Problem:

geg.: Fkt. $f(x)$

gesucht: Fkt. $F(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

---

wenn $F(x)$ gef.:

$F(x)$ ... unbest. Integral von f

$\parallel$ Stammfkt. von f

$\int f(x) \cdot dx$

Unbestimmtes Integral

Def.: I Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$.

Jede Fkt. $F: I \to \mathbb{R}$ mit

$$F'(x) = f(x)$$

heißt **Stammfunktion** (= unbestimmtes Integral) von f

Symbol: $\int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrand}} \cdot dx$

Integrand

Integrationsvariable x

Also: Integrieren: Umkehrung des Differenzierens

Wie sehen alle Stammfkt. eines Fkt. f aus?

Satz: Sei $F(x)$ eine Stammfkt. von f

$\Rightarrow$ alle Stammfkt. von f sind von Gestalt

$$F(x) + c \;, \quad c \text{ Konstante}$$

also:

$$G(x) = F(x) + c \iff G'(x) = f(x).$$

$\Rightarrow$ Notation:

$$\boxed{\int f(x) \cdot dx = F(x) + c.}$$

Differentiationsregeln $\Rightarrow$ Integrationsregeln

Grundintegrale: $\overset{\text{Diff.}}{\Longrightarrow}$ $\underset{\text{Int.}}{\Longleftarrow}$

- $(x^\alpha)' = \boxed{\alpha \cdot x^{\alpha-1}}$

$\Downarrow$

$f(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$\Downarrow$

$F(x) = x^\alpha + C$

$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1) \cdot x^\alpha$

$\Downarrow$

$\underbrace{\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'}_{\text{Stammfkt. von } x^\alpha} = x^\alpha$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1}$$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

$(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}, \quad x < 0 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + \tilde{C}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int \frac{1}{x} \cdot dx = \begin{cases} \ln x + C_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + C_2, & x < 0 \end{cases}}$$

auch geschrieben: $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + C$

- $\int e^x \cdot dx = e^x + C \Leftrightarrow \left| (e^x)' = e^x \right.$

- $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C \qquad \left| (\sin x)' = \cos x \right.$

$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C \qquad \left| (\cos x)' = -\sin x \right.$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} \cdot dx = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad -1 < x < 1$

Satz: Integrationsregeln

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$
$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$$

- Linearität: $\int (\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))\cdot dx = \alpha\cdot\int f(x)\,dx + \beta\cdot\int g(x)\,dx$

- Partielle Integration:

Differentiationsregel
$$(f(x)\cdot g(x))' = \underbrace{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\cdot dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\cdot dx}$$

Produktregel: $f(x)\cdot g(x) = \int f'\cdot g + f\cdot g'$

$$= \int f'\cdot g\,dx + \int f\cdot g'\,dx$$

- Substitutionsregel: sei F Stammfkt. von f:

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\cdot dx = F(g(x)) + C}$$

Beweis: $(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$

$$= f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F(g(x)) = \int f(g(x))\cdot g'(x)\cdot dx$$

Substitutionsregel:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = F(g(x))$$

$$u = g(x) \qquad (\text{Vor.: } g' \text{ existiert})$$

$$\Downarrow$$

$$F(u) = \int f(u) \cdot du$$

Leibniz-Notation:

$$\boxed{u = g(x)} \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow \boxed{du = g'(x) \cdot dx}$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)} \cdot \underbrace{g'(x) \cdot dx}_{du} = \int f(u) \cdot du$$

Bsp.: $/\!/ \quad \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x \cdot dx$ ↯

$$\int x \cdot e^x \cdot dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \cdot dx =$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx =$$

$$= x \cdot e^x - e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+9} \cdot dx = \frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{x}{3}\right)}_{:=u}^2 + 1} \, dx =$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x}$$

$u = \frac{x}{3}$

$du = \frac{1}{3} \cdot dx$

$dx = 3 \cdot du$

$$= \frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{u^2+1} \cdot 3 \cdot du =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{u^2+1} \cdot du = \frac{1}{3} \cdot \arctan \underset{\frac{x}{3}}{\overset{\shortparallel}{u}} + C$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Integration rationaler Fkt.:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx \qquad , P(x), Q(x) \text{ Polynome}$$

$\Rightarrow$ **Partialbruchzerlegung:**

- $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow$ "Polynomdivision mit Rest"

$$\Rightarrow A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad , \deg R(x) < \deg Q(x)$$

- $Q(x)$: Faktorisieren

Vielfachheiten

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{m} \underbrace{(x-\lambda_i)}_{\text{Linearfaktoren}}^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{n} \underbrace{(Q_j(x))}_{\text{Quadratische Polynome}}^{l_j}$$

- Unbestimmter Ansatz:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k_i} \frac{A_{i,\mu}}{(x-\lambda_i)^\mu} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{l_i} \frac{B_{j,\nu} \cdot x + C_{j,\nu}}{(Q_j(x))^\nu}$$

$A_{i,\mu}, B_{j,\nu}, C_{j,\nu}$ ... unbestimmte Koeffizienten

- Multiplikation mit Nenner $Q(x)$
- Koeffizientenvergleich der Polynome der linken und rechten Seite

$\Downarrow$

Lineares Gleichungssystem für $A_{\ldots}, B_{\ldots}, C_{\ldots}$

- Lösen des Linearen Gleichungssystems

Zweck: einfacher zu integrierende Fkt.