^r (ax^2 + y) \\ a \cdot \alpha^2 x^2 + \alpha y = \alpha^r \cdot (ax^2 + y^2) \\ \underline{\underline{\alpha \cdot (\alpha x^2 + y) = \alpha^r \cdot (ax^2 + y)}} \end{gathered}$$

Diese Funktion ist nicht homogen da r keinen Wert annehmen kann damit die Gleichung richtig wäre.

3.3 Stetigkeit

Eine Funktion heißt stetig an der Stelle $\vec{x}_0 \in D$ falls $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ und stetig auf D wenn f an jeder Stelle in D Stetig ist $\lim\limits_{\vec{x},\vec{y} \to \vec{x}_0 \vec{y}_0} f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$

3.4 Grenzwert

Es existiert ein Gemeinsamer Grenzwert wenn:
$\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x,y)$

3.5 Tangentengleichung

Zur Berechnung der Tangente am Punkt x_0 gibt es folgende Formeln:

$\mathbb{R} : y = f(x_0) + f'(x) * (x - x_0)$
$\mathbb{R}^2 : z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$

Beispiel für R^2:
Für die Funktion $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ berechne man die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$

$f_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
$f_x(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$

$z = \sqrt{1 - 0.2^2 - 0.3^2} - \frac{0.2}{\sqrt{1-0.2^2-0.3^2}} * (x - 0.2) - \frac{0.3}{\sqrt{1-0.2^2-0.3^2}} * (y - 0.3)$

$z = 0.93 - 0.21x + 0.043 - 0.32y + 0.096$

$\underline{\underline{z = 1.07 - 0.21x - 0.32y}}$

3.6 implizite Funktionen

...sind Funktionen der Form $x^2y^2 - 1\underline{= 0}$ (**=irgendetwas** deutet auf eine implizite Form hin).
aus dem Hauptsatz für implizite Funktionen geht hervor das: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ ist.
Randbemerkung: $\frac{dy}{dx} = y'$; F_x = Ableitung nach x; F_y = Ableitung nach y

3.7 Taylorpolynom

$\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k(x_0)}{k!} * (x - x_0)^k$

d.h.: für die 2te Ordnung($\mathbb{R}^2$):

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{k=0} + \underbrace{f_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) * (y - y_0)}_{k=1}$$
$$+ \underbrace{\frac{f_{xx}(x_0, y_0) * (x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0) * (x - x_0) * (y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) * (y - y_0)^2}{2!}}_{k=2}$$

3.8 Richtungsableitung

Jede beliebige Ableitung z.B.:f_x leitet man immer Richtung des Ursprungs ab.
Wenn man jedoch vom Punkt $\vec{x}_0$ in ein bestimmte Richtung $P(-1,-1)$
Ableiten möchte spricht man hierbei von einer Richtungsableitung.
Man geht folgendermaßen vor:

Richtungsableitung: $grad\ f \cdot \vec{e}$

$grad\ f$: ist der Gradient der Funktion $grad\ f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ .. \\ .. \end{pmatrix}$

$\vec{e}$: Einheitsvektor. Dieser berechnet sich folgendermaßen: $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a}$.
$\vec{e}$ wird auch oft als $\vec{a_0}$ gekennzeichnet.
Leitet man Richtung Koordinatenachse ab so ist die Richtungsableitung auf der x-Richtung $gradf \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die y-Richtung $gradf \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel zur Richtungsableitung:

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 \begin{cases} \to f_x = 2x \\ \to f_y = 6y \end{cases} \qquad \vec{x_0} = (1,2)$$

Ableitung in Richtung $P(-1,-1)$

$$grad\ f = \begin{pmatrix} 2x \\ 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}} * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung: $grad\ f \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)*2+(-1)*12}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{-\frac{14}{\sqrt{2}}}}$

Hinweise:

$grad\ f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ .. \\ .. \end{pmatrix}$ eingesetzt mit Werten = die Richtung des max. Anstieges

Wert dieses Anstiegs: $|grad\ f| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + ...}$

3.9 Bestimmung der Extrema

1. Bildung der Partiellen Ableitungen erster Ordnung & 2ter Ordnung.

2. Bestimmung aller Nullstellen $\rightarrow$ alle Punkte welche für Extrema und Sattelpunkte in Frage kommen.

3. Jeden Punkt mit der Hessematix $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$ durchspielen.

   Es gilt:

   - $H_f < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt.
   - $H_f > 0$ & $f_{xx} \geq 0 \rightarrow$ pos. definit $\rightarrow$ Minimumpunkt.
   - $H_f > 0$ & $f_{xx} < 0 \rightarrow$ neg. definit $\rightarrow$ Maximumpunkt.

Beispiel:
Man bestimme alle relativen Extrema & Sattelpunkte von
$f(x,y) = (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2)$

<u>1)Bildung der Ableitungen</u>

0)$f(x,y) = (x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2)$
1)$f_x(x,y) = 2(x^2 + y^2) + 2x - 4x = 4x \cdot (x^2 + y^2 - 1)$
2)$f_y(x,y) = 4x^2y + 4y^3 - 4y = 4y(x^2 + y^2 - 1)$
3)$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 4y^2 - 4$
4)$f_{xy}(x,y) = 8xy$
5)$f_{yy}(x,y) = 4x^2 + 12y^2 - 4$

<u>2)Bestimmung der Nullstellen</u>

aus 1) $4x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$

1) in 2):

$x = 0: \quad 4y(0 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4y^3 - 4y = 0 \Rightarrow 4y(y^2 - 1) = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \pm\sqrt{1} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_1(0,0), \quad P_{2,3}(0,\pm 1), \quad P_{4,5}(\pm 1, 0)}}$

---

1) und 2) gleichsetzten:
$4x \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 4y \cdot (x^2 + y^2 - 1) \Rightarrow x = y$

in 1):
$4y(y^2 + y^2 - 1) = 0 \Rightarrow 8y^3 - 4y = 0 \Rightarrow 2y^3 - y = 0 \Rightarrow$
$y(2y^2 - 1) = 0 \begin{cases} y_1 = 0 \text{das wurde oben schon abgedeckt} \\ y_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1}} \end{cases}$

in 2):
$4x(x^2 + x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 8x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 2x^3 - x = 0$
$x(2x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \text{das wurde oben schon abgedeckt} \\ x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{1}} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{6-9}(\pm\frac{1}{\sqrt{1}}, \pm\frac{1}{\sqrt{1}})}}$

<u>3)Einsetzen aller Punkte in die Hessematrix</u>

$P_1(0,0): \quad \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2 - 4 & 8xy \\ 8xy & 4x^2 + 12y^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} =$

$(-4)*(-4) - 0*0 = 16 \Rightarrow H_f > 0 \& f_{xx} \leq 0 \rightarrow neg.definit \rightarrow Maximumpunkt.$

P_{2-9} :....

3.9.1 Berechnung der Extrema mit Nebenbedingungen (Lagrange Multiplikation)

Die Extremwerte einer Funktion $z = f(x, y)$, deren unabhängige Variablen x und y einer Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens wie folgt bestimmen:

1. Aus der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ und deren Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ wird zunächst die Hilfsfunktion $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$ gebildet. Der (noch unbekannte) Faktor λ heißt Langrangescher Multiplikationsfaktor.

2. Dann werden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} F_x = f_x(x, y - \lambda \cdot g_x(x, y) = 0 \\ F_y = f_y(x, y) - \lambda \cdot g_y(x, y) = 0 \\ F_\lambda = g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

   Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten Extremwerte sowie der Lagrangesche Multiplikationsfaktor λ berechnen.

3. Diese so ermittelten Punkte wieder in die Ursprungsgleichung $(f(x, y, z))$ einsetzen. Ist das Ergebnis != 0 so ist der Punkt ein Extremwert.

Bei diesem Verfahren muss man sehr aufpassen das man keinen Punkt übersieht es gibt immer mehrere Komponenten(x,y,z,λ,.. die man ermitteln kann. Diese ermittelten Komponenten muss man mit allen Kombinationen in die anderen Gleichungen einsetzten um so viele wie mögliche Punkte zu erhalten.

Beispiel
Bestimmen sie die stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) = x + y + z^2$ unter den Nebenbedingungen: $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ und $x - y = 1$

---

1) Bildung der Hilfsfunktion

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda \cdot g(x,y,z) - \mu \cdot h(x,y,z)$$

2) Bildung der partiellen Ableitungen erster Ordnung

$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x + y + z^2 - \lambda \cdot (x^2 - y^2 + z^2 - 1) - \mu \cdot (x + y - 1)$
$(1) F_x(x,y,z,\lambda,\mu) = 1 - \lambda 2x - \mu = 0$
$(2) F_y(x,y,z,\lambda,\mu) = 1 + \lambda 2y - \mu = 0$
$(3) F_z(x,y,z,\lambda,\mu) = 2z - 2\lambda z = 0$
$(4) F_\lambda(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$
$(5) F_\mu(x,y,z,\lambda,\mu) = -x - y = 0$

aus (3):
$z - \lambda z = 0 \Rightarrow z(\lambda - 1) = 0$
$\Rightarrow \underline{\underline{z = 0}}, \quad \underline{\underline{\lambda = 1}}$

aus (5): $x = -y$

$$\left.\begin{matrix} z = 0 \\ x = -y \end{matrix}\right\} \text{ in (4): } x^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{matrix}\right\} \text{ in (1): } 1 - 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \mu = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mu = 1 - \sqrt{2}}}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \mu = \pm(1 - \sqrt{2}) \end{matrix}\right\} \text{ in (2): } y = \tfrac{\mu - 1}{2} = \pm\tfrac{(1-\sqrt{2})-1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$P_1(+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; $\quad P_2(+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; $\quad P_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$; $\quad P_4(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$;

$$\lambda = 1 \left\{\begin{matrix} in(1): x = \frac{1-\mu}{2} \\ in(2): y = \frac{1+\mu}{2} \end{matrix}\right\} \text{in(5)} \Rightarrow \mu = -\tfrac{1}{2} \left\{\begin{matrix} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \text{in(4)} \Rightarrow z = -\sqrt{\tfrac{11}{4}}$$

$P_5(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, +\sqrt{\frac{11}{4}})$; $\quad P_6(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{11}{4}})$;

3) Diese Punkte in die Ursprungsgleichung einsetzen

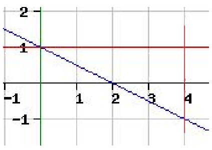
$P_1: \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 = 0 \Rightarrow$ kein Extrema
$P_2: \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 > 0 \Rightarrow$ Extrema
$P_3: \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 = 0 \Rightarrow$ kein Extrema
$P_4: \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 0^2 < 0 \Rightarrow$ Extrema
...

3.10 Bereichsintegrale

Das Blöde an Bereichsintegralen ist nicht das Integrieren selbst sondern das finden des Integrationsbereiches. Hier kann man Grundsätzlich 2 Fälle unterscheiden. Integration in Euklidischer Form und in Polarer Form. Die Polare Form bietet sich oftmals bei Winkelfunktionen und Kreisen an.
Es gibt verschiedene Wege die Integrationsgrenzen anzugeben:

1. als kartesisches Produkt $[a, b][c, d] \rightarrow \int\limits_{y}^{x} \int\limits_{c}^{d} ...dxdy$

2. als Funktionen z.b.: x=4, y=1 und x+2y=2



   hierbei sind die Integrationsgrenzen $\int\limits_{0}^{4} \int\limits_{1-\frac{x}{2}}^{1} \; dydx$. Wobei $\int\limits_{1-\frac{x}{2}}^{1} \; dy$ die Steigung der Blauen Linie ist.

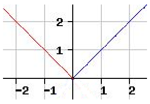
3. In Punkten dies wäre für das obige Beispiel: (0,1), (4,-1),(4,1) hier muss man sich dann vorher eine kleine Skizze machen und die Funktion $y = 1 - \frac{x}{2}$ selbst herleiten.

4. als Kreisformel $x^2 + y^2 \leq 1$ bei dieser Form ist es oft hilfreich die alles in Polarkoordinaten umzurechnen. siehe Bsp. unten

Beispiel:

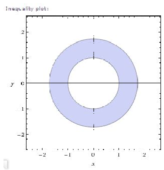
$\int\int_B xln(y)$ wobei $B = \{(x,y)|y \geq |x|$ und $1 \leq \underbrace{x^2 + y^2}_{r} \leq 3\}$
Hierbei bietet sich polar sehr gut an da ansonsten ein ziemlicher Wurzelkrieg ausbrechen würde.

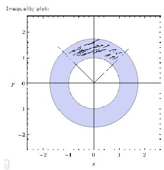
Aus $y \geq |x|$ folgt und diese beiden Linien entsprechen $\frac{\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$:



und $1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ ist ein Kreisring mit $r_1 = \sqrt{1}; r_2 = \sqrt{3}$:

=>





Hieraus ergeben sich folgende Grenzen: $\begin{cases} r - Grenzen : von \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{3\pi}{4} \\ \varphi - Grenzen : von 1 \rightarrow \sqrt{3} \end{cases}$
Da wir das ganze in Polardarstellung rechnen wollen müssen wir erst alle Werte umrechnen:
$x = r \cdot cos\varphi \quad y = r \cdot sin\varphi$

Weiters müssen wir noch die Funktionaldeterminate hinzuziehen da wir von Euklid nach polar umgewandelt haben.

$$\frac{\delta(x,y)}{\delta(r,y)} = det \begin{pmatrix} \overbrace{x_r}^{\text{x nach r Abgeleitet}} & \overbrace{x_\varphi}^{\text{x nach } \varphi \text{ Abgeleitet}} \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} cos\varphi & -r \cdot sin\varphi \\ sin\varphi & r \cdot cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$cos\varphi \cdot r \cdot cos\varphi + sin\varphi \cdot r \cdot sin\varphi = r \cdot \underbrace{(cos^2\varphi + sin^2\varphi)}_{=1} = r$ (Info: das ist immer r)

Daraus folgt jetzt unser Integral:
$$\int_1^{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \underbrace{r \cdot cos\varphi}_{x} \cdot \underbrace{ln(r \cdot sin\varphi)}_{ln(y)} \underbrace{r}_{Determinante} d\varphi dr$$
Substituieren $u = rsin\varphi \quad u' = -rcos\varphi \rightarrow d\varphi = -\frac{du}{rcos\varphi}$

$$\int_1^{\sqrt{3}} r^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} cos\varphi \cdot ln(u) - \frac{du}{rcos\varphi} dr$$
$$\int_1^{\sqrt{3}} -r \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} ln(u)dudr = \int_1^{\sqrt{3}} -r * u \cdot ln(u-1)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dr$$

$$-r(r \cdot sin\varphi \cdot ln(r \cdot sin\varphi - 1))|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \int_1^{\sqrt{3}} -r * 0 = \underline{\underline{0}}$$

3.11 Bogenlänge

Die Bogenlänge ist nichts anderes als die Länge einer Kurve.

<u>Bogenlänge:</u>

allgemein: $: L = \int\limits_a^b ||\vec{c}'(t)||dt = \int\limits_a^b \sqrt{c_1'(t)^2 + ... + c_n'(t)^2}dt$

in der Ebene: $\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}$

im Raum: $: L = \int\limits_a^b ||\vec{c}'(t)||dt = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt$

Wenn in der Angabe steht parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge, dann Soll man t berechnen. Wir berechnen hierbei das Intervall [a,b]

Beispiel:

1)Man Bestimme die Bogenlänge der Kurve $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi$

$$c_1' = 1 \overbrace{\rightarrow}^{c_i^2} 1$$
$$c_2' = -cos(t) \rightarrow cos^2(t)$$
$$c_3' = -sin(t) \rightarrow sin^2(t)$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^\pi ||c'(t)||dt = \int\limits_0^\pi \sqrt{1 + \underbrace{cos^2(t) + sin^2(t)}_{1}} = \int\limits_0^\pi \sqrt{2}dt = \sqrt{2}t = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi}}$$

2) Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, t \geq 0$$

$$c_1' = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{t*1} \rightarrow c_1'^2 = 4t + 4$$
$$c_2' = \frac{dy}{dt} = t \qquad \rightarrow c_1'^2 = t^2$$

$$\Rightarrow s = \int\limits_0^\infty \sqrt{t^2 + 4t + 4}dt = \int\limits_0^u t + 2dt = \frac{t^2}{2} + 2t|_0^\infty$$
$$\Rightarrow s = \frac{u^2}{2} + 2u \rightarrow 0 = u^2 + 4u - 4s \rightarrow u_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16s}}{2} = -2 \pm \sqrt{4+4s}$$

$-2 - \sqrt{4+4s}$ fällt flach da $t \geq 0$

$\underline{\underline{u = t = 2 + 2\sqrt{1+s}}}$ das jetzt noch in die Ursprungsgleichung einsetzen:

$$\underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{(-1+2\sqrt{1+s})^3}}{3} \\ \frac{(-2+2\sqrt{1+s})^2}{2} \end{pmatrix}}}$$

3.12 Kurvenintegral

Das Kurvenintegral ist nichts anderes als die Länge einer Kurve entlang einer Funktion. (Die Schnittmenge aus Funktion und Kurve)
Man unterscheidet jedoch Kurvenintegrale über skalarwertige Funktionen und über Vektorfelder.

allgemein: $\int_k f ds = \int\limits_a^b f(k(t)) \cdot |k'| dt$

Angewendet auf unsere Beispiele: $\int\limits_a^b f(c(t)) \cdot |c'(t)| dt$

Der Betrag eines Vektors: $\vec{c} = (x, y, z) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Beispiel:
Man Berechne das Kurvenintegral der Skalarwertigen Funktion f längs der Kurve $c(t)$
$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad \vec{c}(t) = (cos(t), sin(t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$

$$\vec{c}(t) = (cos(t), sin(t)) = \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_1' &= -sin(t) \overbrace{\Rightarrow}^{c_i^2} sin^2(t) \\ c_2' &= \quad cos(t) \Rightarrow cos^2(t) \\ \Rightarrow ||c'(t)|| &= \sqrt{\underbrace{sin^2(t) + cos^2(t)}_{1}} = 1 \end{aligned}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{cos(t) \cdot sin(t)}{cos^2(t) + sin^2(t)}}_{=1} \cdot \underbrace{1}_{||c'(t)||} dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t) \cdot sin(t) dt$$

Mit Substitution: $u = sin(t) \Rightarrow dt = \frac{du}{cos(t)}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} u du = \frac{u^2}{2} = \frac{sin^2(t)}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{0,5}}$$

3.13 Integratibilitätsbedingung

Ist die Integratibilitätsbedinung erfüllt so liegt ein Gradientenfeld vor und somit gibt es eine Stammfunktion. Weiters ist die Integratibilitätsbedinung ein Hinweis auf Wegunabhängigkeit. Hierbei müssen jedoch die Funktionen stetig sein, sprich keine Polstellen aufweisen.

$\frac{\delta f_i}{\delta x_j} = \frac{\delta f_j}{\delta x_i} \to \frac{\delta f_1}{\delta y} = \frac{\delta f_2}{\delta x}$ / $\frac{\delta f_2}{\delta z} = \frac{\delta f_3}{\delta y}$ / $\frac{\delta f_3}{\delta x} = \frac{\delta f_1}{\delta z}$
Wenn alle das gleiche ergeben folgt Wegunabhängigkeit.

Beispiel:
Teste $\int cos(x)dx + e^{-y}dy + z^2dz$ auf Wegunabhängigkeit.

$\frac{\delta f_1}{\delta y} = \frac{\delta f_2}{\delta x} \Rightarrow \frac{\delta cos(x)}{\delta y} = \frac{\delta e^{-y}}{\delta x} \Rightarrow \underline{\underline{0 = 0}}$

$\frac{\delta f_2}{\delta z} = \frac{\delta f_3}{\delta y} \Rightarrow \frac{\delta e^{-y}}{\delta z} = \frac{\delta z^2}{\delta y} \Rightarrow \underline{\underline{0 = 0}}$

$\frac{\delta f_3}{\delta x} = \frac{\delta f_1}{\delta z} \Rightarrow \frac{\delta z^2}{\delta x} = \frac{\delta cos(x)}{\delta z} \Rightarrow \underline{\underline{0 = 0}}$

3.14 Stammfunktion

Finden der Stammfunktionen:

1. Interatibilitätsbedingung prüfen, wenn diese korrekt ist existiert auch eine Stammfunktion F mit $F_x = f_1$und$F_y = f_2$.
2. F_x nach dx Integrieren, hierbei erhält man eine Konstante c(y) diese ist jedoch von y Abhängig. $\odot$
3. Diese nach dx Integrierte Funktion nach y ableiten $F_y(x, y)$ somit erhält man die Konstante $c'(y)$
4. Die 2te $F_y(x, y)$ Funktion steht in der Angabe.
5. Jetzt beiden $F_y(x, y)$ - Funktionen gleichsetzen und $c'(y)$ ausrechnen.
6. Diesen $c'(y)$ nach dy integrieren somit bekommt man ein neue Konstante d welche von x und y unabhängig ist $\otimes$.
7. die Stammfunktion lautet somit $\odot + \otimes$

Beispiel:

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \overbrace{3x^2 + 4xy - 3y^2}^{F_x \Rightarrow f_1} \\ \underbrace{2x^2 - 6xy - 3y^2}_{F_y \Rightarrow f_2} \end{pmatrix}$$

1) Integratibilitätsbedingung:

$\frac{\delta f_1}{\delta y} = 4x - 6y = \frac{\delta f_2}{\delta x}$

$\Rightarrow$ Integratibilitätsbedingung erfüllt $\Rightarrow$ es existiert eine Stammfunktion F mit $F_x = f_1 \text{und} F_y = f_2$

2) F_x nach dx Integrieren

$F(x,y) = \int f_1(x,y)\underline{dx} = \int 3x^2 + 4xy - 3y^2 = \underbrace{\overbrace{x^3 + 2x^2y - 3xy}^{\odot} + \overbrace{c(y)}^{\otimes}}_{*}$

3) Integral nach y ableiten:
$(1) F_y(x,y) = \underbrace{2x^2 - 6xy + c'(y)}_{*'}$

4) zweites F_y :
$(2) F_y(x,y) = 2x^2 - 6xy - 3y^2$ dieses folgt aus der Angabe.

5)(1)&(2) gleichsetzen
$2x^2 - 6xy + c'(y) = 2x^2 - 6xy - 3y^2 \Rightarrow c'(y) = -3y^2$

6)$c'(y)$ nach y auf integrieren.

$c(y) = \int c'(y)dy = -3\int y^2 dy = \overbrace{-y^3 + d}^{\otimes_1}$

7)
$\underline{\underline{\text{Stammfunktion} = \underbrace{x^3 + 2x^2y - 3xy^2}_{\odot} \underbrace{-y^3 + d}_{\otimes_1}}}$

Das Potential ist die Negative Stammfunktion $\underline{\underline{-F = x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3}}$.

4 Differenzengleichung

4.1 Differenzengleichung 1.Ordnung

1. für Lineare Differenzengleichungen 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Gestalt $x_{n+1} = ax_n + \underbrace{b}_{\otimes}, n = 0, 1, 2, ...$ gilt:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\frac{a^n-1}{a-1}, & \text{wenn } a \neq 1 \\ x_0 + b \cdot n, & \text{wenn } a = 1 \end{cases}$$

   a und b sind konstante Koeffizienten(1,3,5,7.9,...).
   x_0 ist der gegebene Anfangswert.
   $\otimes$: wenn b nicht von n abhängig ist, sprich konstant ist(z.B.: $x_{n+1} = 5x_n + 7$).

2. Lineare Differenzengleichungen k-ter Ordnung allgemeine Formel:

$$x_{n+1} = a_n x_n + \underbrace{b_n}_{\otimes}.$$

   a_n und b_n sind beliebig reelle Funktionen in n, also reelle Funktionen.
   Wenn $b_n = 0$ für alle $n \in N$ folgt homogen ($x_{n+1} = a_n x_n, \quad n = 0, 1, 2...$) sonst inhomogen ($x_{n+1} = a_n x_n + b_n$).
   $\otimes$ diese Formel verwendet man wenn b von n abhängig ist, sprich nicht Konstant ist(z.B.: $x_{n+1} = 5x_n + 7^n$).

2.1 Die einer inhomogenen Differenzengleichung 1.Ordnung ($x_{n+1} = a_n x_n + b_n$) zugehörige allgemeine Lösung ist $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.
$x_n^{(h)} = C \prod_{i=0}^{n-1} a_i$:homogene Lösung.
$x_n^{(p)}$: inhomogene Lösung berechnung durch

- Variation der Konstanten $x_n^{(p)} = C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$ (Homogenes C auf C_n erweitern und C_n durch einsetzen berechnen).
- Methode des unbestimmten Ansatz

Beispiel zu 1: Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung
$x_{n+1} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{a} x_n + \underbrace{1}_{b}, \quad n \geq 0$ zum Anfangswert $x_0 = 0$

Allgemein: $x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\frac{a^n-1}{a-1}, & \text{wenn } a \neq 1 \\ x_0 + b \cdot n, & \text{wenn } a = 1 \end{cases}$

---

allgemeine Lösung:
$x_n = (\frac{2}{3})^n x_0 + \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{\frac{2}{3}-1} =$

$x_n = (\frac{2}{3})^n x_0 + \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{-\frac{1}{3}} =$

$x_n = (\frac{2}{3})^n x_0 - 3 * (\frac{2}{3})^n + 3$

$\underline{\underline{x_n = (\frac{2}{3})^n \cdot \underbrace{(x_0 - 3)}_{c} + 3}}$

Lösung zu Startwert $x_0 = 6$
$x_0 = 6\ ,\ n = 0$

$x_0 = (\frac{2}{3})^0 \cdot c + 3$
$6 = 1c + 3 \Rightarrow \underline{\underline{c = 3}}$

$\underline{\underline{x_n^{(p)}}} = (\frac{2}{3}) * 3 + 3 = \underline{\underline{\frac{2^n}{3^{n-1}} + 3}}$

Beispiel zu 2: Differenzengleichung allgemeine Form:

Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung
$x_{n+1} = \underbrace{3^{2n}}_{a_n} \cdot x_n + \underbrace{3^{n^2}}_{b_n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$

Allgemein:
$x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$
homogene Lösung:$x_n^{(h)} = C \prod_{i=0}^{n-1} a_i$
partikuläre Lösung mit Variation der Konstanten:$x_n^{(p)} = C_n \prod_{i=0}^{n-1} a_i$

---

homogene Lösung:
$x_n^{(h)} = C \prod_{i=0}^{n-1} a_i = C \prod_{i=0}^{n-1} 3^{2i} = C \cdot 3^{2 \cdot \frac{n*(n-1)}{2}} = \underline{\underline{C \cdot 3^{n \cdot (n-1)}}}$

partikuläre Lösung:
Ansatz: $x_n^{(p)} = C_n \cdot 3^n(n-1)$ diesen muss man in die Ursprungsgleichung einsetzen.

$\underbrace{C_{n+1} \cdot 3^{(n+1)((n+1)-1)}}_{x_{n+1}} = 3^{2n} \cdot \underbrace{C_n 3^{n(n-1)}}_{x_n} + 3^{n^2}$
$C_{n+1} \cdot 3^{n^2+n} = 3^{2n+n(n-1)} C_n + 3^{n^2}$
$C_{n+1} \cdot 3^n = 3^{2n-n} C_n + 1$

$\underline{\underline{C_{n+1} = C_n + \frac{1}{3^n}}}$

$C_{n+1} = C_n + \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... \Rightarrow$ geometrische Reihe $s_n = a_n \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$
$\Rightarrow \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = (1 - \frac{1}{3^n}) \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x_n^{(p)} = (1 - 1\frac{1}{3^n}) \cdot \frac{3}{2} \cdot 3^{n(n-1)}$

$\Rightarrow$ Lösungsgesamtheit: $\underline{\underline{x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C \cdot 3^{n(n-1)} + (1 - \frac{1}{3^n}) \cdot \frac{3}{2} \cdot 3^{n(n-1)}}}$

4.2 Differenzengleichung 2.Ordnung

- allg. Form: $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = s_n$
  a, b Konstanten $\in R, s_n =$ Störfunktion, wenn $s_n = 0$ für alle $n \in N \Rightarrow$ homogen sonst inhomogen.
- Lösungsgesamtheit: $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$
- Entwicklungsschritte:
  1. Bestimmung der allgemeinen Lösung $x_n^{(h)}$
  2. Bestimmung der partikulären Lösung $x_n^{(p)}$
  3. Bestimmung der Lösungsgesamtheit $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$
  4. Mittels Anfangswerten Konstanten berechnen.
  5. Lösungsgesamtheit mit ausgerechneten Werten neu anschreiben.

4.2.1 Differenzengleichung 2.Ordnung homogenen Typ

Bestimmung der homogenen Lösung $x_n^{(h)}$ mittels Charakteristischer Gleichung:
$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \Rightarrow$:

$$x_n^{(h)} = \begin{cases} 1) C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \\ 2) r^n (C_1 cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in C \\ 3) (C_1 + C_2 n) \cdot \lambda^n & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \end{cases}$$

falls 2: muss man das λ-Ergebnis in Polardarstellung umwandeln

1. λ-Ergebnis $= \underbrace{a}_{a} \pm \underbrace{\sqrt{...}}_{b}\, i$
2. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = E_1$
3. $\varphi = arctan \frac{GK}{AK} = arctan \frac{Im}{Re} = arctan \frac{b}{a} = E_2$

$$\varphi = \begin{cases} arctan(\frac{b}{a}), & \text{wenn } a > 0 \\ arctan(\frac{b}{a}) + \pi, & \text{wenn } a < 0, b \geq 0 \\ arctan(\frac{b}{a}) - \pi, & \text{wenn } a < 0, b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{wenn } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

4. Einsetzen $E_1^n \cdot (C_1 cos(n \cdot E_2) \pm C_2 sin(n \cdot E_2))$

Beispiel:

Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der homogenen Differenzengleichung.

$$\begin{array}{c} \text{(a) } x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0 \\ \text{(b) } x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0 \\ \text{(c) } x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0 \end{array}$$

---

a) $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \tfrac{7\pm\sqrt{49-4\cdot 12}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$$

$\underline{\underline{x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1 4^n + C_2 3^n}}$

---

b) $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \tfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \overbrace{-\frac{1}{2}}^{a} + \overbrace{\sqrt{\frac{3}{4}}}^{b} i \\ \lambda_2 = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{a} - \underbrace{\sqrt{\frac{3}{4}}}_{b} i \end{cases} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \in C$$

$\Rightarrow x_n = r^n(C_1 cos(n\varphi) + C_2 sin(n\varphi))$

$z = r(cos(\phi) + sin(\phi)), \qquad r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

Da a<1 ist: $\varphi_1 = arctan(\frac{b}{a}) + \pi = \frac{2\pi}{3}; \varphi_2 = arctan(\frac{b}{a}) - \pi = -\frac{2\pi}{3}$

$\lambda_{1,2} = 1(cos(\frac{2\pi}{3}) + isin(\frac{2\pi}{3}))$

sin und cos sind Vorzeichenneutral: $\underline{\underline{C_1 cos(\frac{2n\pi}{3}) + C_2 sin(\frac{2n\pi}{3})}}$

(c) $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2} = 4, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 \in R$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n = (C_1 + C_2 n)4^n}}$

4.2.2 Differenzengleichung 2.Ordnung inhomogenen Typ

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = s_n \Longleftrightarrow a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = s_n$$

Lösungsweg:

1. Lösung der homogenen Gleichung (siehe oben)

2. Lösung der partikulären Gleichung über Versuchslösung abhängig von der Störfunktion.

s_n	Versuchslösung $a_n^{(p)}$
1	A
r^n	Ar^n
$sin(rn)/cos(rn)$	$Asin(rn) + Bcos(rn)$
$n^k oder Polynom Grad k$	$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + ...A_k n^k$
$n^k * r^n$	$(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + ...A_k n^k) \cdot r^n$

(Hinweis: Falls die Störfunktion eine zusammengesetzte Form wie $2^{n-1} - 6n5^n$ hat kann man diese einfach in zwei Teile aufteilen$x_{n1}^{(p)} = 2^{n-1}$ und $x_{n2}^{(p)} = 6n5^n$, berechnen und danach wieder zusammenführen $\Rightarrow$ folgt aus Superpositionsprinzip).

2.1 Berechnung der Konstanten durch einsetzen der Versuchslösung in die Ursprungsgleichung

3. Zusammenführen $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ (Bei geteilten partikulären Anteil $a_n = a_n^{(h)} + a_{n1}^{(p)} + a_{n2}^{(p)}$)

3.1 Mittels Anfangswerte die Konstanten berechnen. Es müssen mindestens n Anfangswerte für n Konstanten vorhanden sein. (Hinweis: wenn steht $(n \geq 2,\ x_0 = 1)$ muss als $x_n = 1$ und als n=0 genommen werden auch wenn $n \geq 2$ steht).

4. Formel für a_n vollständig anschreiben.

Beispiel:
Man bestimme die Lösung nachstehender Differenzengleichung zu vorgegebener Anfangsbedingung.

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = \underbrace{36}_{s_n}, \qquad x_0 = 6,\ x_1 = 3$$

<u>homogene Lösung:</u>

$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 0$
$\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144+4*4*7}}{8} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{7}{2} \end{cases} \quad , \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$
$\Rightarrow \underline{\underline{x_n^{(h)} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1(\frac{1}{2})^n + C_2(-\frac{7}{2})^n}}$

<u>partikuläre Lösung:</u>

Störfunktion $s_n = 36 \Rightarrow$ Ansatz: $x_n^{(p)} = A$ Das in die Ursprungsgleichung einsetzen ergibt:

$4A + 12A - 7A = 36 \Rightarrow A = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_n^{(p)} = 4}}$
(Hinweis: wenn in der Versuchslösung ein
n vorkommt muss dieses bei x_{n+1} auf (n+1) bei x_{n+2} auf (n+2) ersetzt werden.)

<u>Allgemeine Lösungsgesamtheit:</u>

$\underline{\underline{x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)} = C_1(\frac{1}{2})^n + C_2(-\frac{7}{2})^n + 4}}$

<u>spezielle Lösung mit gegebenen Anfangsbedingungen</u>

$x_0 = 6, \quad x_1 = 3$

I: $\underbrace{x_0 = 6}_{n=0; x_n=6}$ $: 6 = C_1(\frac{1}{2})^0 + C_2(-\frac{7}{2})^0 + 4 \Rightarrow 2 = C_1 + C_2 \Rightarrow \underline{C_2 = 2 - C_1}$
II: $\underbrace{x_1 = 3}_{n=1; x_n=3}$ $: 3 = C_1(\frac{1}{2})^1 + C_2(-\frac{7}{2})^1 + 4 \Rightarrow -2 = C_1 - 7C_2 \Rightarrow \underline{C_1 = 7C_2 - 2}$

I in II:
$C_1 = 7(2 - C_1) - 2$

$\underline{\underline{C1 = \frac{3}{2}}} \Rightarrow \underline{\underline{C_2 \frac{1}{2}}}$

$\underline{\underline{x_n = \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}(-\frac{7}{2})^n + 4}}$

5 Differenzialgleichung

5.1 Allgemeine Begriffe

Allgemein heißt eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}) = 0$$

für eine Funktion y(x) und deren Ableitungen $y'(x), y''(x), ...y^{(k)}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung.
Unter einer Lösung (einem Integral) der Differentialgleichung verstehen wir eine Funktion y(x), welche mit ihren Ableitungen die gegebene Gleichung erfüllt.
Man Unterscheidet:

- Die **allgemeine Lösung** enthält beliebig wählbare Parameter C_1, C_2.. und entspricht einer Schar von Lösungskurven.
- Eine **partikuläre Lösung** erhält man durch spezielle Whal der Parameter zu vorgegebenen Anfangsbedingungen, also durch Auswahl einer bestimmten Lösungskurve.
- Die **singuläre Lösung** gehört keiner Lösungsschar an. Sie kann <u>nicht</u> durch geeignete Wahl von C gewonnen werden.

Beispiel:

Man zeige das $C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{ln(x)}{x}$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 3, \quad y'(1) = -2$?

Erster Schritt erste und 2te Ableitung der Lösung bilden.

$y = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{ln(x)}{x}$
$\underline{y' = -C_1\frac{1}{x^2} + C_2\frac{1-ln(x)}{x^2}}$ $\qquad$ $\underline{y'' = C_1\frac{2}{x^3} + C_2\frac{-3+2ln(x)}{x^3}}$

Diese Ergebnisse in die Ursprungsgleichung einsetzen:

$x^2(C_1\frac{2}{x^3} + C_2\frac{-3+2ln(x)}{x^3}) \ + \ 3x(-C_1\frac{1}{x^2} + C_2\frac{1-ln(x)}{x^2}) + y = 0$ ausrechnen und umformen ergibt: $\underline{\underline{y_h = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{ln(x)}{x}}}$ Q.E.D.

zu: Wie lautet die partikuläre Lösung:
$y(1) = 3 : C_1\frac{1}{1} + C_2\frac{ln(1)}{1} \Rightarrow \underline{\underline{C_1 = 3}}$

$y'(1) = -2 : -\underbrace{C_1}_{3}\frac{1}{1^2} + C_2\frac{1-ln(1)}{1^2} \Rightarrow \underline{\underline{C_2 = 1}}$

Das ganze noch einsetzten:
$\underline{\underline{y_p(x) = \frac{3}{x} + \frac{ln(x)}{x}}}$= partikuläre Lösung

5.2 lineare Differenzialgleichung 1.Ordnung

allgemeine Form:

$$\underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}} + \underbrace{a(x)}_{Funktion}\ y = \begin{cases} 0 & homogen \\ \underbrace{s(x)}_{\text{Störfunktion}} & inhomogen \end{cases}$$

<u>Lösungsschritte:</u>

1. Lösung der homogenen Gleichung $y' + a(x)y = 0$ durch Trennung der Variablen (dx , dy jeweils auf eine Seite bringen) (Hinweis $y' \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}$):

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = a(x)dx$$

2. Integration links nach dy rechts nach dx. Die dabei entstehenden Konstanten gleich mit Logarithmus (ln(c)) anschreiben.

3. Auflösung nach y wenn möglich (am Schluss sollte z.B.: $y_h(x) = \frac{c}{x}$ stehen). Folgende Rechenregeln kommen einen dabei zu gute:
   - $ln(a) + ln(b) = ln(a \cdot b)$
   - $ln(a) - ln(b) = ln(\frac{a}{b})$
   - $n \cdot ln(a) = ln(a^n)$
   - $ln(e^n) = n$
   - $e^{ln(a)} = a$
   - Entlogarithmieren: $ln(a) = b \Rightarrow a = e^b$
   - Entlogarithmieren $ln(a) = ln(b) \Rightarrow a = b$

4. Findung einer partikulären Lösung durch Variation der Konstanten. Konstante C der homogenen Lösung wird zur Funktion C(x)(z.b.: $y_h(x) = \frac{c}{x}$ wir zu $y_p(x) = \frac{c(x)}{x}$).

5. Die partikuläre Lösung Ableiten nach x ableiten um y_p' zu gewinnen.

6. Einsetzen der partikulären Lösung (y_p & y_p') in die Ursprungsgleichung und Funktion C(x) ermitteln. (Falls man "nur"$C'(x)$ ermitteln kann muss man diese $C'(x)$ nach dx integrieren um $C(x)$ zu erhalten)

7. Die so ermittelte Funktion $C(x)$ in die partikulären Lösung einsetzten.

8. homogene und partikuläre zur Lösungsgesamtheit zusammenführen. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

9. Anfangswerte einsetzen $y\overbrace{(5)}^{x-Wert} = \overbrace{2}^{y-Wert}$ und C berechnen

10. Ergebnis Anschreiben (homogene & partikuläre mit expliziten C)

Beispiel:
Man bestimme die partikuläre Lösung der Differenzengleichung:
$y' + \underbrace{cos(x)}_{a_x} y = \underbrace{sin(x)cos(x)}_{s_n}$ Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

---

homogene Gleichung $y' + cos(x)y = 0$ mittels Trennung der Variablen lösen

$\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = -ycos(x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -cos(x)$

$\int \frac{1}{y} dy = -\int cos(x)dx$

$ln|y| + C_1 = -sin(x) + C_2 \Rightarrow ln|y| = ln(e^{-sin(x)}) + ln|c|$

$\underline{\underline{y_h(x) = e^{-sin(x)} \cdot C}}$

Daraus folgt der Partikuläre Ansatz: $y_p(x) = C(x) \cdot e^{-sin(x)}$

$\underline{y'_p(x) = C'(x) \cdot e^{-sin(x)} - C(x) \cdot e^{-sin(x)} \cdot cos(x)}$

Einsetzen in inhomogene Gleichung (sprich Ursprungsgleichung):

$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-sin(x)} - C(x) \cdot e^{-sin(x)} \cdot cos(x)}_{y'} + \underbrace{C(x) \cdot e^{-sin(x)}}_{y} = \underbrace{sin(x)cos(x)}_{s_n}$

$C'(x) = sin(x)cos(x)e^{sin(x)}$

$C(x) = \int sin(x)cos(x)e^{-sin(x)}$ Substituieren: $u = sin(x),\ dx = \frac{du}{u'} = \frac{du}{cos(x)}$

$C(x) = \int \underbrace{u}_{u} \underbrace{e^u du}_{dv}$ mittels partieller Integration ($\int udv = uv - \int v\ du$):

$u = u \Rightarrow du = 1; dv =^u \Rightarrow v = \int e^u = e^u$

$ue^u - \int e^u \cdot 1du = ue^u - e^u$ rücksubstituieren:

$\underline{\underline{C(x) = cos(x)e^{cos(x)} - e^{cos(x)}}} \Rightarrow y_p(x) = \underbrace{(cos(x)e^{cos(x)} - e^{cos(x)})}_{C(x)} \cdot e^{-sin(x)}$

$\underline{\underline{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-sin(x)}C + e^{cos(x)-sin(x)}(cos(x) - 1)}}$

Anfangswert einsetzten und C berechnen:

$y(0) = 1: \quad 1 = e^{-sin(0)}C + e^{cos(0)-sin(0)}(cos(0) - 1) \Rightarrow \underline{\underline{C = 1}}$

$\underline{\underline{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-sin(x)} + e^{cos(x)-sin(x)}(cos(x) - 1)}}$

Beispiel:
man löse die Differenzialgleichung durch Trennung der Veränderlichen

$$4x\ dy - y\ dx = y\ dx$$

$4x\ dy - x^2 dy = y\ dx$

$dy \cdot (4x - x^2) = ydx$ |:dx

$\frac{dy}{dx} \cdot (4x - x^2) = y$

$\frac{4x-x^2}{dx} = y\ dy$ Kehrwert

$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{4x-x^2} dx$ Partialbruchzerlegung:

$\frac{1}{4x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} \Rightarrow A = -\frac{1}{4},\quad B = \frac{1}{4}$

$\int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-4} dx$

$ln|y| + C = -\frac{1}{4} ln|x| + \frac{1}{4} ln|x-4| + C$

$ln|y| = ln|x^{-\frac{1}{4}} \cdot (x-4)^{\frac{1}{4}} \cdot c|$

$\underline{\underline{y_h(x) =}} x^{-\frac{1}{4}} \cdot (x-4)^{\frac{1}{4}} \cdot c = \frac{\sqrt[4]{x-4}}{\sqrt[4]{x}} C = \underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{x-4}{c}} C}}$

5.3 lineare Differenzialgleichung 2.Ordnung

$$\text{allgemeine Form: } y'' + ay' + by = s(x) \begin{cases} s(x) = 0 & homogen \\ s(x) \neq 0 & inhomogen \end{cases}$$

Lösungsschritte:

1. Bestimmung homogene Gleichung mittels charakteristischer Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b\lambda = 0$

$$y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \\ e^{\alpha x} \cdot (C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x)) & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in C \\ (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \in R \end{cases}$$

2. Ermittlung der partikulären Lösung mittels Versuchslösung durch s(x)

$s(x)$	Versuchslösung $y_p(x)$
1	A
e^{rx}	Ae^{rx}
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_k x^k$
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...a_k x^k) e^{rx}$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_k x^k) \cdot e^{rx}$
$sin(rx)/cos(rx)$	$A_0 sin(rx) + A_1 cos(rx)$
$sin(rx) \cdot e^{rx}$	$(A_0 sin(rx) + A_1 cos(rx)) e^{rx}$

2.1 Bestimmung der Ableitungen aus der Versuchslösung $y_p'(x) \& y_p''(x)$....

2.2 Einsetzen der Ableitungen in Ursprungsgleichung zur Bestimmung der Konstanten (A)

3. zusammensetzen der homogenen und partikulären Lösung

Beispiel zum homogenen Fall:
Man löse die folgenden linearen homogenen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}(a) y'' - 8y' - 20y = 0\\ (b) y'' + 8y' + 16y = 0\\ (c) y'' - 8y' + 25y = 0\end{aligned}$$

(a)
$y'' - 8y' - 20y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 20 = 0$
$\lambda_{12} = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R \Rightarrow$ Ansatz: $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$\underline{\underline{y_n(x) = C_1 e^{10x} + C_2 e^{-2x}}}$

(b)
$y'' + 8y' + 16y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$
$\lambda_{12} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \lambda_{12} = -4$

$\lambda_1 = \lambda_2 \in R \Rightarrow$ Ansatz: $y_n(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$

$\underline{\underline{y_n(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-4x}}}$

(c)
$y'' - 8y' + 25y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 25 = 0$
$\lambda_{12} = \frac{8 \pm \sqrt{64-100}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \overbrace{4}^{\alpha} + \overbrace{3}^{\beta} i \\ \lambda_2 = 4 - 3 i \end{cases}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in C \Rightarrow$ Ansatz: $y_n(x) = e^{\alpha x}(C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x))$

$\underline{\underline{y_n(x) = e^{4x}(C_1 cos(3x) + C_2 sin(3x))}}$

Beispiel zum inhomogenen Fall:

Löse die Differenzialgleichung $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

---

homogenen Lösung:

$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4*4}}{2} = \lambda = -2$

$\lambda_1 = \lambda_2 \in R \Rightarrow \underline{\underline{y_h(x) = (C_1 + C_2)e^{\lambda x} = (C_1 + C_2)e^{-2x}}}$

---

partikuläre Lösung:
Störfunktion $s_n = e^{-2x} \Rightarrow$ Ansatz: $y_p(x) = Ae^{-2x}$

$y_p(x) = Ae^{-2x} \Rightarrow y_p'(x) = -2Ae^{-2x} \Rightarrow y_p''(x) = 4Ae^{-2x}$

Einsetzen in Ursprungsgleichung:

$\underbrace{4Ae^{-2x}}_{y''} + 4\underbrace{(-2Ae^{-2x})}_{y'} + 4\underbrace{Ae^{-2x}}_{y} = e^{-2x}$

$\underline{\underline{0 = 0}} \Rightarrow$ Resonanzfall Versuchslösung mit x Multiplizieren

---

neuer Ansatz: $y_p(x) = xAe^{-2x}$
$y_p'(x) = Ae^{-2x} - 2xAe^{-2x} \Rightarrow y_p''(x) = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4xAe^{-2x}$

Einsetzen in Ursprungsgleichung:

$-2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4(Ae^{-2x} - 2xAe^{-2x}) + 4xAe^{-2x} = e^{-2x}$
$\underline{\underline{0 = 0}} \Rightarrow$ Resonanzfall Versuchslösung mit x Multiplizieren

---

neuer Ansatz: $y_p(x) = x^2Ae^{-2x}$
$y_p'(x) = 2xAe^{-2x} - 2x^2Ae^{-2x}$
$y_p''(x) = 2Ae^{-2x} - 4xAe^{-2x} - 4xAe^{-2x} + 4x^2Ae^{-2x}$

Einsetzen in Ursprungsgleichung:

$2Ae^{-2x} - 8xAe^{-2x} + 4x^2Ae^{-2x} + 8xAe^{-2x} - 8x^2Ae^{-2x} + 4x^2Ae^{-2x} = e^{-2x}$

$\underline{\underline{A = \frac{1}{2}}} \Rightarrow y_p(x) = \frac{x^2 * e^{-2x}}{2}$

Lösungsgesamtheit:
$\underline{\underline{y_(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C_1 + C_2)e^{-2x} + \frac{x^2 * e^{-2x}}{2}}}$