

1. Übungstest

17.04.2018

Name:

Matrikelnummer:

Gruppe A

Alle Rechenschritte sind anzugeben, und alle Antworten sind genau zu begründen.

Beispiel 1: /7

Beispiel 2: /5

Beispiel 3: /8

SUMME: /20

1. (7 Punkte) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ auf Beschränktheit, Monotonie und Konvergenz und geben Sie ggf. die kleinste obere und die größte untere Schranke sowie den Grenzwert an:

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n}{6n^2 - 2}$$

Lösung: Wir berechnen zuerst den Grenzwert:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n}{6n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{6 - \frac{2}{n^2}} = \\ &= \frac{3 + 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{6 - 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{3 + 2 \cdot 0}{6 - 2 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

also ist die Folge konvergent und somit beschränkt.

Es ist $a_1 = \frac{3+2}{6-2} = \frac{5}{4} > \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, also vermuten wir: $(a_n)_{n \geq 1}$ ist streng monoton fallend.

Beweis:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\Leftrightarrow \frac{3(n+1)^2 + 2(n+1)}{6(n+1)^2 - 2} < \frac{3n^2 + 2n}{6n^2 - 2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2}{6n^2 + 12n + 6 - 2} < \frac{3n^2 + 2n}{6n^2 - 2} &\Leftrightarrow \frac{3n^2 + 8n + 5}{6n^2 + 12n + 4} < \\ < \frac{3n^2 + 2n}{6n^2 - 2} &\Leftrightarrow (3n^2 + 8n + 5) \cdot (6n^2 - 2) < (3n^2 + 2n) \cdot (6n^2 + 12n + 4) \\ \Leftrightarrow 18n^4 + 48n^3 + 30n^2 - 6n^2 - 16n - 10 &< 18n^4 + 12n^3 + 36n^3 + 24n^2 + 12n^2 + 8n \\ \Leftrightarrow -16n - 10 < 12n^2 + 8n &\Leftrightarrow 0 < 12n^2 + 24n + 10 \text{ o.k.} \end{aligned}$$

Also haben wir:

größte untere Schranke: $\inf (a_n)_{n \geq 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

kleinste obere Schranke: $\sup (a_n)_{n \geq 1} = a_1 = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$

2. (5 Punkte) Bestimmen Sie alle (uneigentlichen) Häufungspunkte sowie $\liminf$ und $\limsup$ der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ gegeben durch:

$$a_n = (-1)^{n(n+1)} \cdot 3 - \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (1 + (-1)^n)n.$$

Sind folgende Aussagen richtig? (Begründung!)

- (i) Im Intervall $(0, 2)$ liegen unendlich viele Folgenglieder.
- (ii) Im Intervall $(4, 6)$ liegen unendlich viele Folgenglieder.

Lösung: Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ besteht aus 4 Summanden:

$(-1)^{n(n+1)} \cdot 3 = 3$, da $n(n+1)$ stets gerade ist.

$-\frac{1}{n}$ hat den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\frac{1}{n}) = 0$.

$-\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ hat die Periode 4 mit den folgenden Werten:

$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $-\sin(\pi) = 0$, $-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, $-\sin(2\pi) = 0$.

$(1 + (-1)^n)n$ hat den Wert 0 für ungerades n und den Wert $2n$ für gerades n .

Wir betrachten daher die folgenden 4 Teilfolgen:

$n \equiv 1 \pmod{4}$: $a_n = 3 - \frac{1}{n} - 1 + 0 = 2 - \frac{1}{n} \rightarrow 2, n \rightarrow \infty$

$n \equiv 2 \pmod{4}$: $a_n = 3 - \frac{1}{n} + 0 + 2n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$

$n \equiv 3 \pmod{4}$: $a_n = 3 - \frac{1}{n} + 1 + 0 = 4 - \frac{1}{n} \rightarrow 4, n \rightarrow \infty$

$n \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4}$: $a_n = 3 - \frac{1}{n} + 0 + 2n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$

Also gibt es die 3 Häufungspunkte:

$$2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \quad 4, \quad +\infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

(i) In $(0, 2)$ liegen die unendlich vielen Folgenglieder

$$a_n = 2 - \frac{1}{n}, \quad n \equiv 1 \pmod{4}.$$

(ii) In $(4, 6)$ liegt kein Folgenglied, da für gerades n stets $a_n = 3 - \frac{1}{n} + 2n > 6$ ist.

3. (8 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}.$$

Lösung: Wir untersuchen die erste Reihe mit dem Quotientenkriterium in Limesform:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1} ((n+1)!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! (2n+1)(2n+2) \cdot 2^n (n!)^2}{(2n)! \cdot 2^n \cdot 2 (n!)^2 (n+1)^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{2(1+\frac{1}{n})^2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Wegen $2 > 1$ ist die erste Reihe divergent.

Die zweite Reihe ist alternierend, daher wenden wir das Kriterium von Leibniz an:

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$ sowie $\log(n+1) > \log n$,
also $\frac{1}{\log(n+1)} < \frac{1}{\log n}$, daher ist die Reihe
 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$ konvergent.

Es gilt $\log n < n$ (wegen $n = e^{\log n} < e^n$), also
 $\frac{1}{n} < \frac{1}{\log n}$. Da $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist, muss also
auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ divergent sein.