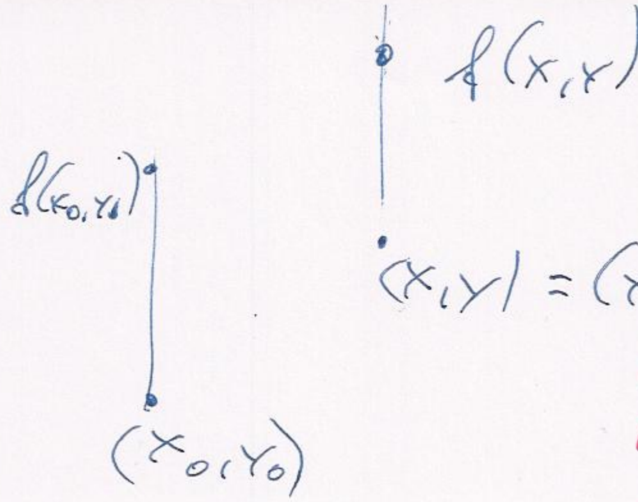


$$(x,y) = (x_0+h,\ y_0+K)$$

$$h = x - x_0$$
$$K = y - y_0$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot \overbrace{h}^{(x-x_0)} + f_y(x_0,y_0)\cdot \overbrace{K}^{(y-y_0)}$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{2!}\cdot\Big(f_{xx}(x_0,y_0)\cdot h^2 + 2\cdot f_{xy}(x_0,y_0)\cdot h\cdot K + f_{yy}(x_0,y_0)\cdot K^2 \Big)}$$

Polynom 2. Grades in x und y

Lineare Approximation:

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + h\cdot f_x(x_0,y_0) + k\cdot f_y(x_0,y_0)$$

$$= f(x_0,y_0) + (h,k)\cdot \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{f(x_0,y_0) + (h,k)\cdot \operatorname{grad} f(x_0,y_0)}_{\text{Tangentialebene}}$$

Quadratische Approximation:

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + h\cdot f_x(x_0,y_0) + k\cdot f_y(x_0,y_0) + {}$$

$$+ \frac{h^2\cdot f_{xx}(x_0,y_0) + 2hk\cdot f_{xy}(x_0,y_0) + k^2\cdot f_{yy}(x_0,y_0)}{2!} =$$

$$= f(x_0,y_0) + (h,k)\cdot \operatorname{grad} f(x_0,y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot (h,k)\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\text{Hesse-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

---

n Var.: $T_2(\vec{x})$

Abstandsvekt. $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

$$T_2(x_1,\dots,x_n) = f(\vec{x}_0) +$$

$$\vec{h}^T \cdot \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot \vec{h}^T\cdot \underbrace{H_f(\vec{x}_0)}_{\text{Hesse-Matrix von } f} \cdot \vec{h}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & & \\ f_{x_nx_1} & \cdot & - & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}}_{=:\, H_f(\vec{x})}$$

~~Quadratische Approximation für n Variablen~~

Bsp.: $$(x_0, y_0) = (0, 1)$$

$$f(x,y) = y \cdot e^{x+y-1}$$

$$f_x = y \cdot e^{x+y-1}$$

$$f_y = e^{x+y-1} + y \cdot e^{x+y-1}$$

$$= (1+y) \cdot e^{x+y-1}$$

$$T_1(x,y) = f(0,1) + f_x(0,1) \cdot (x - x_0) + f_y(0,1) \cdot (y - y_0)$$

$$= 1 + 1 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 1) =$$

$$= 1 + x + 2 \cdot (y-1)$$

Quadr. Approx.:

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{1}{2} \cdot \Big(f_{xx}(0,1) \cdot (x-x_0)^2 + 2 f_{xy}(0,1) \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0) + f_{yy}(0,1) \cdot (y-y_0)^2 \Big)$$

$$f_{xx} = y \cdot e^{x+y-1}$$

$$f_{xy} = (1+y) \cdot e^{x+y-1}$$

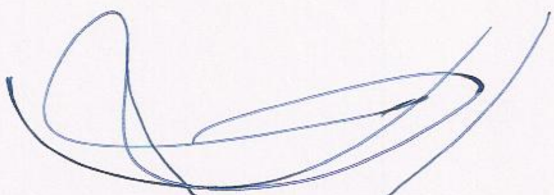
$$f_{yy} = (2+y) \cdot e^{x+y-1}$$

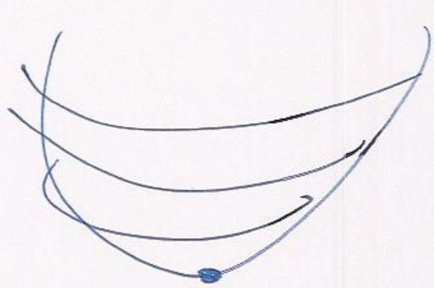
$$\Rightarrow T_2(x,y) = 1 + x + 2 \cdot (y-1) + \frac{1}{2} \cdot \Big(1 \cdot (x-0)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (x-0) \cdot (y-1) + 3 \cdot (y-1)^2 \Big)$$

$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$

$\forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$

rel. Max.





rel. Min.

$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$

$\forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0)$

Def.: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$,

f besitzt an Stelle $\vec{x}_0 \in D$ ein

relatives Maximum,

wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ gibt,

so daß für alle $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap D$:

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0).$$

analog: f besitzt an Stelle $\vec{x}_0 \in D$ ein relatives Minimum, falls

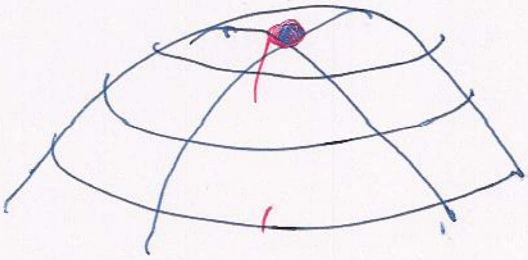
$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0), \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap D$$

$\vec{x}_0$ globales Maximum falls

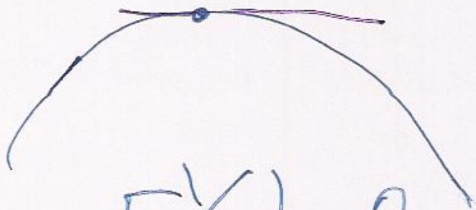
$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0), \forall \vec{x} \in D$$

analog: globales Minimum

$f(x_0,y_0)$



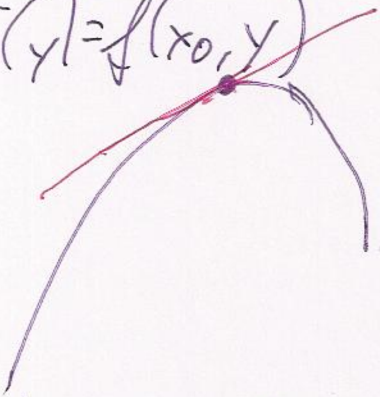
$F(x) = f(x,y_0)$



$F'(x_0) = 0$

(x_0,y_0)

$F(y) = f(x_0,y)$



$$\boxed{f_x(x_0,y_0) = 0}$$

$F'(y_0) = 0$

$f_y(x_0,y_0) = 0$

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Satz: $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge,

$f : D \to \mathbb{R}$.

f habe in $\vec{x}$ ein relatives Minimum und sei in $\vec{x}$ partiell differenzierbar.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{grad} f(\vec{x}) = 0.}$$

(also: $f_{x_1}(\vec{x}) = f_{x_2}(\vec{x}) = \dots = f_{x_n}(\vec{x}) = 0$)

Anmerkung: $\{\vec{x} : \operatorname{grad} f(\vec{x}) = 0\}$

$\Rightarrow$ stationäre Punkte

Bsp. $f(x,y) = x \cdot y$

$f_x = y$

$f_y = x$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = 0$
$y = 0$

stat. Punkt: $(x,y) = (0,0)$

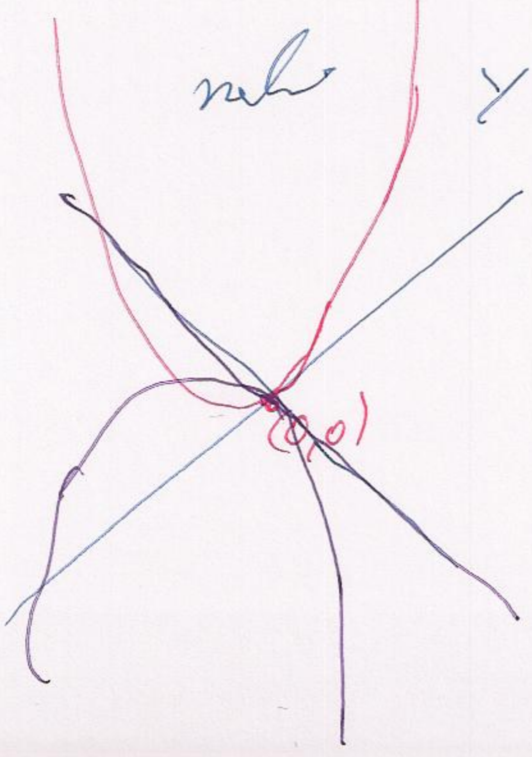
ABER: $(0,0)$ kein rel. Extremum

nehme $y = x$

$f(x,x) = x^2$

$y = -x$

$f(x,-x) = -x^2$



Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Menge

$f: D \to \mathbb{R}$

sei $\vec{x}_0 \in D$ Punkt mit $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$

$H(\vec{x})$ sei Hesse-Matrix von f in $\vec{x}$.

- falls $H(\vec{x}_0)$ negativ definit

  $\Downarrow$

  f besitzt bei $\vec{x}_0$ relatives Maximum

- falls $H(\vec{x}_0)$ positiv definit

  $\Downarrow$

  f besitzt bei $\vec{x}_0$ relatives Minimum

- falls $H(\vec{x}_0)$ indefinit

  $\Downarrow$

  $\vec{x}_0$ kein rel. Extremum, sondern Sattelpunkt

(x_0, y_0): stat. Punkt.

$$f(x,y) = T_2(x,y) + R(x,y) =$$

$$= f(x_0,y_0) + \cancel{\bigcirc} + \frac{1}{2} \cdot (x-x_0, y-y_0) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}_{\text{Hesse-Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{R(x,y)}_{\text{Fehler}}$$

(von kleinerer Ordnung)

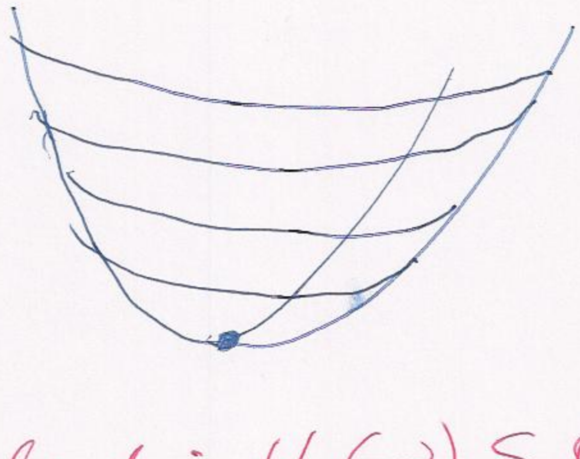
$$\mathcal{O}\left(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^3\right)$$

$$H(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$$

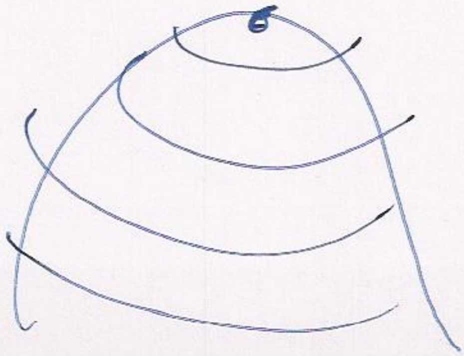
quadr. symm. Matrix

quadr. Form.

pos. definit: $H(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$



neg. definit: $H(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$




indefinit
Sattelpunkt

Entscheide, ob

sym. Matrix

positiv oder negativ

definit ist

$$\Downarrow$$

Hauptminorenkriterium

$n = 2$:

Hesse-Matrix: $H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

~~det f_{xx}~~

A_1 A_2

pos. def.:

$\det A_1 > 0 \Leftrightarrow f_{xx} > 0$

$\det A_2 > 0 \Leftrightarrow f_{xx} \cdot f_{xy} - (f_{xy})^2 > 0$

neg. def.: $\det A_1 < 0 \Leftrightarrow f_{xx} < 0$

$\det A_2 > 0 \Leftrightarrow f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$

$n = 2$: falls: $\det H_1 < 0$

$\Downarrow$

indefinit