Lösung von Aufgabe 384

Die Gruppe G der von 0 verschiedenen Restklassen modulo 5 mit der Multiplikation ist gegeben durch:

$G = \{1,2,3,4\}$ mit der Operationstafel:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Nach dem Satz von Lagrange (Buch S. 83) gilt für jede Untergruppe U von G:

$|U|$ teilt $|G| = 4$, also kommt nur $|U| = 1, 2, 4$ in Frage.

Für $|U| = 1$ und $|U| = 4$ ergeben sich die „trivialen Untergruppen" $U_1 = \{1\}$ und $U_2 = \{1,2,3,4\} = G$.

Eine Untergruppe mit 2 Elementen hat die Gestalt $\{1, x\}$ mit $x = x^{-1}$. Dafür gibt es eine einzige Möglichkeit: $U_3 = \{1,4\}$ mit der Operationstafel:

	1	4
1	1	4
4	4	1

Somit hat G genau die 3 Untergruppen U_1, U_2, U_3.