BWOpt-Cheatsheet

2025-01-22 von Nudel
NOTE (Nudel): Dieses Dokument bietet eine kompakte Übersicht der mathematischen Vorgehensweisen über alle möglichen Themen, die in BWOpt besprochen werden. Nützlich, um das Dokument zu verstehen ist Folgendes:

1. Ableiten von Funktionen sollten kein Problem darstellen
2. grundlegende Theorie aus der VO sollte verstanden werden
3. Lagrange Funktion sollte bekannt sein (entweder aus Mikroökonomie oder aus BWOpt)

1. Optimierung ohne Nebenbedingungen

1.1 Allgemeines Vorgehen

4. Min./Max. bestimmen + global / lokal:
   - min: Minoren sind ALLE positiv
   - max: mit Minus beginnend alternierend
   - global: variablenunabhängig
   - lokal: hängt von mindestens einer Variable ab
5. konvex/konkav
   - konvex -> Minimum
   - konkav -> Maximum
6. Eigenwerte berechnen:
   - $det - I * \lambda$

1.2 Spezialfälle / Ausnahmen

Es gibt hier keine

---

2. Optimierung unter Gleichheitsbedingungen

2.1 Allgemeines Vorgehen

7. bei Gleichbedingung (n & m) richtig interpretieren:
   - die letzten ($n - m$) ("n minus m") Minoren B_i müssen:
     1. für max: $(-1)^{m+1}$ mit diesem VZ beginnen und alternieren
     2. für min: $(-1)^m$ **alle** mit diesem VZ sein
8. 4x4 Matrix det berechnen: [4x4 Matrix-Video]

1. Spalte/Zeile mit den meisten 0 auswählen
2. +/- Gitter über gesamte Matrix legen
3. Spalte/Zeile von ausgewählter Zahl streichen und diese mit der neuen det multiplizieren

NOTE (Nudel): für 3x3 Matrizen kann man auch die Regel von Sarrus verwenden

2.2 Spezialfälle / Ausnahmen

Cobb-Douglas (Produktionsfunktion)

Begriffe, die exakt so in der Angabe stehen:
9. **"Grenzproduktivität"**
- MP für jedes r ausrechnen
10. **"optimaler Expansionspfad"**
- Lagrange mithilfe von Produktionsfunktion ($f(x)$) und Kostenfunktion als Nebenbedingung aufstellen
11. **"Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge"**
- Verhältnis von r_1 und r_2 ausrechnen: $\frac{MP_1}{q_1} = \frac{MP_2}{q_2} = \lambda$
- r_2 in der Produktionsfunktion mit r_1 substituieren
- Produktionsfunktion nach r_1 umstellen, sodass $r_1 = \frac{x}{(...)}$
- Kostenfunktion nach x umstellen: r_2 -> r_1 -> x
12. **"Faktorkombination, die den Output maximiert"**
- Kostenfunktion ausrechnen und nach r_1 umstellen
- r_2 aus dem Verhältnis zu r_1 berechnen
13. **"approximative Outputänderung, bei höherem K"**
- $\Delta x = \lambda * \Delta K$
- λ aus 2. berechnen und einsetzen

---

3. Portfoliooptimierung

3.1 Allgemeines Vorgehen

- einfach Formeln auswendig lernen & Matrizenmultiplikation
- hier sind die Beispiele aus der Beispielsammlung sehr umfangreich
- Definitionen:

$$\begin{aligned} \mu & \quad \text{... Erwartungswert} \\ \Sigma & \quad \text{... Kovarianzmatrix} \\ \Sigma^{-1} & \quad \text{... inverse Kovarianzmatrix} \\ \mathbb{1} & \quad \text{... Spaltenvektor} \\ \mathbb{1}' & \quad \text{... Zeilenvektor} \\ \gamma & \quad \text{... Risikoaversion} \end{aligned}$$

Globales Minimumvarianz-Portfolio

$$w^{gmv} = \frac{1}{\mathbb{1}' * \Sigma^{-1}\mathbb{1}} * \Sigma^{-1} * \mathbb{1}$$

Erwartete Rendite von w^{gmv}

$$\mu' * w^{gmv}$$

Varianz von w^{gmv}

$$Var(w^{gmv}) = w^{gmv\ \prime} * \Sigma^{-1} * w^{gmv}$$

Kovarianz von p_1, p_2

$$Cov(p_1, p_2) = p_2{}' * \Sigma\ * p_1$$

$\Delta p_1, p_2$

$$\Delta p_1, p_2 = p_1 - p_2$$

Optimal Diversifiziertes Portfolio von p_1, p_2

$$p^{od} = p_2 - \frac{Cov(p_2, \Delta_{p_1,p_2})}{Var(\Delta p_1, p_2)} * \Delta p_1, p_2$$

Korrelation von p_1, p_2

$$Cor(p_1, p_2) = \frac{Cov(p_1, p_2)}{\sqrt{Var(p_1) * Var(p_2)}}$$

3.2 Spezialfälle / Ausnahmen

Minimum-Varianz Portfolio bei gegebener Renditeerwartung $\bar{\mu}$

kommt selten bis gar nicht
NOTE (Nudel): kam im WS2024 zu keiner Prüfung/Zwischentest

$$w^{mv}(\bar{\mu}) = \frac{C - \bar{\mu} * B}{|M|} * \Sigma^{-1} * \mathbb{1} + \frac{\bar{\mu} * A - B}{|M|} * \Sigma^{-1} * \mu$$

A, B, C werden wie folgt berechnet:

$$A = \mathbb{1}' * \Sigma^{-1} * \mathbb{1}$$
$$B = \mathbb{1}' * \Sigma^{-1} * \mu$$
$$C = \mu' * \Sigma^{-1} * \mu$$

M:

$$|M| = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = A * C - B^2$$

Maximales-Nutzen-Portfolio mit Risikoaversion

kommt oft

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (70)

- Aber das globale Minimum-Varianz Portfolio ist nicht nur dann das optimale Portfolio, wenn man unter allen Umständen Risiko vermeiden will.
- Als (risikoaverser) EntscheidungsträgerIn sucht man nach einem Portfolio, das die optimalen Risiko-/Ertrags-Relation hat.
- Die Präferenzen so einer(s) EntscheidungsträgerIn werden in der Nutzentheorie über eine Nutzenfunktion abgebildet, deren Maximierung das Ziel ist.

Mean-Variance Utility / Erwartungswert-Varianz-Nutzen

Ein(e) EntscheidungsträgerIn mit Mean-Variance Utility (Erwartungswert-Varianz-Nutzen) wählt jenes Portfolio $\mathbf{w}$, das die Nutzenfunktion

$$u(r_{\mathbf{w}}) = E(r_{\mathbf{w}}) - \frac{1}{2}\gamma \mathrm{Var}(r_{\mathbf{w}})$$

maximiert. Wobei der Parameter γ die Risikoaversion charakterisiert.

γ ist direkt aus der Angabe abzulesen

$$w^* = \frac{1}{\gamma} * \Sigma^{-1} * (\mu - \frac{B-\gamma}{A} * \mathbb{1})$$

Inverse Kovarianzmatrix aus Kovarianzmatrix herleiten:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{A * C - B^2} * \begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

- das heißt aus unserer ursprünglichen Matrix A mit C vertauschen und B negieren, dann jeden Wert mit dem Bruch multiplizieren

---

4. Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen

4.1 Allgemeines Vorgehen

Kuhn Tucker

1. Nebenbedingungen umstellen auf
   - ≥ 0 bei Maximierungsproblemen
   - ≤ 0 bei Minimierungsproblemen
2. Lagrange aufstellen
3. Lagrange einmal partiell nach allen Variablen ableiten
4. Kuhn Tucker Bedingungen aufstellen
   1. $L_{\lambda_1} * \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad L_{\lambda_1} \geq 0$
   2. $L_{\lambda_2} * \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad L_{\lambda_2} \geq 0$
   3. $L_{x_1} * x_1 = 0, \quad x_1 \geq 0, \quad L_{x_1} \leq 0$
   4. $L_{x_2} * x_2 = 0, \quad x_2 \geq 0, \quad L_{x_2} \leq 0$

   => 1. & 2. sind Schattenpreise, 3. & 4. sind relative Deckungsbeiträge
5. Bindend und Nicht-Bindend Tabelle aufstellen
   Disclaimer: im nachfolgenden Teil wird NB für "nicht-bindend" verwendet, NICHT verwechseln mit "Nebenbedingung"!!!

Fall	B	NB
I	$L_{\lambda_1} = 0$	$\lambda_1 = 0$
II	$L_{\lambda_2} = 0$	$\lambda_2 = 0$
III	$x_1 = 0$	$L_{x_1} = 0$
IV	$x_2 = 0$	$L_{x_2} = 0$

6. Versuche durchprobieren
   1. der **1. Versuch** ist immer das unbeschränkte Problem, d.h. $\lambda_i = 0$ (zusätzlich die rel. DB = 0) -> alle NB (nicht-bindend)
   2. schauen, welche von den Nebenbedingungen verletzt sind -> diese werden beim **2. Versuch** als bindend betrachtet (wenn nur eine bindend ist, kann man nur eine als bindend und die andere als nicht bindend betrachten, was das Problem möglicherweise um einiges leichter machen würde)
   3. kommt hier ein λ_i mit einem negativen Vorzeichen vor, wird dieses als nicht bindend zurückgesetzt ($\lambda_i = 0$)
      (NOTE (Nudel): bei den Bsps, die ich gerechnet habe sind wir vor diesem Schritt schon fertig)

4.2 Spezialfälle / Ausnahmen

Duales Problem

Interpretation der Variablen:

- $\lambda_x = 0$ -> Beschränkung für Rohstoff ist **nicht bindend**
- $\lambda_x \geq 0$ -> Beschränkung für Rohstoff ist bindend
- $x < 0$ -> Produkt wird im Optimum **nicht produziert**
- $x = 0$ -> Produkt wird im Optimum produziert

Vorgehen:

1. Maximierungs - oder Minimierungsfunktion aufstellen (Zielfunktion des primalen Problems)
2. Nebenbedingungen aufstellen
3. Nebenbedingungen umstellen:
   - für max: ≥ 0
   - für min: ≤ 0
4. Lagrange aufstellen
5. in Lagrange x_i herausheben

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2) &= 120x_1 + 200x_2 + \lambda_1(1000 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(700 - x_1 - x_2) \\ &= x_1 * (120 - \lambda_1 - \lambda_2) + x_2(200 - 2\lambda_1 - \lambda_2) + 1000\lambda_1 + 700\lambda_2\end{aligned}$$

6. mit den alleinstehenden Lambdas kann man dann die Zielfunktion des dualen Problems aufstellen:

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = 1000\lambda_1 + 700\lambda_2$$

7. die Ausdrücke in den Klammern sind die Nebenbedingungen des dualen Problems und stellt man für ein Maximierungsproblem ≤ 0 sonst ≥ 0

$$\begin{aligned}g_1 &: 120 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \\ g_2 &: 200 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0\end{aligned}$$

8. mithilfe der Angabe (R-Command) sollten nun alle Fragen beantwortet werden können, indem man die gegebenen Werte einfach richtig einsetzt

R commands:

1. `sol$duals` : liefert Lagrange-Multiplikatoren und relative Deckungsbeiträge

```
0   5   -45   0
λ1  λ2  x1    x2
```

2. `sol$objval` : optimaler Zielfunktionswert

```
150
Zielfunktionswert
```

3. `sol$solution` : optimale Werte der Variablen der Zielfunktion
R:

```
2   0
x₁  x₂
```

- hier eine Ausarbeitung von Bbob, da jedes Beispiel für sich individuell zu lösen ist, ier gibt es also nicht unbedingt ein Kochrezept, das zum Erfolg führt: Ausarbeitung BSP DynamischeProgrammierung.pdf

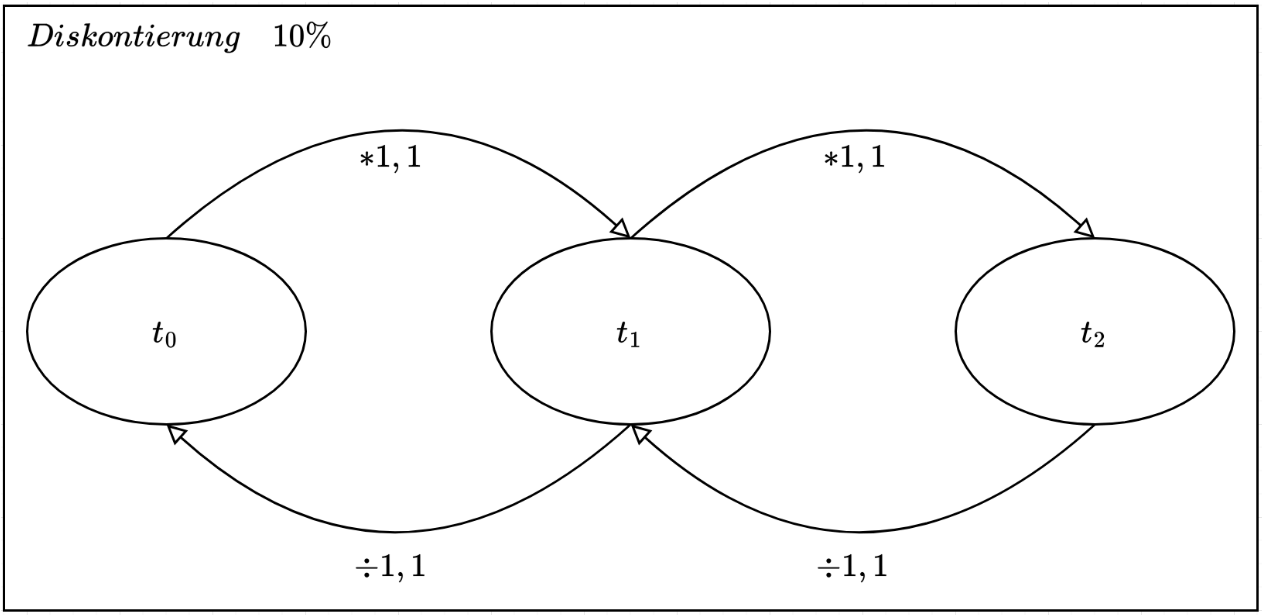
5.1 Allgemeines Vorgehen

Bellman mit Tabelle

- man beginnt immer beim letzten t_i
- danach schaut man (je nach Angabe unterschiedlich, hier muss man verstehen, was die Angabe verlangt) welche Startzustände s_i und welche Aktionen a_i möglich sind
- dann rechnet man die Kosten für die jeweilige Aktion a_i aus und schreibt sie in die Tabelle
- $V_i(s_i)$ nimmt sich dann den optimalen (kleinsten/größten, je nach Angabe unterschiedlich) heraus
- $g_i(s_i)$ gibt an welche a_i für $V_i(s_i)$ ausgewählt wurde
- variable Kosten, wie Lagerkosten und Diskontierung werden immer in t_{i-1} abgerechnet (in der vorherigen Periode)
- diese Schritte werden für jedes t_i bis $i = 0$ durchgeführt
  => da jedes Teilproblem für sich optimal gelöst wird, kann man durch gleichzeitiges Verwenden dieser eine globale optimale Lösung finden

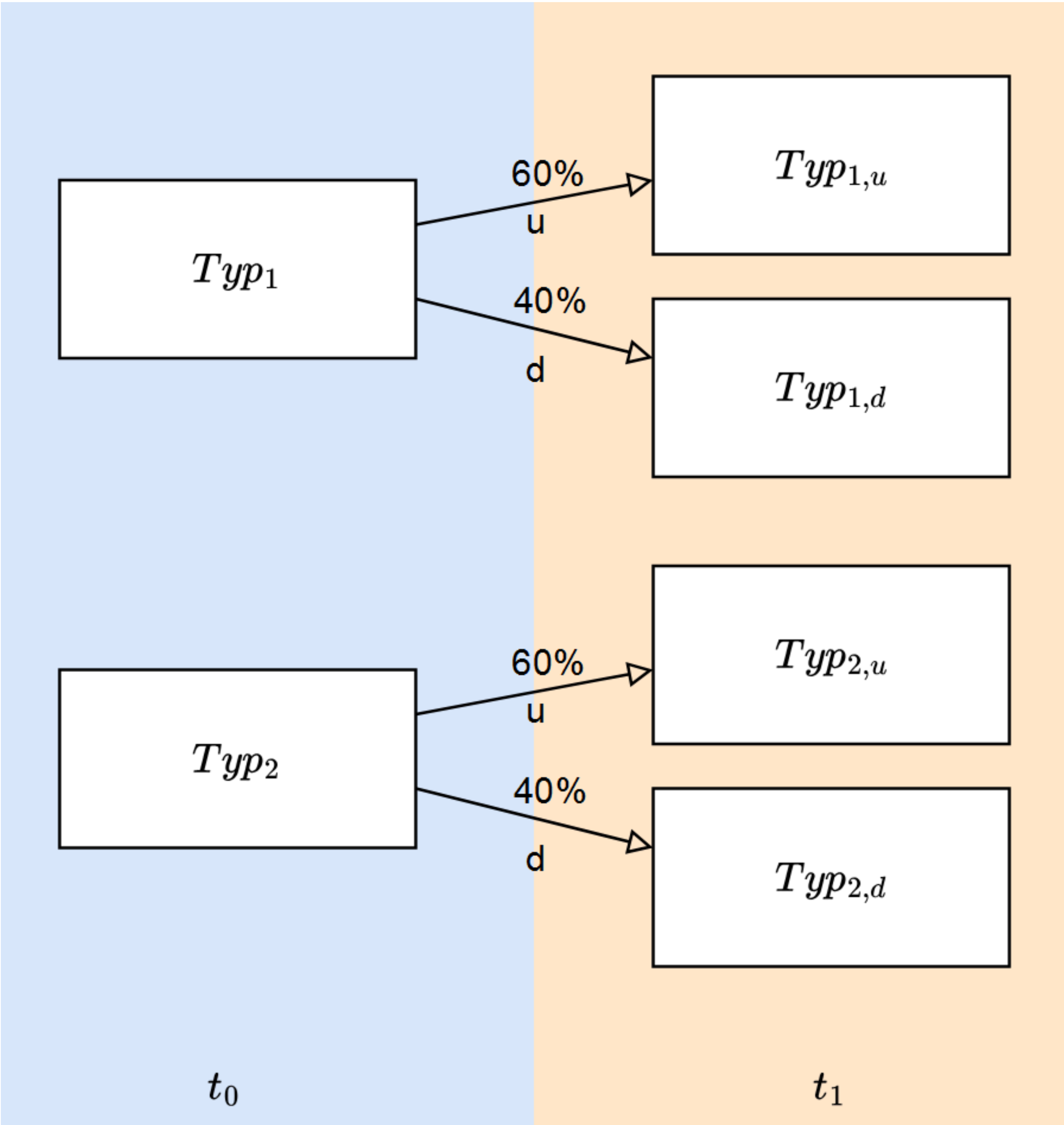
Bellman mit Wahrscheinlichkeiten u & d

- hier ist es ganz wichtig zu wissen wann etwas produziert/abgesetzt wird, da hier die Diskontierung im Fokus steht, siehe Graphik:



- zusätzlich wird hier in der Zukunft (t_1) zwischen zwei Zuständen unterschieden: u & d
- u steht hier für up, sprich den besseren Case
- d steht hier für down, den schlechteren Case

- zusätzlich stehen zwei verschiedene Optionen zur Auswahl (Typ1, Typ2)
- hier sind zwei Formalitäten zu beachten:
  1. wenn ich mich bei meinen Berechnungen in t_0 befinde, weiß ich nicht welcher von den beiden Zuständen in t_1 eintreten wird -> deshalb werden hierfür Wahrscheinlichkeiten jeweils für u & d in der Angabe angegeben, diese muss ich dann bei den Berechnungen mitberücksichtigen
  2. wenn ich mich in t_1 befinde, weiß ich welcher Zustand eingetreten ist, und kann mich dementsprechend für die bessere Wahl entscheiden
- graphisch könnte das Problem folgendermaßen abstrahiert werden (60% und 40% wurden willkürlich gewählt, diese Prozente stehen in der Angabe):



- leider gibt es hier kein wirkliches "Kochrezept", sondern man benötigt etwas Übung mit dieser Aufgabenstellung und sich immer die Frage stellen: "Berechne ich etwas aus der Zukunft und möchte ich den heutigen Wert wissen?" Falls du auf diese Frage mit ja antwortest musst du diskontieren (durch 1,1 dividieren)

Replikationsprinzip

- sehr ähnlich zu Bellman mit Wahrscheinlichkeiten, nur dass es hier um Optionen geht und du dir deine eigene Pseudowahrscheinlichkeit $\tilde{\pi}$ berechnen musst
- es gibt immer zwei Zeitpunkte t_0 & t_1
- zudem kommt eine Aktie mit 3 potenziellen Preisen:
  1. t_0 Preis der Aktie
  2. $t_{1,u}$ Preis der Aktie im besseren Case
  3. $t_{1,d}$ Preis der Aktie im schlechteren Case
- eine amerikanische Call Option ermöglicht dem Besitzer die Aktie zu einem fixen Preis zu erwerben, unabhängig von dem Wert der Aktie selbst
- ein Sparbuch als risikolose Veranlagung mit einem fixen Zinssatz
  => es gibt dann 3 Wertverläufe:

Das Replikationsprinzip (3)

- Wertverlauf der Aktie:

u = up
d = down

$$S_0 = 100, \qquad S_1 = \begin{cases} S_{1,u} = 120, & \ldots \text{Zustand } u, \\ S_{1,d} = \ \ 90, & \ldots \text{Zustand } d. \end{cases}$$

- Wertverlauf eines Euros auf dem Sparbuch

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = (1+r)1 = 1.05 \qquad \ldots \text{Zustände } u \text{ und } d.$$

- Wertverlauf der Option:

↳ ist Recht, aber keine Verpflichtung

$$C_0 = ?, \qquad C_1 = \begin{cases} C_{1,u} = \max\{0,\ 120-95\} = 25, & \ldots \text{Zustand } u, \\ C_{1,d} = \max\{0,\ \ 90-95\} = 0, & \ldots \text{Zustand } d. \end{cases}$$

↓ wir wissen nicht, was die Option heute wert ist

- S_i ist in der Angabe gegeben
- $C_i = S_i - \text{Ausübungspreis}$ -> Call-Option (Kauf der Option)
- $P_i = \text{Ausübungspreis} - S_i$ -> Put-Option (Verkauf der Option)
- zusätzlich gib es eine Pseudowahrscheinlichkeit $\tilde{\pi}$, die u & d verschiedene Gewichte gibt, um eine risikoneutrale Bewertung zu gewähren

$$\tilde{\pi} = \frac{(1+r) * S_0 - S_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}$$

Call und Put Option mit Pseudowahrscheinlichkeit

$$C_0 = \frac{1}{1+r} * (\tilde{\pi} * C_{1,u} + (1-\tilde{\pi}) * C_{1,d})$$

$$P_0 = \frac{1}{1+r} * (\tilde{\pi} * P_{1,u} + (1-\tilde{\pi}) * P_{1,d})$$

5.2 Spezialfälle / Ausnahmen

Beispiel Diskontierung

- Angenommen, du hast heute 100 € und der Diskontierungssatz r beträgt 10% pro Jahr.

4. Heutiger Wert (t_0)
   Dein Startkapital beträgt 100 €
5. Wert in einem Jahr (t_1):
   Wenn du das Geld anlegst und keinen Zins bekommst, bleibt es 100 €.
   Falls du jedoch zukünftige Zahlungen diskontieren möchtest, dann gilt:

$$\text{Barwert} = \frac{\text{Zukunftswert}}{(1+r)^t}$$

   mit $r = 10\% = 0.1$ und $t = 1$

$$\text{Barwert} = \frac{100}{1.1} = 90.91$$

   Das bedeutet, 100 € in einem Jahr sind heute nur etwa 90,91 € wert.
6. Wert in zwei Jahren (t_2):

$$\text{Barwert} = \frac{100}{(1.1)^2} = 82.64$$

   Also wäre eine Zahlung von 100 € in zwei Jahren heute nur 82,64 € wert.
   dasselbe funktioniert auch in die andere Richtung mit $*$ statt $\div$

5.3 Theorie-Zusammenfassung

Bellman-Prinzip:

- Entscheidungen beeinflussen zeitlich spätere Entscheidungen und den Zustand des Systems

Definitionen :

S . . . Zustandsraum des Problems mit Elementen s
A . . . Aktionsraum des Problems mit Elementen a
T . . . Zeithorizont des Problems
r_t : S x $A \rightarrow \mathbb{R}$ . . . Belohnungsfunktion, gibt Nutzen einer Aktion a_t im Zustand s_t zum Zeitpunkt t an
f_t : S x $A \rightarrow S$ . . . Zustands-Übergangsfunktion zum Zeitpunkt t ($s_t \rightarrow s_{t+1}$)
ϕ_t : . . . erlaubten Aktionen zum Zeitpunkt t

Dynamisches Programm:

$$max_{a_t} \sum_{t=1}^{T} r_t(s_t, a_t)$$

unter folgenden Nebenbedingungen

$$s_1 = \bar{s} \in S$$
$$s_t = f_{t-1}(s_{t-1}, a_{t-1}), t = 2, \ldots, T$$
$$a_t \in \phi_t(s_t), t = 1, \ldots, T$$

in Worten:
7. wir starten in einem validen Zustand
8. jeder Zustand in Zukunft basiert auf einen davor passierten Zustand
9. die Aktion muss erlaubt sein

Zusammenfassung bis jetzt (einfach):

- wir haben:
  - Zustände s und Aktionen a
  - Zeitobergrenze T
  - Belohnungsfunktion r_t
  - Zustands-Übergangsfunktion f_t
  - die möglichen Optionen ϕ_t zu einem t
  die dynamische Optimierung versucht dabei den Gesamtnutzen (der durch r_t gegeben ist) über den Zeitraum T zu maximieren, dabei iteriert man mit den verschiedenen erlaubten Aktionen a über alle möglichen Zustände s $\rightarrow$ dabei entsteht ein großer Binärbaum

Strategie

- Eine Strategie σ ist ein Plan, der für jeden Zeitpunkt t festlegt, welche Aktion a_t ausgeführt werden soll, unter der Berücksichtigung von allem was bis zum Zeitpunkt t passiert ist
  $\rightarrow$ σ definiert a_t in Abhängigkeit von t-Historie η_t = {s_1, a_1, . . ., s_{t-1}, a_{t-1}, s_t}
  " von s_1 bis s_{t-1} mit den jeweiligen a_1 bis a_{t-1} wird das nächste a_t bestimmt "

Wertefunktion

- Eine Wertefunktion $V(s_1, \sigma)$ bewertet den Gesamtnutzen einer Strategie σ

$$V(s_1, \sigma) = \sum_{t=1}^{T} r_t(s_t, a_t = \sigma(\eta_t))$$

  dabei ist die optimale Strategie σ^* die **Lösung** des dynamischen Optimierungsproblems

$$V(s_1) = V(s_1, \sigma^*) = max_{a_t} \sum_{t=1}^{T} r_t(s_t, a_t)$$

Markov-Strategie

- Sonderfall der Strategie, wobei der Entscheidungen nur mehr vom aktuellen Zustand s_t und Zeitpunkt t abhängen, nicht mehr von der ganzen Historie
- kann als Sequenz von Funktionen $g_1, \ldots, g_T$ dargestellt werden
- es werden in der VO nur Markov-Probleme behandelt

Folgeproblem

- Ein Folgeproblem betrachtet die Optimierung ab einem beliebigen Zeitpunkt t bis zum Horizont T, damit wird ein Teilproblem gelöst
- hier ist der Start bei s_t, nicht bei s_1
- hier τ als alle späteren Zeitpunkte nach t definiert,
  Bsp: t = 3 τ = 3, 4, 5, ... , T

$$V_t(s_t) = \sum_{\tau=t}^{T} r_\tau(s_\tau, a_\tau)$$

- Die Wertefunktion $V_t(s_t)$ gibt den maximalen Wert des Zeit-t-Folgeproblems an, der ab einem Zustand s_t durch Einsatz der optimalen Strategie erzielt werden kann
- Betrachte ein Markov Problem und die Wertefunktion $V_t(s_t)$ des Zeit-t-Folgeproblems, dann gilt:

$$V_t(s) = \max_{a \in \phi(s)} \{r_t(s, a) + V_{t+1}(f_t(s, a))\}$$

- die Wertefunktion ist die Maximierung der Summe aus der sofortigen Belohnung r_t und dem Wert des Zeit-$t+1$- Folgeproblems, der sich aus der Aktion $a_t + 1$ ergibt
- haben wir eine Lösung für $V_T(s_t)$, also dem Endziel, können wir mittels Bellmann-Prinzip zurück bis zu t = 1 zurück arbeiten "Rückwärtsinduktion"
- funktioniert analog für Minimierungsprobleme