129.)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-5x+2}} = \frac{2|x-2|}{\sqrt{(2x-5-\sqrt{17})(2x-5+\sqrt{17})}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Stetigkeit:

$$f(x): \ (2x-5-\sqrt{17})(2x-5+\sqrt{17}) > 0 \ \wedge \ (x-2)^2 \geq 0$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$$

Differenzierbarkeit:

Berechnen „potenzielle" Ableitung und prüfen, wann (wo) sie existiert:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(2x-4)(x^2-5x+2)-(x^2-4x+4)(2x-5)}{(x^2-5x+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-5x+2}{(x-2)^2}} \cdot \frac{(2x-4)(x^2-5x+2)-(x-2)^2(2x-5)}{(x^2-5x+2)^2}$$

Bedingungen:

- $(x-2)^2 > 0$

  $x \neq 2$
- $x^2-5x+2 > 0$ (genau wie bei Stetigkeit)

$f(x)$ ist differenzierbar an Stellen $x_0 \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$.

135.) zu zeigen: $\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in (-1,1)$

Beweis:

Betrachten Ableitung von der linken Seite:

$$\left(\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x\right)' = \left(\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' + \frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{Arcsin} x\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\cancel{1+x}}{\underset{-2}{\cancel{4}}} \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-\cancel{2}}{(1+x)^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{(1-x)(1+x)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x$ ist eine konstante Funktion im Bereich $x \in (-1,1)$.

Betrachten z. B. $x = 0$:

$$\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-0}{1+0}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} 0 = \operatorname{Arctan} 1 + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} 0 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$\Rightarrow \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x = 0$, $\forall x \in (-1,1)$ ■

148.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar

zu zeigen: $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis:

- f ist monoton wachsend

$$\Longleftrightarrow \left(x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \right)$$

- f ist differenzierbar

$$\Longleftrightarrow f'(x) \text{ existiert}$$

$$\text{und } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{> 0}} \geq 0 \quad \blacksquare$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}$$

150.) gegeben:

$f(x) = x^2$

$a < b$

zu finden: $c \in [a,b] \; : \; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Mittelwertsatz sagt, daß solches c existiert!

$f'(x) = (x^2)' = 2x$

$f'(c) = 2c$

$f(b) = b^2$

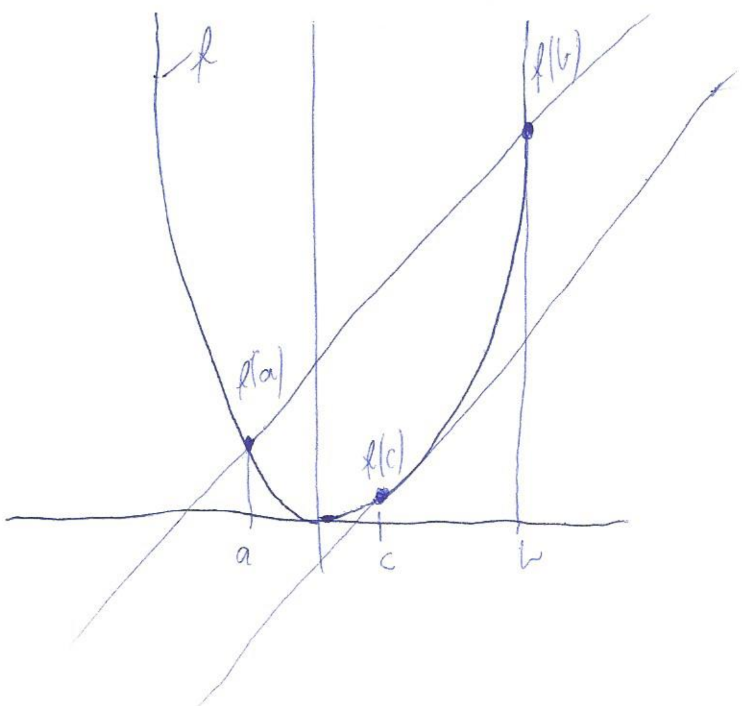
$f(a) = a^2$

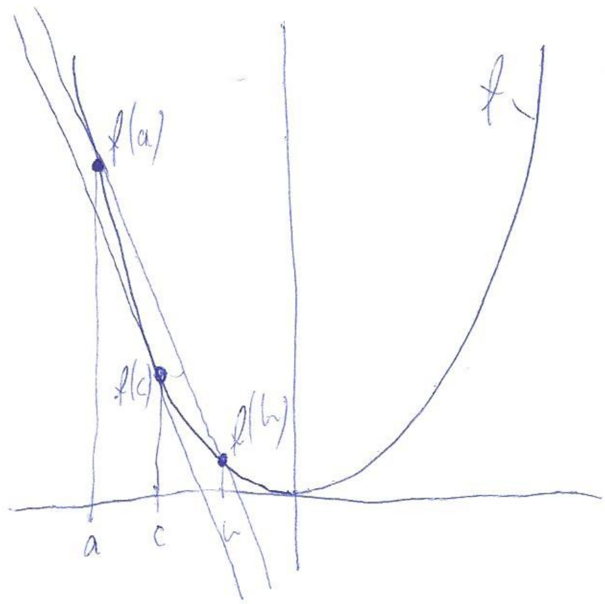
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Updownarrow$$

$$2c = \frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} \overset{a<b}{=} b+a$$

$$c = \frac{a+b}{2} \; . \quad (\text{Mittelwert})$$





151.) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad , x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \left(-2 \cdot (x-1)^{-2}\right)' = -2 \cdot (-2) \cdot (x-1)^{-3} \cdot 1 = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x) = \left(2 \cdot (x-1)^{-3}\right)' = 2 \cdot (-3) \cdot (x-1)^{-4} \cdot 1 = \frac{-12}{(x-1)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \left(-6 \cdot (x-1)^{-4}\right)' = -6 \cdot (-4) \cdot (x-1)^{-5} \cdot 1 = \frac{48}{(x-1)^5}$$

Behauptung zu zeigen: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \quad , n \geq 1$

I.A.: $f'(x) = \frac{(-1)^1 \cdot 2 \cdot 1!}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ ✓

I.S.:

- I.V.: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$
- I.B.: $f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$

Beweis:

$$f^{(n+1)}(x) \overset{\text{I.V.}}{=} \left((-1)^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (x-1)^{-n-1}\right)' =$$

$$= (-1)^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (-(n+1)) \cdot (x-1)^{-(n+2)} \cdot 1 =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot (n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

$\blacksquare$

154.) $f(x) = 8(x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{3}{2} \cdot (x+1)^{\frac{1}{2}} = 12(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{6}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'''(x) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-3}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

- $f_2(x) = T_2(x) + R_2(x) =$

$$= 8(x_0+1)^{\frac{3}{2}} + 12(x_0+1)^{\frac{1}{2}}(x - x_0) + \frac{6}{2(x_0+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot (x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{(2+1)!} \cdot \frac{-3}{(\xi+1)^{\frac{3}{2}}} (x-x_0)^{2+1} \quad \boxed{x_0 = 0}$$

$$= \underbrace{8 + 12x + 3x^2}_{T_2(x)} \underbrace{- \frac{x^3}{2(\xi+1)^{\frac{3}{2}}}}_{R_2(x)}, \quad \xi \in (x_0, x) \text{ bzw. } (x, x_0)$$

$$|R_2(x)| < \frac{x^3}{2(x_0+1)^{\frac{3}{2}}}, \text{ wobei } x = 0.3,\ x_0 = 0$$

$$|R_2(x)| < \frac{27}{2000} = 0.0135$$

- $f_1(x) = T_1(x) + R_1(x) =$

$$= 8(x_0+1)^{\frac{3}{2}} + 12(x_0+1)^{\frac{1}{2}}(x-x_0) + \frac{6}{2(\xi+1)^{\frac{1}{2}}}(x-x_0)^2$$

$$= \underbrace{8 + 12x}_{T_1(x)} + \underbrace{\frac{3x^2}{(\xi+1)^{\frac{1}{2}}}}_{R_1(x)}, \quad \xi \in (x_0, x) \text{ bzw. } (x, x_0)$$

$$|R_1(x)| < \frac{3x^2}{(x_0+1)^{\frac{1}{2}}}, \text{ wobei } x = 0.3,\ x_0 = 0$$

$$|R_1(x)| < \frac{27}{100} = 0.27$$

167.) $f(x) = (x^2+1)\sin x \quad , x_0 = 0$

Seien $g(x) = x^2+1$ und $h(x) = \sin x$.

Dann:

$$g'(x) = 2x \qquad h'(x) = \cos x$$
$$g''(x) = 2 \qquad h''(x) = -\sin x$$
$$g^{(n)}(x) = 0, \ n \geq 3 \qquad h'''(x) = -\cos x$$
$$h^{(4)}(x) = h(x) = \sin x$$

Taylorreihen:

$$g(x) = x_0^2+1 + 2x_0(x-x_0) + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-x_0)^2 + 0\cdot\ldots + 0\cdot\ldots + \ldots =$$
$$= 1 + x^2$$

$$h(x) = \sin x_0 + \cos x_0(x-x_0) - \frac{\sin x_0}{2}(x-x_0)^2 - \frac{\cos x_0}{6}(x-x_0)^3 +$$
$$+ \frac{\sin x_0}{24}(x-x_0)^4 + \ldots =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots$$

$$f(x) = g(x)\cdot h(x) =$$
$$= x + x^3 - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{5!} - \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{7!} + - \ldots =$$
$$= x + x^3 - \frac{x^3+x^5}{3!} + \frac{x^5+x^7}{5!} - \frac{x^7+x^9}{7!} + - \ldots$$