2. UE-Test in Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik UE 2021W - Gruppe G

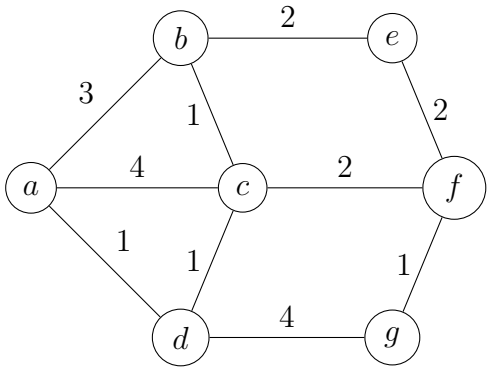
15.12.2021

35 Minuten Arbeitszeit, keine Hilfsmittel erlaubt

1. (7 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\} : x \mapsto \frac{3x+1}{x-1}$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

2. Sei $N = \{a, h, c, d, e, f, g\}$ die Menge der *Noten* ($|N| = 7$). Für unsere Zwecke ist eine *Melodie* ein Tupel von 4 Noten.
   (a) (2 Punkte) Wie viele Melodien enthalten die Sequenz *ceg*?
   (b) (2 Punkte) Wie viele Melodien bestehen aus lauter verschiedenen Noten?
   (c) (3 Punkte) Wie viele Melodien erfüllen mindestens eine der Bedingungen in (a) oder (b)? (Hinweis: Inklusions-Exklusions-Prinzip)

3. (6 Punkte) Bestimmen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus in folgendem Netzwerk einen Entfernungsbaum vom Knoten a aus:



Um die Funktionsweise des Algorithmus zu illustrieren, stellen Sie die einzelnen Schritte geeignet in einer Tabelle dar.

2. UE-Test in Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik UE 2021W - Gruppe H

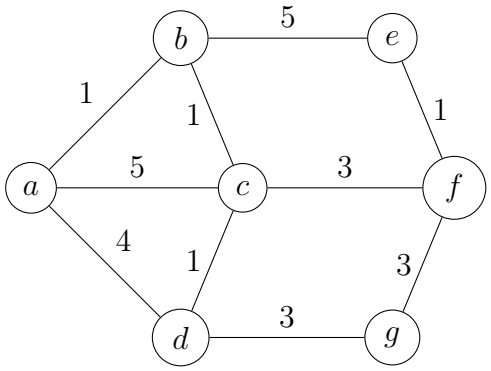
15.12.2021

35 Minuten Arbeitszeit, keine Hilfsmittel erlaubt

1. (7 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\} : x \mapsto \frac{2x+3}{3-x}$ bijektiv ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

2. Sei $N = \{a, h, c, d, e, f, g\}$ die Menge der *Noten* ($|N| = 7$). Für unsere Zwecke ist eine *Melodie* ein Tupel von 4 Noten.
   (a) (2 Punkte) Wie viele Melodien enthalten die Note a genau einmal?
   (b) (2 Punkte) Wie viele Melodien gibt es, die jede ihrer Noten genau einmal enthalten?
   (c) (3 Punkte) Wie viele Melodien erfüllen mindestens eine der Bedingungen in (a) oder (b)? (Hinweis: Inklusions-Exklusions-Prinzip)

3. (6 Punkte) Bestimmen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus in folgendem Netzwerk einen Entfernungsbaum vom Knoten a aus:



Um die Funktionsweise des Algorithmus zu illustrieren, stellen Sie die einzelnen Schritte geeignet in einer Tabelle dar.

2. Übungstest aus Algebra und Diskrete Mathematik für I.u.WI
Gruppe I - Müllner
15.12.2021

Name:

Matrikelnummer:

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen. Arbeitszeit: 35 Minuten

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	7	
2	7	
3	6	
Gesamt	20	

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Es sei $M = \mathbb{R}$ und eine Relation R auf M definiert durch

$$aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

(a) (4 Punkte) Untersuchen Sie die Relation R auf Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Antisymmetrie. Jeder Punkt ist zu beweisen oder durch ein konkretes Gegenbeispiel zu widerlegen.

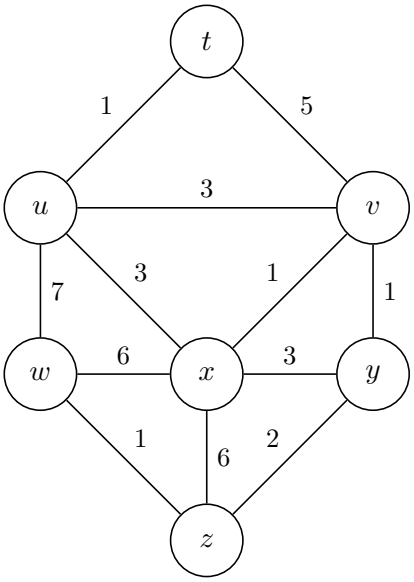
(b) (3 Punkte) Definieren Sie was eine Äquivalenzrelation ist. Ist die obige Relation R eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 (voneinander unterscheidbare) Würfel so zu werfen, dass genau zwei Würfel dieselbe Augenzahl zeigen? (Bsp: $(1, 1, 2, 3)$ ist zu zählen, hingegen ist $(1, 1, 2, 2)$ nicht zu zählen.)

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei der folgende ungerichtete kantenbewertete Graph G:



Man bestimme für G mit dem Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege und ihre Längen von allen Knoten zum Knoten z. Geben Sie dabei bitte unbedingt die Ergebnisse der Iterationsschritte des Dijkstra-Algorithmus in einer Tabelle an.

2. Übungstest aus Algebra und Diskrete Mathematik für I.u.WI
Gruppe J - Holzer
15.12.2021

Name:

Matrikelnummer:

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen. Arbeitszeit: 35 Minuten

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	7	
2	7	
3	6	
Gesamt	20	

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Es sei $M = \mathbb{R}$ und eine Relation R auf M definiert durch

$$aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

(a) (4 Punkte) Untersuchen Sie die Relation R auf Reflexivität, Symmetrie, Transitivität und Antisymmetrie. Jeder Punkt ist zu beweisen oder durch ein konkretes Gegenbeispiel zu widerlegen.

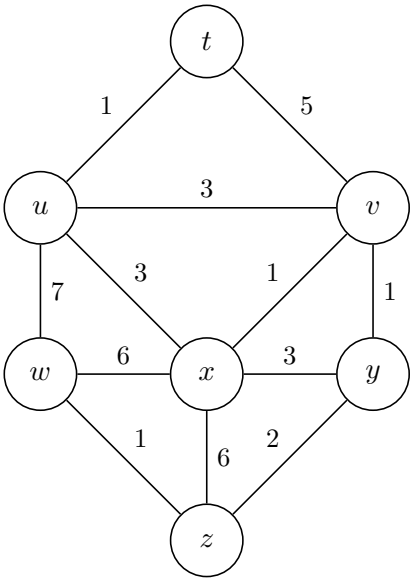
(b) (3 Punkte) Definieren Sie was eine Äquivalenzrelation ist. Ist die obige Relation R eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 (voneinander unterscheidbare) Würfel so zu werfen, dass genau zwei Würfel dieselbe Augenzahl zeigen? (Bsp: $(1, 1, 2, 3)$ ist zu zählen, hingegen ist $(1, 1, 2, 2)$ nicht zu zählen.)

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben sei der folgende ungerichtete kantenbewertete Graph G:



Man bestimme für G mit dem Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege und ihre Längen von allen Knoten zum Knoten z. Geben Sie dabei bitte unbedingt die Ergebnisse der Iterationsschritte des Dijkstra-Algorithmus in einer Tabelle an.

2. Übungstest aus Algebra und Diskrete Mathematik für I.u.WI
Gruppe K - Holzer
15.12.2021

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	7	
2	6	
3	7	
Gesamt	20	

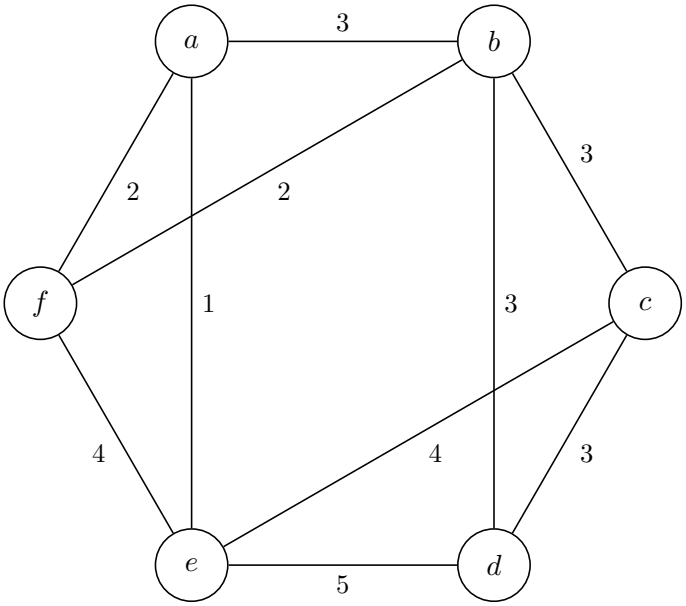
Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 35 Minuten

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Wie viele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 1000$ gibt es, die durch 2, durch 3, oder durch 5 teilbar sind? (Die ersten zu zählenden Zahlen sind: $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, \ldots$)

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben sei der nachfolgende ungerichtete, kantenbewertete Graph G:



(a) (4 Punkte) Man bestimme einen minimalen Spannbaum.

(b) (2 Punkte) Definieren Sie was ein minimaler Spannbaum ist.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen erfüllen die Rekursion

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \qquad \text{für } n \geq 0. \tag{1}$$

(a) (4 Punkte) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (1).

(b) (3 Punkte) Weiters erfüllen die Fibonacci-Zahlen die Anfangsbedingung

$$f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Beweisen Sie die Formel von Moivre-Binet, d.h. für alle $n \geq 0$ gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

2. Übungstest aus Algebra und Diskrete Mathematik für I.u.WI
Gruppe L - Müllner
15.12.2021

Name:

Matrikelnummer:

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen. Arbeitszeit: 35 Minuten

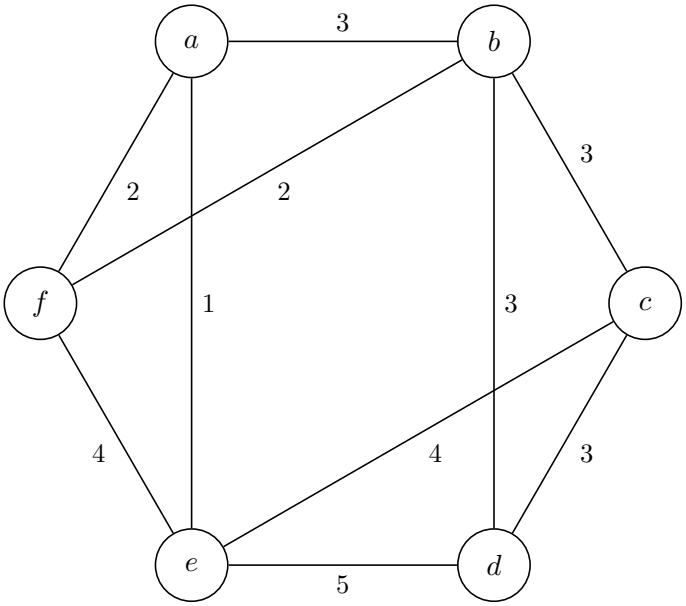
Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	7	
2	6	
3	7	
Gesamt	20	

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Wie viele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 1000$ gibt es, die durch 2, durch 3, oder durch 5 teilbar sind? (Die ersten zu zählenden Zahlen sind: $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, \ldots$)

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben sei der nachfolgende ungerichtete, kantenbewertete Graph G:



(a) (4 Punkte) Man bestimme einen minimalen Spannbaum.

(b) (2 Punkte) Definieren Sie was ein minimaler Spannbaum ist.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen erfüllen die Rekursion

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \qquad \text{für } n \geq 0. \tag{1}$$

(a) (4 Punkte) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (1).

(b) (3 Punkte) Weiters erfüllen die Fibonacci-Zahlen die Anfangsbedingung

$$f_0 = 0, f_1 = 1.$$

Beweisen Sie die Formel von Moivre-Binet, d.h. für alle $n \geq 0$ gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

“ADM” - UE-Test 2 - Gruppe M

Name: Matrikelnummer:

(1) [7 Punkte] Eine binäre Relation R auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sei definiert via:

$$a\,R\,b :\Leftrightarrow 5 \mid a^2 - b^2, \quad \text{für } a, b \in \mathbb{Z}.$$

(a) Zeigen Sie durch Nachweisen der definierenden Eigenschaften, dass R auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation darstellt.

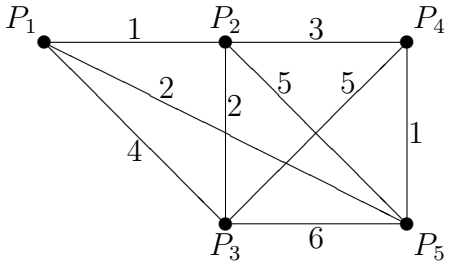
(b) Man bestimme die durch die Äquivalenzklassen von R definierte Partition (= Zerlegung) der Menge $\mathbb{Z}$.

(2) [7 Punkte] Man löse die folgenden Aufgaben durch kombinatorische Methoden, reines “Herumprobieren” wird nicht gewertet!

(a) Man bestimme, wie viele natürliche Zahlen n, mit $0 \leq n < 100000$, in ihrer Dezimalentwicklung genau einmal die Ziffer 1 und genau zweimal die Ziffer 2 enthalten.

(b) Man bestimme mit Hilfe des Inklusions-Exklusions-Prinzips die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, in denen weder der Block “`abcd`” noch der Block “`fa`” vorkommt.

(3) [6 Punkte] Gegeben sei der folgende kantenbewertete Graph G:



Man bestimme für G mit dem Algorithmus von Dijkstra kürzeste Wege und ihre Längen von allen Knoten zum Knoten P_5 (nicht vom Knoten P_1!). Geben Sie dabei bitte unbedingt die Ergebnisse der Iterationsschritte des Dijkstra-Algorithmus in einer Tabelle an. Außerdem veranschauliche man den Entfernungsbaum (= Abstandsgraph) bzgl. P_5 in einem eigenen Graphen.

Iteration	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	ausgewählter Knoten	Vorgänger
Initialisierung: 0							
1							
2							
3							
4							