36. Durch Einsetzen bestätige man, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = 12 \cdot \ln x$ **durch** $y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \cdot \ln x + \frac{1}{3}, C_1, C_2 \in R$ **gegeben is. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen** $y(1) = \frac{2}{3}$**,** $y'(1) = -1$.

also wir leiten nun $y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \cdot \ln x + \frac{1}{3}, C_1, C_2 \in R$ zwei mal ab:

$$y'(x) = 3C_1x^2 + (-2)\frac{C_2}{x^3} - 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y''(x) = 6C_1x + (-2) \cdot (-3)\frac{C_2}{x^4} - 2 \cdot (-1)\frac{1}{x^2} = 6C_1x + 6\frac{C_2}{x^4} + 2\frac{1}{x^2}$$

so und nun setzen wir y''(x) ein in $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = 12 \cdot \ln x$:

$$x^2 \cdot \left(6C_1x + 6\frac{C_2}{x^4} + 2\frac{1}{x^2}\right) - 6y = 12 \cdot \ln x = 6C_1x^3 + 6\frac{C_2}{x^2} + 2 \cdot 1 - 6y$$

$$6C_1x^3 + 6\frac{C_2}{x^2} + 2 - 12\ln x = 6y \Rightarrow y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{2}{6} - 2\ln x = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{3} - 2\ln x$$

und das ist ja genau: $y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \cdot \ln x + \frac{1}{3}$

so nun müssen wir noch $y(1) = \frac{2}{3}$ und $y'(1) = -1$ einsetzen, damit wir zu der partikulären Lösung kommen:

$$y(1) = \frac{2}{3} = C_1 \cdot 1^3 + \frac{C_2}{1^2} - 2 \cdot \ln 1 + \frac{1}{3} = C_1 + C_2 - 2 \cdot 0 + \frac{1}{3} = C_1 + C_2 + \frac{1}{3}$$

$$y'(1) = -1 = 3C_1(1)^2 + (-2)\frac{C_2}{(1)^3} - 2 \cdot \frac{1}{(1)} = 3C_1 - 2C_2 - 2$$

also haben wir unsere 2 Gleichungen: zu erst multipliziere ich die erste Gleichung mit 2 und anschließen addiere ich die zwei Gleichungen:

$$\frac{2}{3} = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} \Big| \cdot 2 \Rightarrow \frac{4}{3} = 2C_1 + 2C_2 + \frac{2}{3}$$

$$-1 = 3C_1 - 2C_2 - 2$$

$$\frac{4}{3} - 1 = 5C_1 + \frac{2}{3} - 2 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 2 = 5C_1 = \frac{1 - 2 + 6}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow C_1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

so nun zurück einsetzen in die erste Gleichung:

$$\frac{2}{3} = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + C_2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

zuletzt noch einsetzen in unsere Angabe, um die partikuläre Lösung zu bekommen:

$$y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \cdot \ln x + \frac{1}{3} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \ln x + \frac{1}{3}$$