Übungsblatt 6 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

36.) Das Faltungsprodukt $(f*g)(t)$ zweier Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ ist definiert durch $(f*g)(t) := \int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Für die Laplace-Transformation gilt nun die Produktformel $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$, wenn $F(s)$ und $G(s)$ die Laplace-Transformierten von $f(t)$ resp. $g(t)$ bezeichnen. Man ermittle nun die folgenden Faltungsprodukte resp. ihre Laplace-Transformierten:

(a) $1 * 2$,

(b) $e^t * e^{2t}$.

37.) Man bestimme die Urbilder $f(t)$ der angegebenen Laplace-Transformierten $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$:

(a) $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$,

(b) $F(s) = \frac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s}$.

Anmerkung: Man beachte $-\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\}$ resp. betrachte die Laplace-Transformierte der Heaviside'schen Sprungfunktion.

38.) Man löse folgendes AWP mittels L-Transformation:

$$y'' + 2y' - 3y = 6\sinh(2t), \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 4.$$

Bemerkung: $\sinh(t) := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

39.) Man zeige: Ist $f(t)$ periodisch mit Periode p, d. h. $f(t+p) = f(t)$ für alle t, dann gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_{t=0}^{p} e^{-st} f(t)dt.$$

Anmerkung: Man verwende $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{t=0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t=np}^{(n+1)p} f(t)e^{-st}dt$ und substituiere geeignet.

40.) Man löse mittels L-Transformation die folgende Differential-Integralgleichung:

$$0 = \dot{y}(t) + \int_{\tau=0}^{t} y(\tau)\cosh(t-\tau)d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Bemerkung: $\cosh(t) := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

41.) Man löse mit Hilfe der L-Transformation folgendes AWP (lineare Dgl. mit nichtkonstanten Koeffizienten):

$$y'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

Anmerkung: Durch die L-Transformation erhält man im Bildbereich eine lineare Dgl. 1. Ordnung. Die in der allgemeinen Lösung auftretende Konstante bestimme man dadurch, daß $Y(s)$ die Laplace-Transformierte der L-transformierbaren Fkt. $y(t)$ sein soll und daher $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ gelten muß.

42.) Man löse das (eindeutig bestimmte) RWP

$$\ddot{y} - y = 0, \quad y(0) + \dot{y}(0) = 2, \; y(0) + y(1) = 4,$$

indem man die allgemeine Lösung der Dgl. bestimmt und die Unbestimmten an die Randbedingungen anpaßt.
Ist das RWP für alle Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ für Randbedingungen $y(0)+\dot{y}(0) = a$, $y(0)+y(1) = b$ eindeutig lösbar?