Mathematik III

Vorlesung 10, 15.12.2006

Markus Nemetz

basierend auf den Aufzeichnungen von Michael Birsak

Dezember 2006

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
22.12.2006

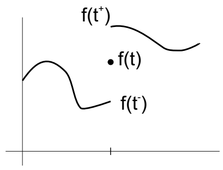
2 Fourier-Reihen

Geg.: $f(t)$, T-periodisch $\rightsquigarrow S_f(t)$ - zusammengesetzt aus $g(t) \rightsquigarrow S_g(t)$,$h(t) \rightsquigarrow S_h(t)$.

- **Eindeutigkeitssatz**

  Gilt für zwei stückweise stetige Funktionen $g(t)$,$h(t)$ mit Periode T die sog. Mittelwerteigenschaft

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t)$$



Falls nun $S_g(t) = S_h(t)$ so gilt $g(t) = h(t)$-

- **Darstellungssatz (für gleichmässige Konvergenz von $S_f(t)$)**

  Geg.: Stetige, T-periodische Funktion $f(t)$, deren Fourierreihe $S_f(t)$ gleichmässig auf $[0, T]$ konvergiert.

  Dann gilt: $S_f(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$

- **Darstellungssatz (für stückweise differenzierbare Funktionen)**

  Geg,; T-periodische Funktion $f(t)$, stückweise stetig differenzierbar auf $[0, T]$. Dann gilt für die Fourier-Reihe $S_f(t)$:

  - $S_f(t)$ konvergiert punktweise für alle $t \in \mathbb{R}$
  - $$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

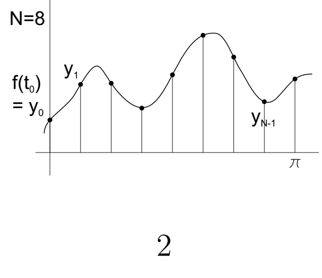
    d.h. $S_f(t) = f(t)$, für alle stetigen Punkte $t \in \mathbb{R}$
  - Falls $f(t)$ stetig auf Intervall $I = [a, b]$ konvergiert $S_f(t)$ gleichmässig azf I
  - An den Unstetigkeitsstellen von $f(t)$ tritt das Gibb'sche Phänomen auf (= Überschwinger)

3 Diskrete Fourier-Transformation

Geg.: Diskrete periodische Funktion $f(t)$, periodisch mit Periode T, wobei wir annehmen, dass in ein Periodenintervall genau N Werte der Funktion fallen.

Weitere Annahme: Werte der Funktion an äquidistanten Stützstellen, d.h.:

$$\underbrace{f(\overbrace{\ 0\ }^{t_0})}_{f_{t_0}=y_0}, \underbrace{f(\overbrace{1 \cdot \triangle t}^{t_1})}_{f_{t_1}=y_1}, \underbrace{f(\overbrace{2 \cdot \triangle t}^{t_2})}_{f_{t_2}=y_2}, \ldots, \underbrace{f(\overbrace{(N-1) \cdot \triangle t}^{t_{N-1}})}_{f_{t_{N-1}}=y_{N-1}}, \qquad \triangle t = \frac{T}{N}$$



Diese diskrete periodische Funktion ist durch N Werte $(y, y_1, \ldots, y_{N-1})$ vollständig charakterisiert.

Def.: Gegeben sind N Werte $(y, y_1, \ldots, y_{N-1})$ der diskreten periodischen Funktion. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathbf{c_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} \cdot k \cdot j}, \qquad k = 0, 1, \ldots N-1}$$

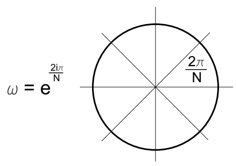
als **Spektralkoeffizienten** (oder Fourier-Koeffizienten) von$(y, y_1, \ldots, y_{N-1})$

$$c_k := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{y_j}_{f(t_j)=f(j\cdot\triangle t)} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N}\cdot k\cdot j} = \frac{1}{N\cdot\triangle t} \sum_{j=0}^{N-1} f(j\cdot\triangle t)\cdot e^{-\frac{2\pi i}{N\cdot\triangle t}\cdot k\cdot j\cdot\triangle t}\cdot\triangle t =$$
$$\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)\cdot e^{-\frac{2\pi i}{T}\cdot k\triangle t_j}\cdot\triangle t = \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot k\cdot\triangle t_j}\cdot\triangle t$$

Betrachte Fourier-Reihe:

$$\mathbf{c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\dot{e}^{-i\cdot\omega\cdot k\cdot t}\,d\,t}$$

Notation: N gegeben, ω erste von 1-verschiedene N-te Einheitswurzel. Es gilt: $\omega^N = 1 = e^{2\pi i}$:



Fourier-Matrix: $N \times N$-Matrix

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \ldots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Satz: Es gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = \overline{F_N} \cdot F_N = N \cdot E_N$$

E_N ist die Einheitsmatrix der Grösse $N \times N$:

$$E_N = \begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{F_N}$ ist die konjugierte Matrix.

$\overline{\omega^j} = \frac{1}{\omega^j} = \omega^{-j}$

Betrachte $\vec{c}$ (Spektralkoeffizienten) und $\vec{y}$:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-k \cdot j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \overline{\omega^{kj}}, \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}} \cdot \overline{\mathbf{F_N}} \cdot \tilde{\mathbf{y}}. \qquad N \cdot F_N \cdot \vec{c} = \underbrace{F_N \cdot \overline{F_N}}_{N \cdot E_N} \cdot \vec{y} = N \cdot E_N \cdot \vec{y} = N \cdot \vec{y}$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{F_N} \cdot \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{y}}$$

Def.: Gegeben $\vec{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})^T$. Dann wird durch DFT: $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N . \vec{y} \overbrace{\mapsto}^{\text{DFT}} \vec{c} = \frac{1}{N} \cdot \overline{F_N} \cdot \vec{y}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung beschrieben, die sog. **Diskrete Fourier-Transformation**.

Die **Inverse Fourier-Transformation** ist gegeben durch: IDFT: $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N . \vec{y} \overbrace{\mapsto}^{\text{IDFT}} \vec{y} = F_N \cdot \vec{c}$

$\vec{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})^T$ ist der Vektor der Spektralkoeffizienten von $\vec{y}$.

Beispiel: $\vec{y} = (1,0,1,0,1,0,\dots,1,0)^T$, Anmerkung: $N = 2M$ gerade. Gesucht: $\vec{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T$:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{y_2 j}_{=1} \cdot \omega^{-k\cdot 2\cdot j} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (\omega^{-k\cdot 2})^j$$

$$\text{Betrachte } \sum_{j=0}^{n} q^j = \begin{cases} n+1, & q = 1 \\ \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\omega^{-2k} = 1, \qquad e^{\frac{2\pi i}{N}(-2k)} = 1$$

$$\omega^q = 1 \;\Leftrightarrow\; N|Q (\Leftrightarrow q = l \cdot N,\, l \in \mathbb{Z})$$

$$\omega^{-2k} = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} k = 0 \\ k = \frac{N}{2} \end{cases}$$

$$\omega^{-2k} = 1 \;\Rightarrow\; c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (\omega^{-k\cdot 2})^j = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} 1 = \frac{1}{N}\cdot\frac{N}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \forall k = 0, k = \frac{N}{2}$$

$$\omega^{-2k} \neq 1 \;\Rightarrow\; c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} (\omega^{-k\cdot 2})^j = \frac{1}{N}\cdot\frac{(\omega^{-2k})^{\frac{N}{2}} - 1}{\underbrace{\omega^{-2k} - 1}_{\neq 0\, \checkmark}}$$

$$\text{betrachte: } \omega^{-2k})^{\frac{N}{2}} = \omega^{-kN} = e^{\frac{2\pi i}{N}\cdot(-k\cdot N)} = e^{-2\pi i k} = 1$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\frac{1-1}{\omega^{-2k}-1} = 0, k \in \{0,\dots,N-1\}\backslash\{0, \frac{N}{2}\}$$

4 Vorgriff (Einschub)

Gegeben: Funktion $f(t)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Falls der Cauchy-Hauptwert

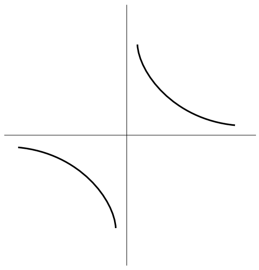
$$\mathcal{F}\{f(t)\} := F(\omega) := (\text{CHW}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\,\mathrm{d}\,t$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert, dann heißt $F(\omega)$ die Fourier-Transformierte oder **Spektralfunktion**von $f(t)$. $f(t)$ liegt im Zeitbereich (= Originalbereich), $F(\omega)$ liegt im Frequenzebreich (= Bildbereich).

Definition: Geg. ist eome Funktion $f(t)$. Der Cauchy-Hauptwert (CHW) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ ist folgendermassen definiert:

$$text(CHW) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Beispiel: $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$, $\int_{-N}^{N} f(t) \,\mathrm{d}\, t = 0, \ \forall N$:



Anmerkung: Falls für die Funktion $f(t)$ das uneigentliche Riemann-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \,\mathrm{d}\, t$ existiert, dann existiert auch (CHW) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}\, t$ und es gilt: (CHW) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}\, t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}\, t$