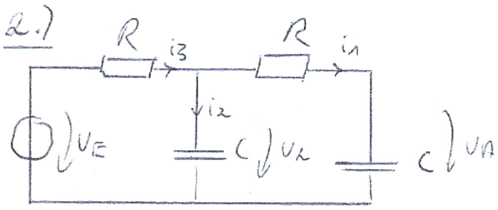
Prüfung Signale und Systeme 1 am 6.10.2010

Beispiel 1.)

Die Stoßantwort von einem System ist der Heaviside Sprung. Wie sieht die Nullzustandsantwort auf einen Rechteckimpuls aus?

2.)



$U_{EB} = U_{AB} = U_B$

$T_B = RC$

$i_1 = C\cdot\frac{du_A}{dt}$; $u_2 = R\cdot i_1 + u_A = RC\frac{du_A}{dt} + u_A$; $i_2 = C\frac{du_2}{dt} = RC^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + C\frac{du_A}{dt}$

$i_3 = i_1 + i_2 = C\frac{du_A}{dt} + RC^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + C\frac{du_A}{dt} = RC^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 2C\frac{du_A}{dt}$

$u_E = Ri_3 + u_2 = R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 2RC\frac{du_A}{dt} + RC\frac{du_A}{dt} + u_A$

$\Rightarrow R^2C^2\frac{d^2u_A}{dt^2} + 3RC\frac{du_A}{dt} + u_A = u_E$

$u_A = U_B y$, $u_E = U_B u$, $t = T_B\tau$

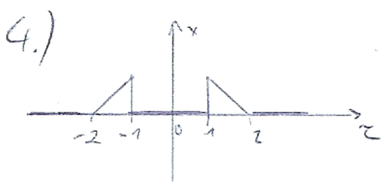
$\Rightarrow \left(\frac{RC}{T_B}\right)^2 U_B y'' + 3\left(\frac{RC}{T_B}\right) U_B y' + U_B y = U_B u$

$\Rightarrow \underline{\underline{y'' + 3y' + y = u}}$

Beispiel 3.)

Differentialgleichung mit Anfangswerten war gegeben und man sollte die Lösung dazu finden -> Anfangswertproblem.

4.)

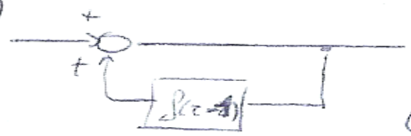


Signalenergie:

$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 \cdot d\tau = \int_{-2}^{-1} (\tau+2)^2 \cdot d\tau + \int_{1}^{2} (\tau-2)^2 \cdot d\tau$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

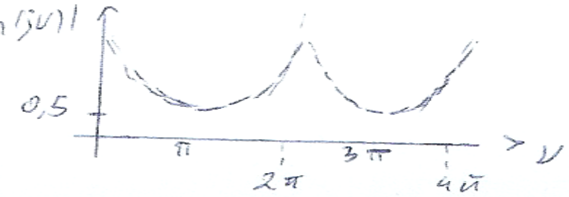
5.)



Betragsfrequenzgang

$$G(s) = \frac{1}{1-e^{-s}}$$

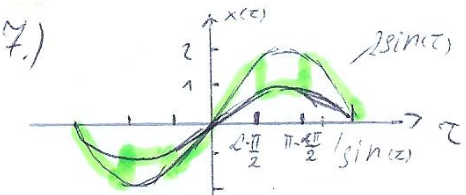
$$G(j\nu) = \frac{1}{1-e^{-j\nu}} \rightarrow |G(j\nu)| = \frac{1}{\sqrt{2[1-\cos(\nu)]}}$$



Beispiel 6.)

Eine Übertragungsfunktion war gegeben die man auf Stabilität untersuchen sollte. Anschließend war gefragt wie des Stationäre Ausgangssignal aussieht wenn am Eingang X*cos(x*tau) anliegt. (Leider weiß ich die Werte nicht mehr, deshalb die x)

7.)



$x(\tau) = -x(-\tau)$

Amplitude der Grundschwingung = ?

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-jk\tau}\,d\tau$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\Big[4\cdot\int_0^{\frac{2\pi}{2}} 2\cdot\sin(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau$$

$$+\, 2\cdot\int^{\pi-\frac{2\pi}{2}} \sin(\tau)e^{-j\tau}\,d\tau\Big]$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\left[2\int_0^{\frac{2\pi}{2}} \frac{1}{2j}(e^{+j\tau}-e^{-j\tau})\cdot e^{-j\tau}\,d\tau + \int_{\frac{2\pi}{2}}^{\pi-\frac{2\pi}{2}} \frac{1}{2j}(e^{+j\tau}-e^{-j\tau})\cdot e^{-j\tau}\,d\tau\right]$$

$$c_1 = \frac{1}{2j\pi}\left[2\int_0^{\frac{2\pi}{2}}(1-e^{-j2\tau})\,d\tau + \int_{\frac{2\pi}{2}}^{\pi-\frac{2\pi}{2}}(1-e^{-j2\tau})\,d\tau\right]$$

$$c_1 = \frac{1}{2j\pi}\left[2\cdot\left[\tau-\frac{je^{-j2\tau}}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{2}} + \left[\tau-\frac{je^{-j2\tau}}{2}\right]_{\frac{2\pi}{2}}^{\pi-\frac{2\pi}{2}}\right] =$$

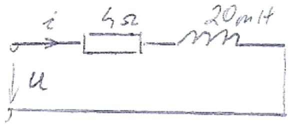
$$= \frac{1}{2j\pi}\left[\cancel{2\pi} - je^{-j2\pi} + j + \pi - \frac{2\pi}{2} - j\frac{e^{j2\pi}}{2} - \cancel{\frac{2\pi}{2}} + j\frac{e^{-j2\pi}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{j2\pi}\left[j + \pi - j\frac{e^{+j2\pi}}{2} - j\frac{e^{-j2\pi}}{2}\right] = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2j} - \frac{1}{4\pi}\left[e^{j2\pi}+e^{-j2\pi}\right]$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{j2} - \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi)$$

$$c_1 = \frac{1-\cos(2\pi)}{2\pi} - j\frac{1}{2}$$

$$|c_1| = \frac{\sqrt{\cos(k\pi)^2 - 2\cdot\cos(2\pi) + \pi^2 + 1}}{2\pi}$$

8.) 

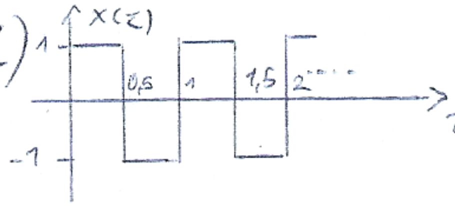
$u(t) = 2V + 5V \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) \quad \omega_1 = 100\pi \cdot s^{-1}$

Effektivwert des Stromes i.

$$u(t) = U_0 + \hat{U}_1 \cdot \cos(\omega_1 t) = U_0 + Re[\hat{U}_1 e^{j\omega t}] \text{ mit } U_0 = 2V \text{ und } \hat{U}_1 = 5V$$

$$i(t) = \frac{U_0}{Z(j0)} + Re\left[\frac{\hat{U}_1 e^{j\omega_1 t}}{Z(j\omega_1)}\right] = 0{,}5A + 0{,}671A \cdot \cos(\omega_1 t - 1{,}004)$$

$$I = \sqrt{(0{,}5A)^2 + (0{,}671A/\sqrt{2})^2} = \underline{\underline{0{,}689A}}$$

9.) 

Geschlossener Ausdruck für wechselseitige Schwingung

Laplace-Transformierte für eine T periodische stückweise stetige Funktion $x(\tau)$:

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_{0^-}^{T} x(\tau) e^{-s\tau} \cdot d\tau$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{1-e^{-s}} \left[\int_{0^-}^{0{,}5} e^{-s\tau} \cdot d\tau + \int_{0{,}5}^{1} -e^{-s\tau} \cdot d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-s}} \left[\frac{1-e^{-\frac{s}{2}}}{s} + \frac{e^{-s} - e^{-\frac{s}{2}}}{s}\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-e^{-s\frac{1}{2}}}{1+e^{-s\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{s}}}$$

ad 9.) Wegen des Verschiebungssatzes gilt:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT} F(s)$$

Annahme: $f(t) - f(t-T) = \begin{cases} f(t) & \text{bei } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{bei } t \geq T \end{cases}$

$$\Rightarrow (1-e^{-Ts}) F(s) = \mathcal{L}\{f(t) - f(t-T)\}(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)$$

$$\underline{\underline{F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st}}}$$

Beispiel 10.) Übertragungsfunktion aufstellen anhand eines Schaltbildes.