Grundlagen der Physik 2
Lösung zu Übungsblatt 2

Daniel Weiss

10. März 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Die schwingende Halbkugel soll als physikalisches Pendel genähert werden; d.h. konkret, dass der ursprüngliche Auslenkwinkel θ so klein ist, dass die Kleinwinkelnäherung angewendet werden kann. Auf die Halbkugel wirkt lediglich die Gravitationskraft, die - als Drehmoment ausgedrückt - eine ortsabhängige (bezüglich des Schwerpunktes S) Kraft ist. Somit erhalten wir nach der Herleitung die Gleichung für den harmonischen ungedämpften Oszillator. Abbildung 1 zeigt das Kräftedreieck für eine Auslenkung θ. Die Gravitationskraft wirkt senkrecht nach unten, kann

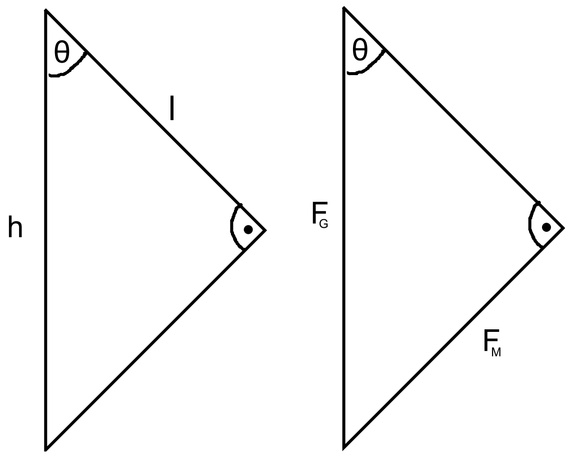


Abbildung 1: Kräftedreieck

aber in eine Kraft auf die Gefäßwand und ein am Schwerpunkt angreifendes Drehmoment (bezüglich der Drehachse) aufgespalten werden. Dieses Drehmoment ist:

$$M = F_{\mathrm{G}} \sin(\theta) l = -mg \sin(\theta) l \overset{\text{Kleinwinkelnäherung}}{\approx} -mgl\theta \tag{1}$$

Weiterhin kann das Drehmoment als zeitliche Änderung des Drehimpulses geschrieben werden:

$$M = \frac{dL}{dt} = I\dot{\omega} = I\ddot{\theta} \tag{2}$$

Gleichsetzen der Gleichungen 1 und 2 ergibt die zu lösende Differentialgleichung:

$$-mgl\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0 \tag{3}$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die bis auf unterschiedliche Konstanten der einer schwingenden Feder gleicht. Der Ansatz $\theta(t) = c \cdot e^{\lambda t}$ führt zur allgemeinen Lösung:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \tag{4}$$

Hierbei wurden bereits die Anfangsbedingungen eingesetzt und passend substituiert:

$$\theta(0) = \theta_0 \tag{5}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \tag{6}$$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{mgl}{I}} \tag{7}$$

Die Eigenfrequenz ist demnach:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{mgl}{4\pi^2 I}} \tag{8}$$

und hängt nur noch von l als einziger Variable ab. Bei einem "normalen" Pendel vereinfacht sich die Gleichung mit $I = mR^2$ und $l = R$ zu:

$$f_0 = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 R}} \tag{9}$$

b) Zunächst muss das Trägheitsmoment der Halbkugel bestimmt werden. Es gilt:

$$I = \int_M a^2 dm = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^\pi r^4 \sin^3(\psi) d\psi d\theta dr =$$

a entspricht dem senkrechten Abstand zur Drehachse und ist $a = r \sin\psi$, wenn man im Bild auf der Angabe den Winkel θ als Azimutwinkel und ψ als Polarwinkel festlegt - also gegenüber der üblichen Zeichnung für Kugelkoordinaten um $\frac{\pi}{2}$ gedreht.

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \rho \int_0^R \int_0^\pi \left[\frac{1}{3}\cos(\psi)(\sin^2(\psi) - 2) r^4\right]_0^\pi d\theta dr \\
&= \rho \int_0^R \int_0^\pi \frac{4}{3} r^4 d\theta dr = \\
&= \rho \int_0^R \frac{4}{3}\pi r^4 dr = \\
&= \rho \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2
\end{aligned} \tag{10}$$

Überraschenderweise ist das dasselbe Ergebnis wie für eine Vollkugel.

Nun fehlt uns noch l, also die Z-Komponente des Schwerpunktes der Halbkugel. In Kugelkoordinaten gilt: $z = r\cos(\theta)$

$$\begin{aligned}
S_\mathrm{Z} &= \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi r^3 \cos(\psi)\sin(\psi) d\psi d\theta dr = \\
&= \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^3 \sin^2(\psi)\right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi d\theta dr = \\
&= \frac{1}{V} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} r^3\right] d\theta dr = \\
&= \frac{1}{V} \int_0^R \left[-\pi r^3\right] dr = \\
&= \frac{1}{V} \left[-\frac{\pi}{4} R^4\right] = -\frac{3}{8} R
\end{aligned} \tag{11}$$

Diese beiden Ergebnisse eingesetzt in Gleichung 8 liefert:

$$f_0 = \sqrt{\frac{15g}{64\pi^2 R}} = 2{,}79\mathrm{Hz} \tag{12}$$

Aufgabe 2

a) Der allgemeine Ansatz für den gedämpften harmonischen Oszillator wird um eine externe Zwangskraft erweitert.

$$\underbrace{m\ddot{x}}_{\text{Gesamtkraft}} + \underbrace{b\dot{x}}_{\text{Dämpfungsglied}} + \underbrace{Dx}_{\text{Rückstellkraft}} = \underbrace{F_0 \cos(\omega_A t - \Delta)}_{\text{periodische Zwangskraft}} \tag{13}$$

Die Treiberkraft oszilliert mit der Kreisfrequenz ω_A periodisch. Δ ist der Versatz gegenüber der normalen Kosinusschwingung und ergibt sich aus den Anfangsbedingungen der antreibenden Kraft.

Die Lösung der homogenen Gleichung ist bereits bekannt:

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right) \tag{14}$$

Um die partikuläre Lösung möglichst einfach zu berechnen "transformieren" wir diese Differentialgleichung ins Komplexe, Berechnen die Lösung und "transformieren" anschließend zurück ins Reelle, um die gesuchte Lösung zu erhalten. Dadurch verkürzt sich der Lösungsweg deutlich.

Im Folgenden schreibe ich für die Treiberkreisfrequenz anstatt ω_A nur ω.

Zunächst schreiben wir Gleichung 13 mit dem Substitutionen $2\gamma := \frac{b}{m}$ und $\omega_0^2 := \frac{D}{m}$ so um:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t - \Delta) \tag{15}$$

Es gilt nun folgendes:

$$\mathrm{Re}\left(\underbrace{F_0 e^{i(\omega t-\Delta)}}_{\text{komplexe Treiberkraft}}\right) = \underbrace{F_0\cos(\omega t - \Delta)}_{\text{reelle (tatsächliche) Treiberkraft}} \tag{16}$$

$$\mathrm{Re}\left(\underbrace{\hat{c}e^{i\omega t}}_{=:\hat{x}(t)}\right) = \underbrace{c\cos(\omega t)}_{=:x(t)} \tag{17}$$

Das heißt, unsere Treiberkraft ist der Realteil einer komplexe e-Funktion - ebenso wie unser Ansatz: $x(t) := c\cos(\omega t)$. Es ergibt sich nun folgende komplexe Differentialgleichung:

$$\ddot{\hat{x}} + 2\gamma\dot{\hat{x}} + \omega_0^2\hat{x} = \frac{\hat{F}}{m}e^{i\omega t} \tag{18}$$

mit:

$$\hat{x}(t) := \hat{c}e^{i\omega t} \tag{19}$$

$$\hat{F} := F_0 e^{-i\Delta} \tag{20}$$

Einsetzen und Ableiten des Ansatzes $\hat{x}$ und herauskürzen der gemeinsamen Terme $e^{i\omega t}$ liefert die charakteristische Gleichung:

$$-\hat{c}\omega^2 + 2\gamma\hat{c}i\omega + \omega_0^2\hat{c} = \frac{\hat{F}}{m} \tag{21}$$

und somit

$$\hat{c} = \frac{\hat{F}}{m(\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2)} \tag{22}$$

als komplexe "Amplitude". Jede Zahl in der komplexen Zahlenebene lässt sich (analog zu den Polarkoordinaten) als Radius mal "komplexer Winkel" darstellen. Also substituieren wir:

$$\hat{c} =: \rho\hat{F}e^{-i\Theta} \tag{23}$$

Die gesuchte (relle) Lösung ist nun der Realteil von $\hat{x}$.

$$x(t) = \mathrm{Re}\left(\underbrace{\hat{c}e^{i\omega t}}_{=\hat{x}(t)}\right) = \mathrm{Re}\left(\rho F_0 e^{i(\omega t - \Theta - \Delta)}\right) = \rho F_0 \cos(\omega t - \Theta - \Delta) \tag{24}$$

Nun müssen noch die beiden reellen Unbekannten ρ und Θ bestimmt werden. ρ ist nichts anderes als der "Betrag" der komplexen Zahl $\hat{c}$, während Θ den "komplexen Winkel" beschreibt.

$$\begin{aligned}\rho = \|\hat{c}\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{m^2(\omega_0^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2)(\omega_0^2 - 2i\gamma\omega - \omega^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)] + 4\gamma^2\omega^2}}\end{aligned} \tag{25}$$

Die Amplitude dieser Schwingung ist nun:

$$A := \rho \cdot F_0 \tag{26}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\hat{F}}{\hat{c}} = \frac{1}{\rho e^{-i\Theta}} = \frac{e^{i\Theta}}{\rho} &= m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega) = \\ &= \frac{\cos(\Theta) + i\sin(\Theta)}{\rho}\end{aligned} \tag{27}$$

Daraus folgt

$$\Rightarrow \sin(\Theta) = \frac{2m\gamma\omega}{\rho} \tag{28}$$

$$\Rightarrow \cos(\Theta) = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\rho} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \tan(\Theta) = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{30}$$

Als endgültiges Ergebnis haben wir demnach:

$$
\begin{aligned}
x(t) = {} & \underbrace{e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right)}_{\text{homogene Lösung}} + \\
& + \underbrace{\underbrace{\sqrt{\frac{F_0^2}{m^2[(\omega_0^2-\omega^2)] + 4\gamma^2\omega^2}}}_{\text{Amplitude } A} \cdot \cos\left(\omega t - \underbrace{\arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)}_{\Theta} - \Delta\right)}_{\text{partikuläre Lösung}}
\end{aligned} \tag{31}
$$

b) Die Allgemeine Lösung wurde bereits in Teilaufgabe a) hergeleitet. Siehe Gleichung 31.

Während des Einschwingvorgangs gibt es eine Überlagerung der Treiberschwingung und der Schwingung des gedämpften ungetriebenen harmonischen Oszillators (homogene Lösung). Nach endlicher Zeit jedoch (wegen Dämpfung) ist diese Schwingung nicht mehr messbar und die sich dann einstellende Schwingung hängt nur von der Treiberschwingung ab (partikuläre Lösung).

Es sind im Allgemeinen 3 Fälle zu unterscheiden:

i) schwache Dämpfung

ii) starke Dämpfung

iii) aperiodischer Grenzfall

Näheres zu diesen 3 Fällen in Teilaufgabe c).

c) Da uns die Maxima interessieren, leiten wir die Amplitudenfunktion $A(\omega)$ (siehe Gl. 26) ab und setzen sie 0.

$$
\frac{dA}{d\omega} = 0
$$

$$
\Leftrightarrow 0 = -\frac{8\gamma^2\omega - 4\omega(\omega_0^2-\omega^2))}{2\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}^3}\frac{F_0}{m} \tag{32}
$$

$$
\Rightarrow \omega_{\max} = 0 \quad \vee \tag{33}
$$

$$
\vee \quad \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{34}
$$

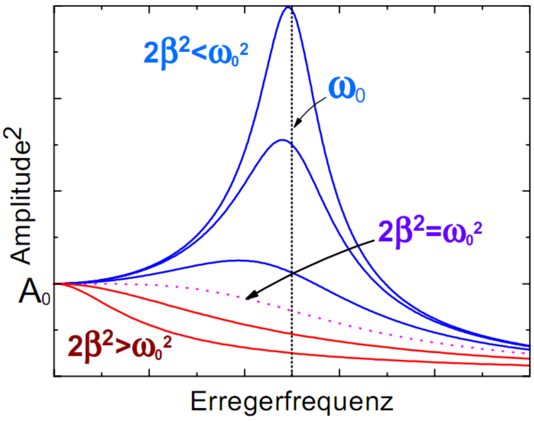
D.h. wir haben eine waagrechte Tangente bei $\omega = 0$, also bei keiner externen Treiberkraft. Sonst unterscheiden sich drei Fälle:

i) $\omega^2 > 2\gamma^2$
Hier liegt schwache Dämpfung vor. Das Maximum der Amplitude stellt sich bei einer Treiberkreisfrequenz knapp unter der Eigenschwingfrequenz des ungetriebenen Oszillators ein. Je stärker die Dämpfung, desto flacher die Kurve und desto geringer die Resonanzfrequenz. Das Resonanzmaximum liegt wegen

der Dämpfung nicht direkt bei der Eigenschwingfrequenz. Siehe auch Abbildung 2

ii) $\omega^2 \leq 2\gamma^2$
Bei starker Dämpfung oder dem aperiodischen Grenzfall liegt das Maximum der Amplitudenfunktion bei $\omega = 0$. Je größer die Treiberfrequenz, desto geringer die Amplitude.

iii) $\omega^2 = 2\gamma^2$
Ähnlich dem Fall der starken Dämpfung. Siehe auch Abbildung 2.



[1]

Abbildung 2: Quadrat der Amplitude in Abh. von der Anregerfrequenz. $\beta \widehat{=} \gamma$

d) Leistung ist Arbeit pro Zeit, also

$$\overline{P} = \frac{d\overline{W}}{dt} = \frac{\overline{F}d\overline{x}}{dt} \tag{35}$$

[1]Abbildung dem Script von Herrn Prof. Rudolph Gross, WMI, Garching entnommen.

Mit $F = F_0 \cos(\omega t - \Delta)$ und $\frac{dx}{dt} = -A\sin(\omega t - \Theta - \Delta)$ folgt

$$
\begin{aligned}
\overline{P} &= -F_0\omega A \cdot \overline{\cos(\omega t - \Delta)\cdot \sin(\omega t - \Theta - \Delta)} = \\
&= -F_0\omega A \cdot \overline{(\cos(\omega t)\cos(\Delta) + \sin(\omega t)\sin(\Delta))\cdot} \\
&\quad \overline{\cdot(\sin(\omega t)\cos(\Theta+\Delta) - \sin(\Theta+\Delta)\cos(\omega t))} = \\
&= -F_0\omega A \cdot \overline{\left[\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\cos(\Delta)\cos(\Theta+\Delta) - \right.} \\
&\quad \overline{\left. -\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega t))\right]\cos(\Delta)\cos(\Theta+\Delta)+} \\
&\quad \overline{+\frac{1}{2}(1-\cos(2\omega t))\sin(\Delta)\cos(\Theta+\Delta)-} \\
&\quad \overline{-\frac{1}{2}(0+\sin(2\omega t))\sin(\Delta)\sin(\Theta+\Delta)} = \\
&= -F_0\omega A \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(\Delta)\sin(\Theta+\Delta) + \frac{1}{2}\sin(\Delta)\cos(\Theta+\Delta)\right) = \\
&= -F_0\omega A \cdot \left(-\frac{1}{4}\left(-\sin(-\Theta) + \sin(\Theta+2\Delta)\right) + \frac{1}{4}(\sin(-\Theta) + \sin(\Theta+2\Delta))\right) = \\
&= -F_0\omega A\left(\frac{1}{2}\sin(-\Theta)\right) = \\
&= \frac{1}{2}F_0\omega A\sin(\Theta) \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde verwendet, dass das zeitliche Mittel von $\sin(2\omega t)$ und $\cos(2\omega t)$

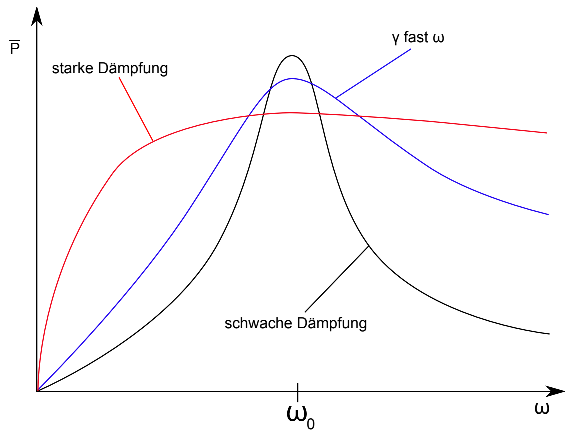


Abbildung 3: mittlere Leistung bezüglich Anregerfrequenz

jeweils 0 ist. Die maximale Leistung wird also bei einer Phasenverschiebung von 90° zwischen Treiberkraft und Schwingung übertragen. Setzt man in diese Gleichung noch die Amplitude ein (wie in a) berechnet) und leitet nach ω ab, so erhält man folgende Beziehung:

$$\frac{d\overline{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 \tag{37}$$

Das heißt, dass die maximale Leistung genau bei der Eigenfrequenz übertragen wird. Unabhängig vom Grad der Dämpfung!

Aufgabe 3

a) Aus Symmetriegründen gibt es nur ein Feld in Z-Richtung. Es ist allgemein:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{s^2} \tag{38}$$

Uns interessiert nur der z-Anteil.

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{s^2} \cdot \cos(\Theta) \cdot dy \tag{39}$$

Hier wurde bereits $dq = \lambda \cdot dy$ eingesetzt. Diese Gleichung hängt allerdings von zwei Variablen ab. Denn wenn y vergrößert wird, ändert sich automatisch auch Θ. Also müssen wir eine der beiden Variablen durch die andere ausdrücken, um integrieren zu können. Folgende Winkelbeziehungen ermöglichen das:

$$s = \frac{r}{\cos(\Theta)} \tag{40}$$

$$\tan(\Theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\tan(\Theta) \tag{41}$$

$$\Rightarrow dy = r\sec^2(\Theta) \tag{42}$$

Mit Gleichungen 40 und 42 kann man Formel 39 so schreiben:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda\cos^2(\Theta)}{r^2} \cdot \frac{r}{cos^2(\Theta)} \cdot \cos(\Theta)d\Theta \tag{43}$$

Das hängt nurmehr von der Variablen Θ ab. Kürzen und Integrieren liefert das Ergebnis:

$$\begin{aligned} E_z &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r} \cdot \cos(\Theta)d\Theta = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0} \end{aligned} \tag{44}$$

b) Der Satz von Gauß besagt zusammen mit den Maxwell-Gleichungen:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \cdot dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{45}$$

Es muss also lediglich über die Zylinderfläche um den Leiter mit Radius r (denn da beobachten wir) integriert werden. Die beiden Seitenstücke müssen in diesem Fall nicht berücksichtigt werden - lediglich die Mantelfläche.

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_0^{2\pi} \underbrace{r}_{\text{Funktionaldet.}} E \cdot d\phi dy = 2\pi r E \Delta y = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{46}$$

Umgeformt kommt dasselbe Ergebnis heraus:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \tag{47}$$

Aufgabe 4

a) Wir kennen bereits aus der vorhergehenden Aufgabe das Feld eines unendlich ausgedehnten geladenen Drahtes im Abstand r vom Draht:

$$E_z' = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \tag{48}$$

Weiterhin gilt:

$$\lambda \cdot \Delta y = Q = \sigma dA = \sigma \Delta y \cdot dx \Rightarrow \lambda = \sigma \cdot dx \tag{49}$$

Da wir nun das Feld in der z-Richtung (gegenüber der Platte) haben möchten, müssen wir noch mit dem Kosinus multiplizieren. Einsetzen der obigen Beziehung liefert die zu integrierende Formel:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\pi r \epsilon_0}\cos(\Theta) dx \tag{50}$$

Analog zur Aufgabe 3a müssen wir eine der beiden unbekannten Variablen r oder Θ durch die andere ausdrücken, bevor wir integrieren können.

$$r = \frac{a}{\cos(\Theta)} \tag{51}$$

$$x = a\tan(\Theta) \tag{52}$$

$$\Rightarrow dx = a\sec^2(\Theta)d\Theta \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E_z &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\cos^2(\Theta)a}{2\pi a\epsilon_0\cos^2(\Theta)} d\Theta = \\ &= \frac{\pi\sigma}{2\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\end{aligned} \tag{54}$$

Das Ergebnis ist vom Abstand von der Platte unabhängig!

b) Nach dem Gaußschen Satz gilt (siehe auch Aufgabe 3b):

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{55}$$

Die Randflächen leisten in diesem Fall keinen Beitrag. Also interessieren nur die Ober- und die Unterseite, welche beide gleich groß sind. Also kann zweimal die Oberseite genommen werden. Das Integral über die Fläche ist trivial und kann direkt als $A = xy$ geschrieben werden, wobei eigentlich $A = \lim_{x,y\to\infty} (\Delta x \cdot \Delta y)$ geschrieben werden muss. Da sich die Fläche aber eh wieder rauskürzt, ist das egal. Auflösen nach E:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{56}$$

Die 2 kommt daher, dass man Ober- und Unterseite nehmen muss, also zweimal die einfache Fläche.

Aufgabe 5

a) Nach dem Superpositionsprinzip ist das resultierende Feld die Summe der beiden Einzelfelder:

$$\vec{E_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \underbrace{\frac{-4\text{C}}{13\text{m}^2}}_{\text{Ladung durch Abstandsquadrat}} \cdot \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{13}}}_{\text{normierter Richtungsvektor}} \tag{57}$$

$$\vec{E_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1\text{C}}{13\text{m}^2} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{13}} \tag{58}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1\text{C}}{13\text{m}^2} \cdot \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}}{\sqrt{13}} \tag{59}$$

Die einzelnen Komponenten, Betrag und Richtung können direkt aus diesem Ergebnis abgelesen werden.

b) Es kann nur einen Punkt geben. Denn damit das Feld 0 ist muss die Summe der beiden Einzelfeldvektoren 0 ergeben. Das geht aber nur, wenn beide antiparallel und gleich groß sind, also linear abhängig. Der Punkt liegt demnach auf einer Geraden durch beide Ladungen - in unserem Fall auf der x-Achse.

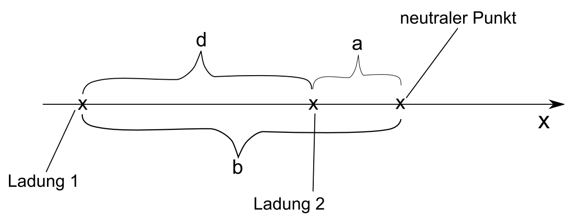


Abbildung 4: Skizze zum neutralen Punkt

$$E_1 = -E_2 \tag{60}$$
$$\Leftrightarrow 4a^2 = b^2 \tag{61}$$

a und b sind die jeweiligen Abstände von der Ladung (im neutralen Punkt).

$$a = b - d \tag{62}$$
$$\Rightarrow 0 = 3b^2 - 8bd + 4d^2 \tag{63}$$
$$\Rightarrow b_1 = \frac{8}{3} \tag{64}$$
$$\Rightarrow b_2 = 8 \tag{65}$$

$b1$ kann keine physikalisch sinnvolle Lösung sein, da dort die beiden E-Feldvektoren parallel sind und sich somit verstärken anstatt aufzuheben. Also ist der gesuchte Abstand (von der linken Ladung) $b_2 = 8$. Der neutrale Punkt hat die Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{66}$$

Aufgabe 6

Die Ladungen rechts unten und links oben heben sich aus Symmetriegründen gegenseitig auf (am Ort der Testladung) und müssen nicht weiter berücksichtigt werden. Die Summe der Kräfte der beiden verbleibenden Ladungen ergibt die gesuchte Kraft.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{eq}{r^2} \left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} \mathrm{C} - 4 \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} \mathrm{C} \right) \tag{67}$$

Der Radius ist für alle Ladungen derselbe und zwar:

$$r = a \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} \tag{68}$$

Einsetzen und Betrag bilden:

$$\|\vec{F}\|_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{10eq}{a^2} \tag{69}$$