

Analysis 2 für Informatik

Mathematische Methoden des Visual Computing

Zusätzliche Übungsbeispiele

- **Beispiel Z1)** Man berechne die quadratische Approximation der Funktion $F(x, y) = e^x \cos y$ im Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$.
- **Beispiel Z2)** Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+nx)^2}$$

für $x \in [0, \infty)$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert und berechnen Sie

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Hinweis: Sie dürfen die folgende für $|x| < 1$ gültige Identität ohne Beweis verwenden:

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

- **Beispiel Z3)** Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t, & -1 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- **Beispiel Z4)** Man bestimme das Frequenzspektrum der folgenden Funktion:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Wie groß muss die Abtastfrequenz ω_s sein, damit das Abtasttheorem für f anwendbar ist?

Hinweis: Man beachte Beispiel Z3).

- **Beispiel Z5)** Man bestimme eine Folge $(f_k)_{k \geq 0}$, sodass die z -Transformierte $F(z) = \mathcal{Z}\{(f_k)\}$ folgendermaßen gegeben ist:

$$\mathcal{Z}\{(f_k)\} = \frac{8z^2 - 19z}{(z-2)(z-3)}.$$

- **Beispiel Z6)** Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 2y' = e^x$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

- **Beispiel Z7)** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Euler'schen Differentialgleichung, indem man die Substitution $x = e^t$ und $y(x) = z(\ln(x)) = z(t)$ durchführt und damit die Gleichung auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführt, welche sich anschließend mit kennengelernten Methoden lösen lässt:

$$x^2 y'' + x y' - 3y = 5x^2.$$