# Beweisen

qed

# Vollständige Induktion

zur Wiederholung: $P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow P(n)$

$P(0)$ Induktionsanfang: 0 oder welche Zahl auch immer in der Angabe steht in die Bedingung auf beiden Seiten einsetzen, ausrechnen

$P(n)$ Induktionsvoraussetzung: Entspricht der Angabe

$P(n+1)$ Induktionsbehauptung: Angabe mit $n+1$

$P(n) \rightarrow P(n+1)$ Induktionsschritt: Die Behauptung durch umformen beweisen.

Klingt jetzt einfach aber Achtung 1) Manche Profs wollen nur durch Umformen einer Seite die andere zeigen!

2) Bei $\sum$: beim einsetzen in $P(n)$ achtung wo $\sum_{i=0}^{n}$ $i, n$ stehen!

Eventuell $\sum^{n+1}$ einsetzen, dann letzten Summand rausziehen in $\sum^{n} + a_n$ und dann $\sum^{n}$ durch die Seite, wo keine Summe ist ersetzen

3) bei $<, >$ Zeichen: hier ist keine Äquivalenz sondern ein $n > \dots$ zu ~~zeigen~~
(Idealerweise wenn in der Angabe steht $\forall n \geq 1$ sollte $n \geq 1$ rauskommen.

4) bei Teilbarkeit (modulo) → Induktionsanfang einsetzen!

$\boxed{\text{BSP}}$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} < 3 - \frac{n+3}{2^n}$

IA: $P(1)$: $\frac{1}{2^1} < 3 - \frac{4}{2^1}$

$\frac{1}{2} < 1$ ✓

IV: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} < 3 - \frac{n+3}{2^n}$

IB: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} < 3 - \frac{(n+1)+3}{2^{(n+1)}}$

IS: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} < 3 - \frac{(n+4)}{2^n \cdot 2}$

$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}} + \frac{(n+1)}{2^{n+1}} < 3 - \frac{n+4}{2^n \cdot 2}$

$\cancel{3} - \frac{n+3}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} < \cancel{3} - \frac{n+4}{2^n \cdot 2} \quad | \cdot (-1)$

$\frac{n+3}{2^n} - \frac{n+1}{2^n 2} > \frac{n+4}{2^n \cdot 2} \quad | \cdot 2^n$

$n+3 - \frac{n+1}{2} > \frac{n+4}{2} \quad | \cdot 2$

$2(n+3) - n+1 > n+4 \quad | -n$

$2n+6 - n + 1 > n+4$

$5 > 4$ wA qed ✓

# Aussagen

"Beweisen sie, das folgende Formel gilt"

1) mittels Wahrheitstafel

2) durch Umformen

Tipp: Lerne $\wedge, \vee, \equiv, \ldots$ etc auswendig

Achtung "$\Rightarrow$" $\not\equiv$ "$\Leftrightarrow$"

"$\Leftrightarrow$" $\equiv$ "$\equiv$"

# Relationen

"Beweisen sie, das folgende Relation gilt"

1) Welche Relation soll bewiesen werden?

a) Äquivalenzrelation → Zeige RST

b) Halbordnung → Zeige RAT

c) Totalordnung / Wohlordnung → Zeige Halbordnung + "je 2 Elemente vergleichbar"

# Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Zur Wiederholung

Injektiv : $a_1 \neq a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ $\quad a_1, a_2 \in A$

Surjektiv: $\forall b \in B \; \exists a \in A : \; b = f(a)$

Bijektiv: wenn injektiv & surjektiv

1) Injektivität beweisen:

$g(b) = c$ $\quad (g \circ f)(a) = g(f(a))$ $\quad$ 1) $g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow a = b$

$f(a) = b$ $\quad (g \circ f)(b) = g(f(b))$ $\quad$ 2) $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$f(a) = f(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b)) \Rightarrow a = b$

2) Surjektivität beweisen:

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = C$

$f(a) = b \Rightarrow g(f(a)) = g(b) = c$

$c \in C, a \in A, b \in B$ mit $g(b) = c \Rightarrow$ surjektiv

3) Bijektivität : Beweis mittels Injektivität & Surjektivität führen

## Untergruppe, Normalteiler, Gruppentafel

"Man zeige, das die von $\bar{n}$ erzeugte Untergruppe U von $\mathbb{Z}_m / \Gamma$ ... ein Normalteiler, eine Faktorgruppe ist und bestimme die Gruppentafel"

1) erzeugte Untergruppe

bei von $\bar{a}$ erzeugte Untergruppe: {allen in G die $\bar{a}$ teilt}

$\mathbb{Z}_{12}$ $\bar{4}$

$\bar{4} = \{0,4,8\}$

2) ist ein Normalteiler (≡ LNK = RNK)

wir erinnern uns: $LNK = \{a \circ u \mid u \in U\}$

$RNK = \{u \circ a \mid u \in U\}$

$U+0 = \{0,4,8\}$
$U+1 = \{1,5,9\}$
$U+2$ $\{2,6,10\}$
$U+3$ $3,7,11$

Beweis: alle a mit allen u verknüpfen und schauen, wann elemente rauskommen, die wieder in G liegen

BSP. $G = \{0,1,2,3,4\}$ $U = \{0,2\}$ $(G,+)$

G=6 U=2

3) Operationstafel /"Faktorgruppe"

Dafür braucht man jetzt die Nebenklassen 2 Dinge 1) Elemente aus G so lange mit U verknüpfen, bis alle elemente aus G mit U dargestellt sind.

2) $G/N \triangleq \frac{|G|}{|N|}$ # an Nebenklassen die es maximal gibt

Tafel aufzeichnen und einfach operationen durchführen (man sollte wieder in G bzw U landen, sonst falsche Nebenklasse

"Wie viele Nebenklassen gibt es" = # Elemente der Faktorgruppe

# Homomorphie (eher Untergruppe mittels Homomorphie beweisen)

① ↓

$(\varphi(G))$ ist Untergruppe

Kriterien: Menge muss nichtleere Teilmenge von G sein.

Menge bildet Gruppe

Beweis:

1) nicht leer → bewiesen durch definition von Bild $\varphi(G) = \{ b \in H \mid \exists a \in G: \varphi(a) = b \}$

2) Gruppe

Assoziativität: (überträgt sich von G)

Abgeschlossenheit: zz $\varphi(a) * \varphi(b) \in G$

$a, b \in G$

$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a \circ b) \in G$, weil $a \circ b \in G$

neutrales Element: $\exists\ e_G \in G$

$$e_G \circ e_G = e_G \Rightarrow \varphi(e_G) * \varphi(e_G) = \varphi(e_G) \quad \mid \varphi(e_G)^{-1}$$

$$\varphi(e_G) = \varphi(e_G) * \varphi(e_G)^{-1}$$

$$\varphi(e_G) = e_H$$

inverses Element $\forall \varphi(a): \exists\ \varphi(a)^{-1} \in H$ ✓

zz $\varphi(a)^{-1} \in \varphi(G)$

$$\varphi(a) * \varphi(a^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H$$

$$\underbrace{\varphi(a)^{-1} * \varphi(a)} * \varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1} \circ \varphi(e_G)$$

$$\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$$

Isomorphe Untergruppe

Finde Strukturgleiche Untergruppe

## Lineare Abbildungen (berechnen)

Ist $f$ eindeutig bestimmt? (2 lineare Abbildungen aufgeschrieben)

Aufgabe $f(\vec{b_1}) = \vec{a}_1$ $f(\vec{b_2}) = \vec{a}_2$

Ansatz: $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & y_n & & z_n \end{pmatrix} \vec{b}_1 = \vec{a}_1$ $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & \dots & z_n \end{pmatrix} \cdot \vec{b}_2 = \vec{a}_2$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$a \in A^{3\times 2}$

$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x_1 - 3y_1 = 3$
$3x_1 - 2y_1 = 3$
$x_1 = 3 + 3y_1$
$9 + 9y_1 - 2y_1 = 3$
$y_1 = \frac{-6}{7}$

$x_2 - 3y_2 = 0$
$3x_2 - 2y_2 = 0$
$9y_2 - 2y_2 = 0$
$y_2 = 0$
$x_2 = 0$

$x_3 - 3y_3 = -1$
$3x_3 - 2y_3 = -1$
$x_3 = -1 + 3y_3$
$-3 + 9y_3 - 2y_3 = -1$
$7y_3 = 2$
$y_3 = \frac{2}{7}$

"Bestimmen Sie ker $f$ / $f(V)$"

Wir erinnern uns: ker $f$: $\{x \in V \mid f(\vec{x}) = 0\}$

Wir haben im Idealfall ein paar Abbildungen $f(\vec{b_1}) = \vec{a}_1$, $f(\vec{b_2}) = \vec{a}_2$ etc. ..

$f(\vec{x}) = \theta$ ist zu zeigen $\rightarrow u \cdot \underbrace{f(\vec{b_1})} + v \cdot \underbrace{f(\vec{b_2})} = \theta$

$u \cdot \vec{a}_1 + v \cdot \vec{a}_2 = \theta$

↳ für welche $u$?

$\{u \cdot \vec{b}_1 + v \vec{b}_2 \mid v, u \in \mathbb{R}\}$

eventuell nach $u/v$ umformen

$u \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + v f\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{\theta}$

$u\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$(u+v)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u = -v$

$\left\{u\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - u\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \,\middle|\, u, v \in \mathbb{R}\right\} =$

$= \left\{u\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in \mathbb{R}\right\}$

"Bestimmen Sie $f(V)$"

Bild = 1 Spaltenvektor

## Gleichungssysteme berechnen

1) mittels Gaußalgorithmus vereinfachen
2) Gleichungen aufschreiben, durch $x, y$ ausdrücken

   übrige Variablen durch $t_1 \dots t_n$ ersetzen
3) in $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gießen