Übungszettel 1

Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse (WS 2024)

1) In einer Stadt leben 10,000 Personen. Davon haben 400 Personen Schlangen, 150 davon sind Frauen, 4000 Personen sind Männer und 10 Personen haben Löwen. Alle Besitzer von Löwen sind Männer und 4 davon haben eine Schlange.

Wir wählen eine Person aus dieser Stadt zufällig aus.

- Sei A das Ereigniss, dass die ausgewählte Person einen Löwen hat.
- Sei B das Ereignis, dass die ausgewählte Person eine Schlange hat.
- Sei C das Ereignis, dass die ausgewählte Person ein Mann ist.

Berechne P(A), P(A|B), P(B|A), $P(A|B^c)$, P(A|C) und $P(A|C^c)$.

2) Es gibt 10 Kugeln in einer Urne, davon sind 4 weiß und 6 schwarz. Wir ziehen 4 Kugeln ohne Zurücklegen. Berechne die Wahrscheinlichket, dass wir 2 weiße und 2 schwarze Kugeln gezogen haben.

3) $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^{'}$ seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf derselben Grundmenge Ω. Zeig, dass dann die Mischung $p\mathbb{P} + (1-p)\mathbb{P}^{'}$ für eine beliebige Zahl $0 \leqslant p \leqslant 1$ ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω ist. (Mit anderen Worten, der Raum aller Wahrscheinlichkeitsmaße ist konvex)

Beschreibe ein konkretes Beispiel für eine solche Mischung an, wenn $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$.

Definition. Zwei Ereignisse A, B heißen *unabhängig*, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Drei Ereignisse A, B, C heißen *unabhängig*, wenn sie paarweise unabhängig sind (das bedeutet, dass A,B und B,C und A,C unabhängig sind) und außerdem

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C).$$

4) Seien A, B, C unabhängige Ereignisse. Zeig, dass sowohl $A \cup B$, C als auch A^c, B, C unabhängig sind.

5) Zwei faire Münzen (d.h., die Wahrscheinlichkeit von Kopf gleich 1/2 für beide) werden geworfen. Stellen Sie die Grundmenge Ω dar. Stellen Sie die Ereignisse $A = \{\text{die erste Münze gibt Kopf}\}$, $B = \{\text{die zweite Münze gibt Kopf}\}$, $C = \{\text{genau eine Münze gibt Kopf}\}$ als Teilmengen von Ω dar. Sind A, B, C unabhängig? Sind sie paarweise unabhängig?