1. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.
   (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in R$ gilt: $(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$. Hinweis: $a^2 := a \cdot a$.
   (b) (4 Punkte) In R gelte nun zusätzlich $r^2 = r$ für alle $r \in R$. Zeigen Sie, dass dann auch $r + r = 0$ für alle $r \in R$ gilt. Hinweis: Sie dürfen Aufgabenteil (a) auch dann benutzen, wenn Sie diesen nicht gelöst haben.

2. (7 Punkte) Überprüfen Sie, ohne Nutzung von Determinanten, ob die folgende Menge eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet:

$$\{(2, 3, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1)\}$$

3. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einen Körper K und U eine Teilmenge von V.
   (a) (3 Punkte) Angenommen U habe unendlich viele Elemente. Zeigen oder widerlegen Sie, ob U eine Basis von V sein kann.
   (b) (3 Punkte) Nehmen Sie an, dass U ein Untervektorraum von V mit gleicher Dimension wie V ist. Was können Sie daraus folgern? Gilt $U = V$? Beweisen Sie ihre Aussage gründlich.