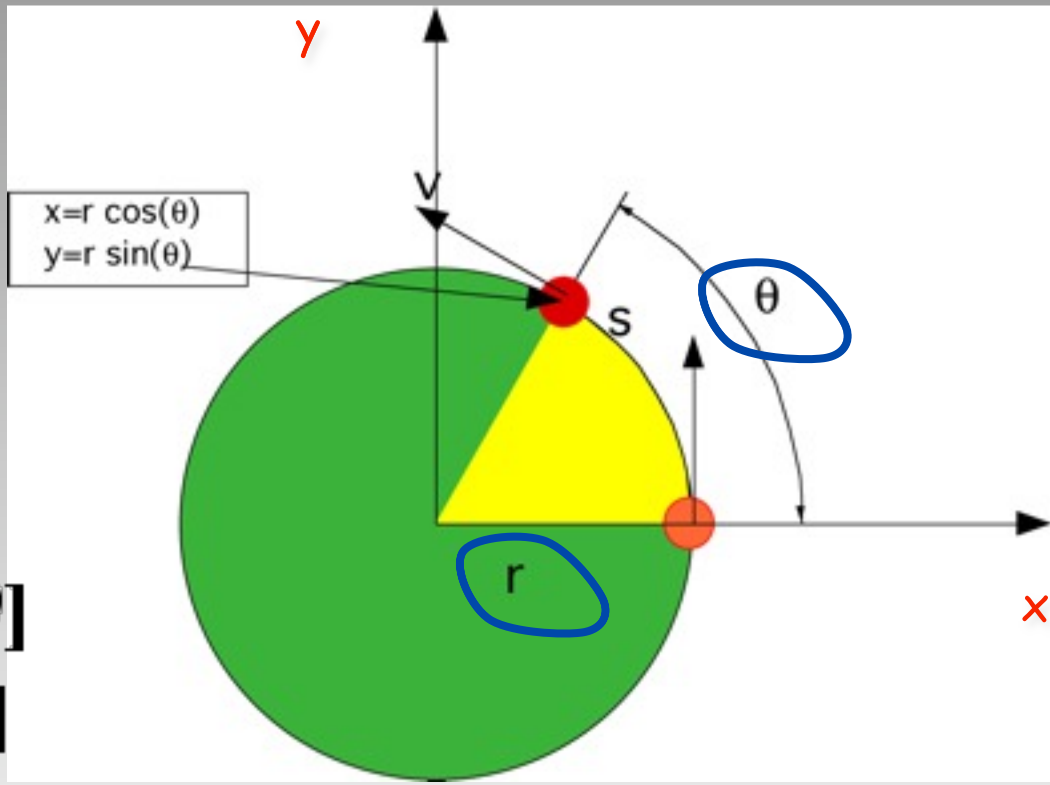
Rotationsbewegung

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}(x, y)$$



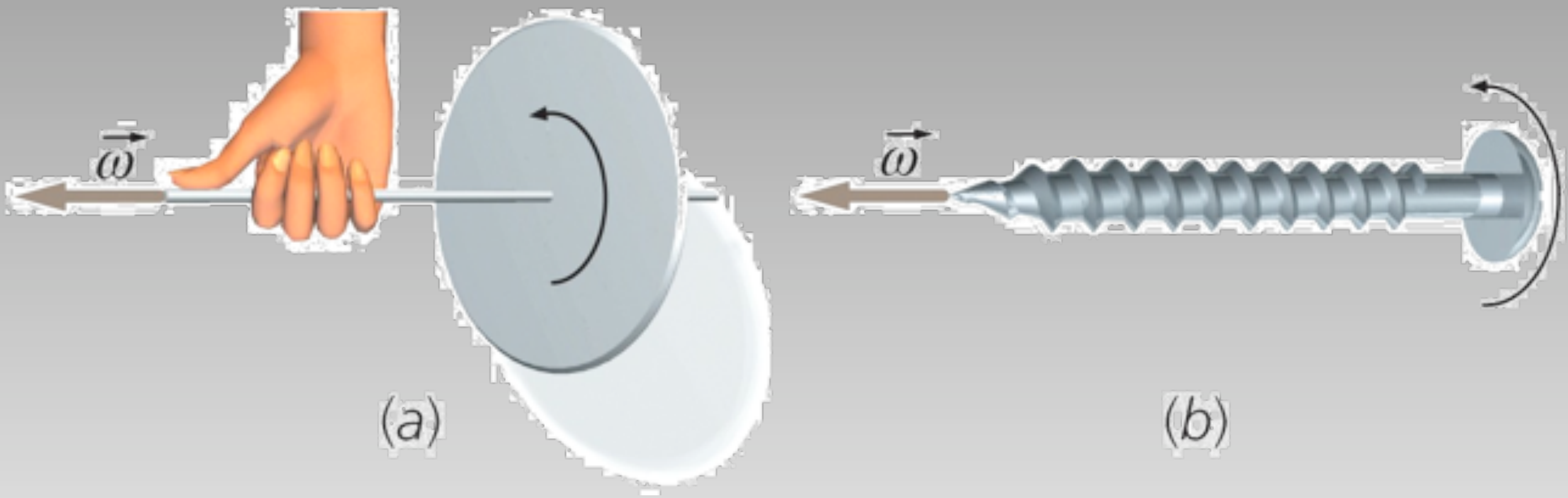
$$x = r\,\mathrm{Cos}[\theta]$$
$$y = r\,\mathrm{Sin}[\theta]$$

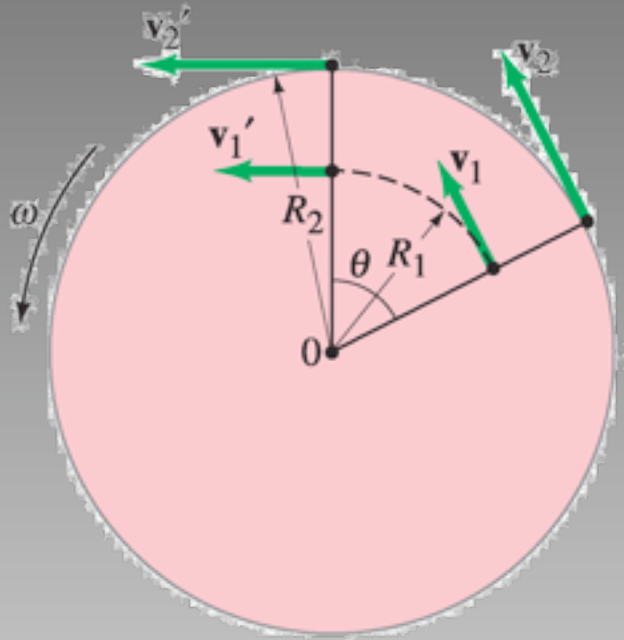
$$Zylinderkoordinaten - KartesischeKoordinaten$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$ds = r \ d\theta$$


$\vec{\omega}$
$\vec{\omega}$
(a)
(b)

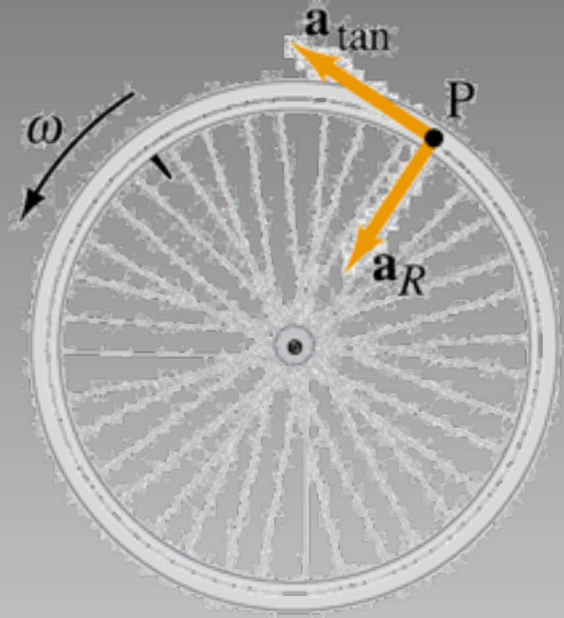


Ein Rad dreht sich gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn.

Zwei Punkte auf dem Rad im Abstand R_1 bzw. R_2 vom Mittelpunkt haben unterschiedliche lineare Geschwindigkeiten, weil sie in demselben Zeitintervall unterschiedliche Wege zurücklegen.

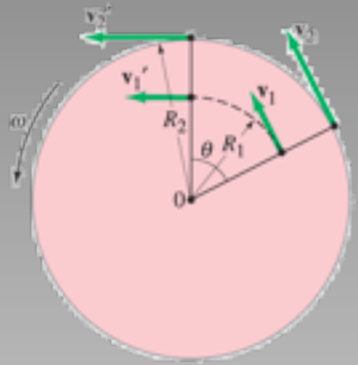
Da $R_2 > R_1$ ist $v_2 > v_1 (v = R\omega)$.

Aber die beiden Punkte haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω, weil sie in demselben Zeitintervall denselbenWinkel q durchlaufen.



Auf einem rotierenden Rad, dessen Winkelgeschwindigkeit zunimmt, hat ein Punkt P sowohl eine tangentiale, als auch eine radiale (zentripetale) Beschleunigungskomponente

Zentripetalbeschleunigung

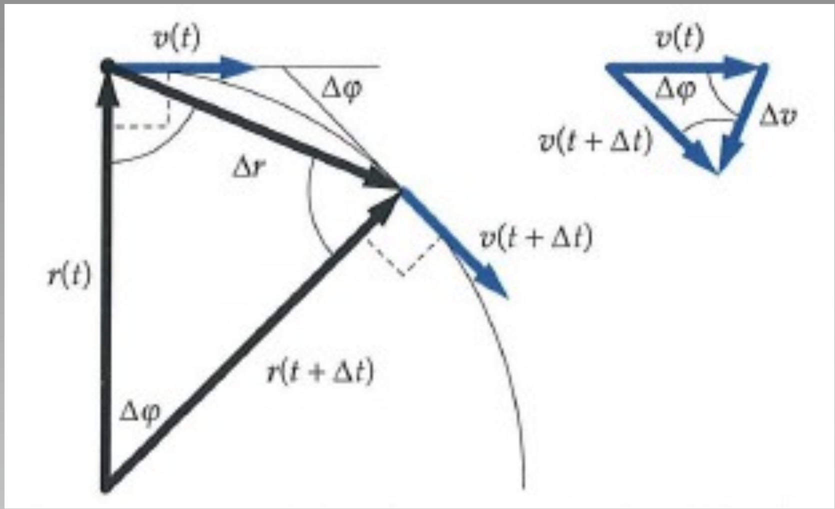


$$\upsilon_{t,i} = \frac{r_i d\theta}{dt}$$

$$a_{t,i} = \frac{d\upsilon_{t,i}}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

Dies ist jedoch unvollständig, wenn man die eigentliche (und nicht nur die tangentiale Komponente) Beschleunigung betrachtet:

Zentripetalbeschleunigung



$$\upsilon_{t,i} = \frac{r_i d\theta}{dt}$$

$$a_i = \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \vec{r}_i \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$a_i = \omega \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\upsilon_{t,i}}{r_i} \cdot \upsilon_{t,i} = \frac{\upsilon_{t,i}^2}{r_i} = r_i \omega^2$$

$$a_z = -r \cdot \omega^2 = -r\frac{v^2}{r^2} = -\frac{v^2}{r}$$

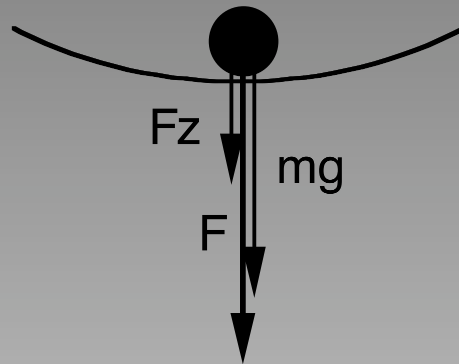
Eigentlich korrekt:

$$a_z = -\left|r \cdot \omega^2\right| \frac{\vec{r}}{r}$$

Beispiel

- Ein PKW fährt auf einem kurvenfreien Streckenabschnitt mit der Geschwindigkeit v0 durch eine Talsenke (Krümmungsradius r1) und danach über eine Bergkuppe (Krümmungsradius r2). Der Fahrer hat die Masse m.
- Wie groß ist das Gewicht (G) des Fahrers?
- Wie groß sind Zentrifugalkraft (FZ1) und Gesamtkraft (F1) für den Fahrer in der Talsenke?
- Wie groß sind Zentrifugalkraft (FZ2) und Gesamtkraft (F2) für den Fahrer auf der Bergkuppe?
- Bei welcher Geschwindigkeit v1 verliert der PKW auf der Bergkuppe die Bodenhaftung?
- Rechnen Sie zunächst allgemein und berechnen Sie dann die numerischen Werte für
- r1 = 135 m; m = 80 kg; r2 = 68 m; v0 = 72 km/h

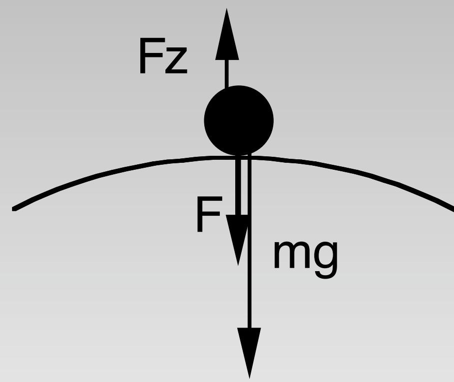
$$G = mg = 0.78\,kN$$



$$F_{Z1} = ma_{Z1} = m\frac{v_0^2}{r_1} = 0.24\,kN$$

$$F_1 = G + F_{Z1} = 1.02\,kN$$

$$F_{Z2} = ma_{Z2} = m\frac{v_0^2}{r_2} = 0.47\,kN$$



$$F_2 = G - F_{Z2} = 0.31\,kN$$

$$F_3 = G - F_{Z3} = 0 = mg - m\frac{v_1^2}{r_2}$$

$$v_1 = \sqrt{gr_2} = 93\,km / h$$

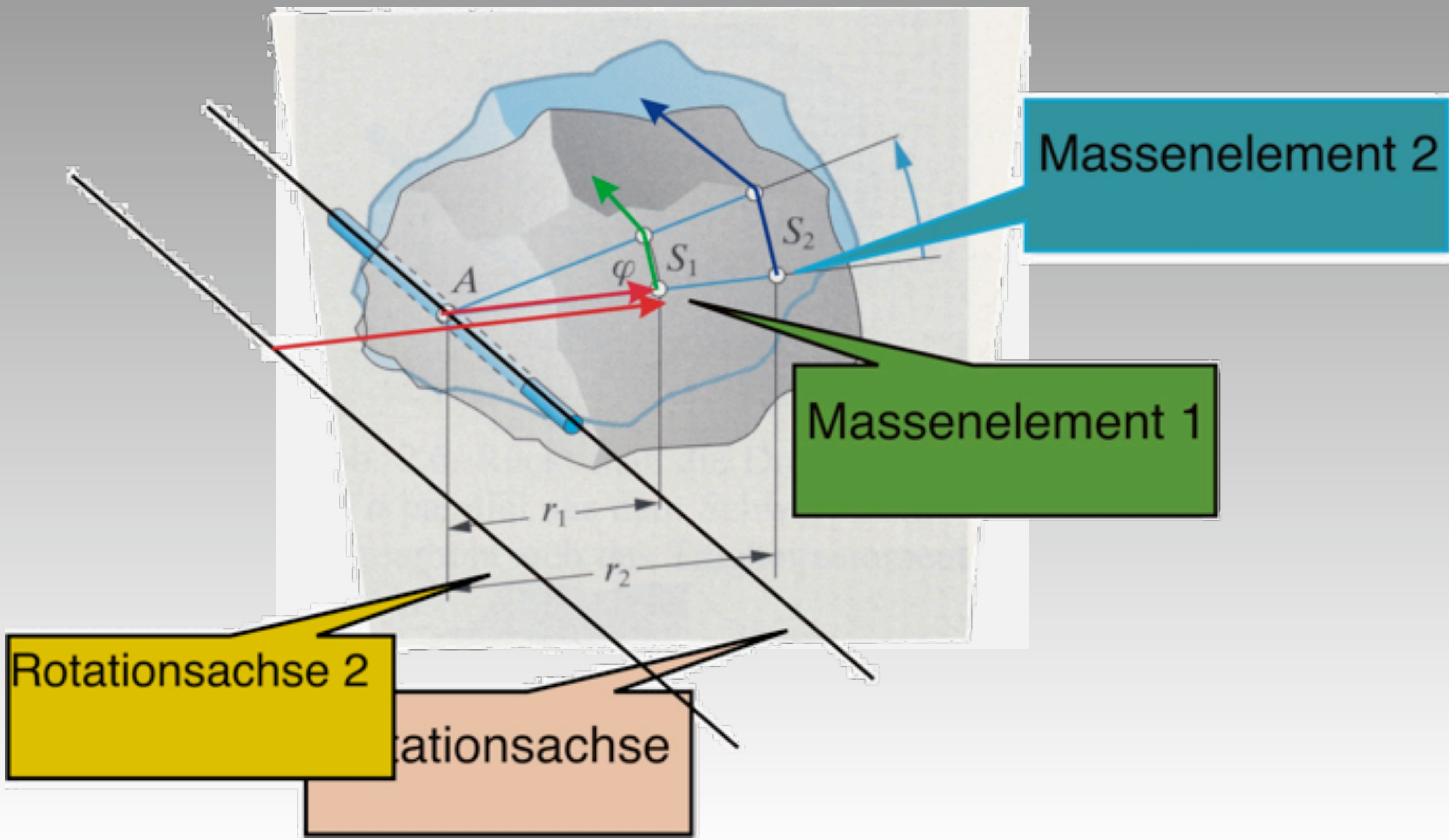
Wahre -, Scheinkräfte

Die Zentripetalkraft ist eine **wahre Kraft**, die gemäß der Bewegungsgleichung bewirkt, dass sich der Körper auf einer Kreisbahn bewegt.

Hinweis: Wie kann ich die Kraft auf Körper wirken lassen?

Die sogenannte Zentrifugalkraft ist eine **Scheinkraft**, , die wir dann einführen müssen (bzw. beobachten können), wenn man in einem rotierenden Bezugssystem sitzt.

Drehimpuls etc.



Rotationsenergie

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$E_{kin} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_i \left(m_i r_i^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \cdot \omega^2}_{\text{Trägheitsmoment} I} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

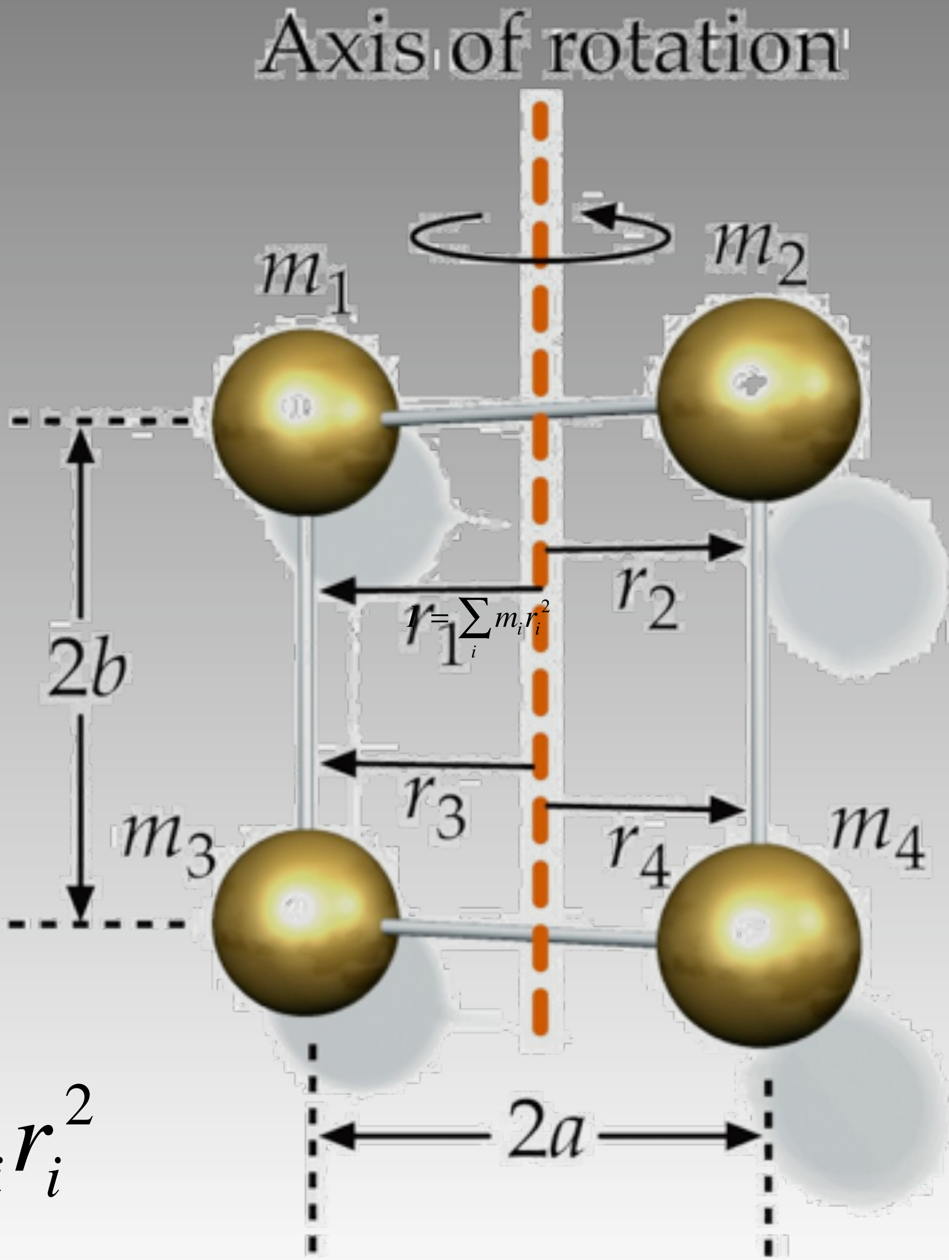
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I = \int r^2 dm$$

- Wir werden versuchen, die Analogie zwischen linearen und Winkelgrößen beizubehalten
- indem wir die Arbeit, welche wir bei geringer Verdrehung gegen die auf ein Objekt wirkenden Kräfte leisten, mit dem Drehmoment mal dem Winkel gleichsetzen, um den es sich bewegt hat.
- Mit anderen Worten, die Definition des **Drehmomentes** wird so gewählt, **daß der Satz über die Arbeit ein klares Analogon besitzt**

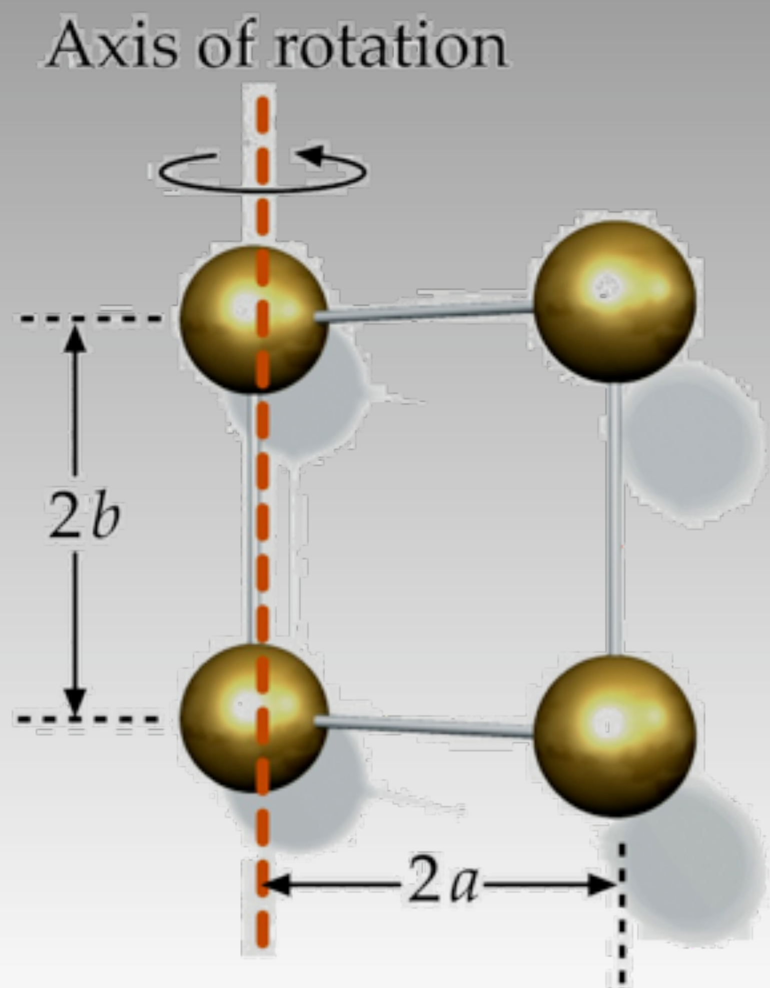
Kraft mal Weg ist Arbeit

Drehmoment mal Winkel wird Arbeit

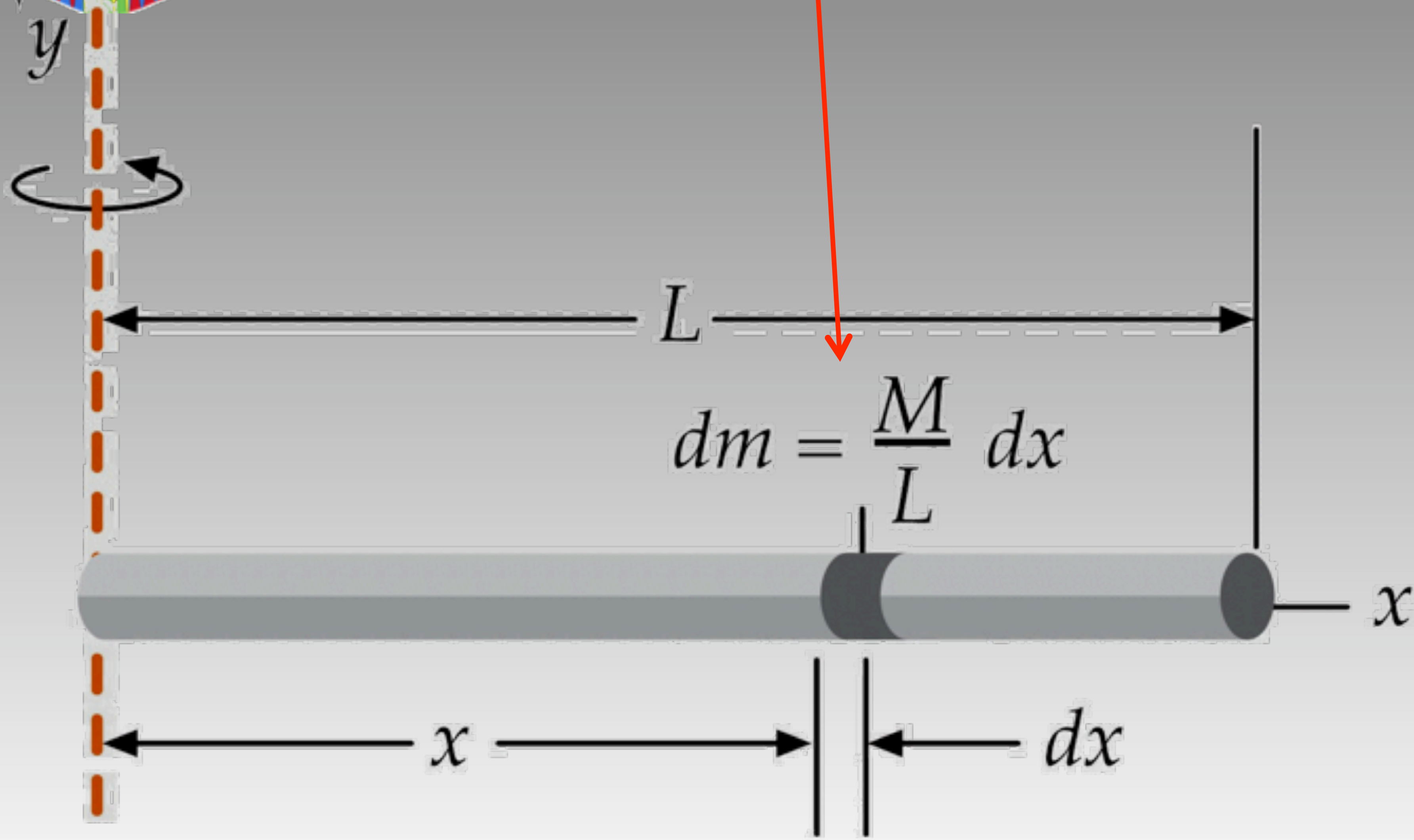


$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Trägheitsmoment



$$I = \sum_i m_i r_i^2 \longrightarrow I = \int r^2 dm$$



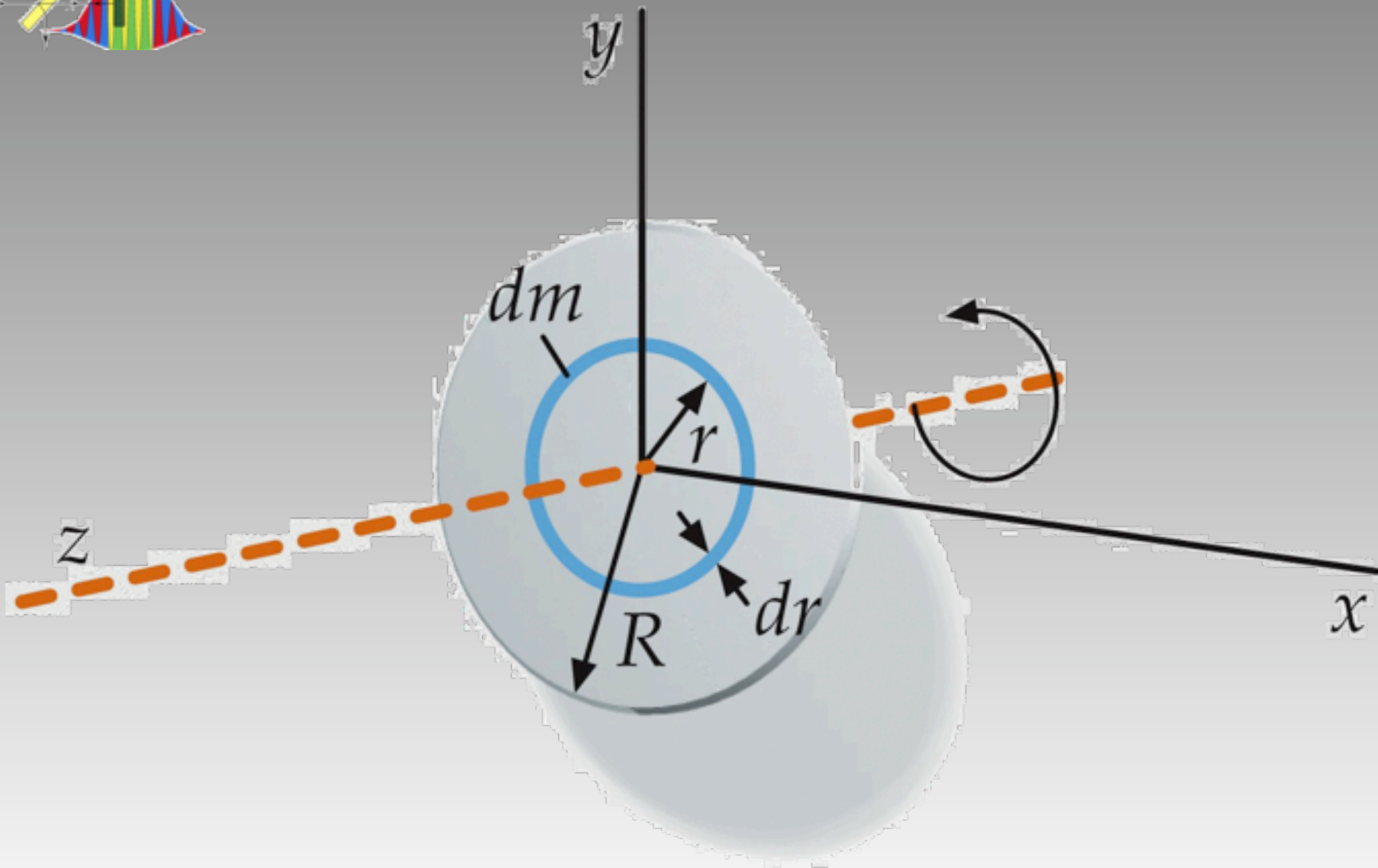
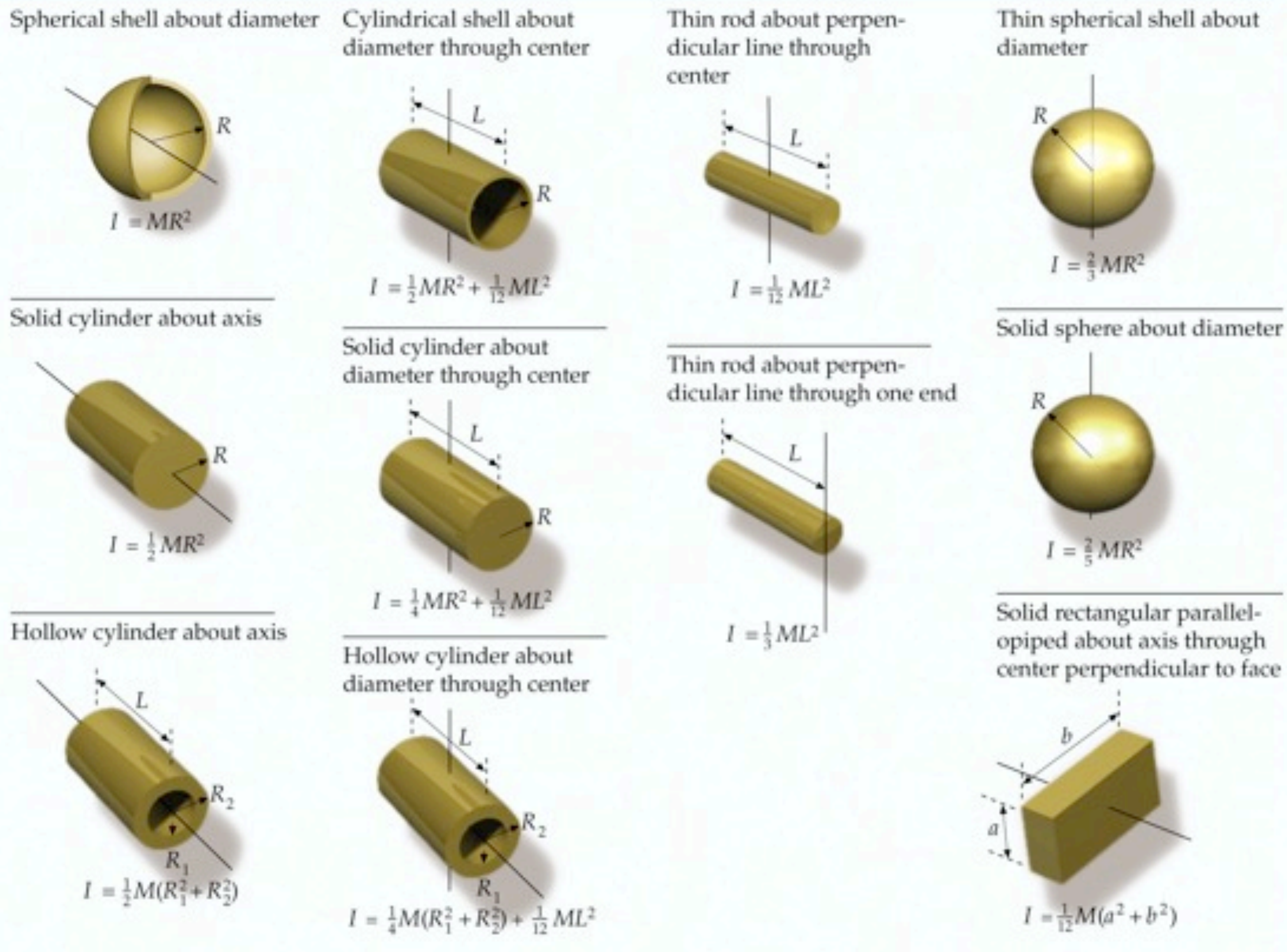
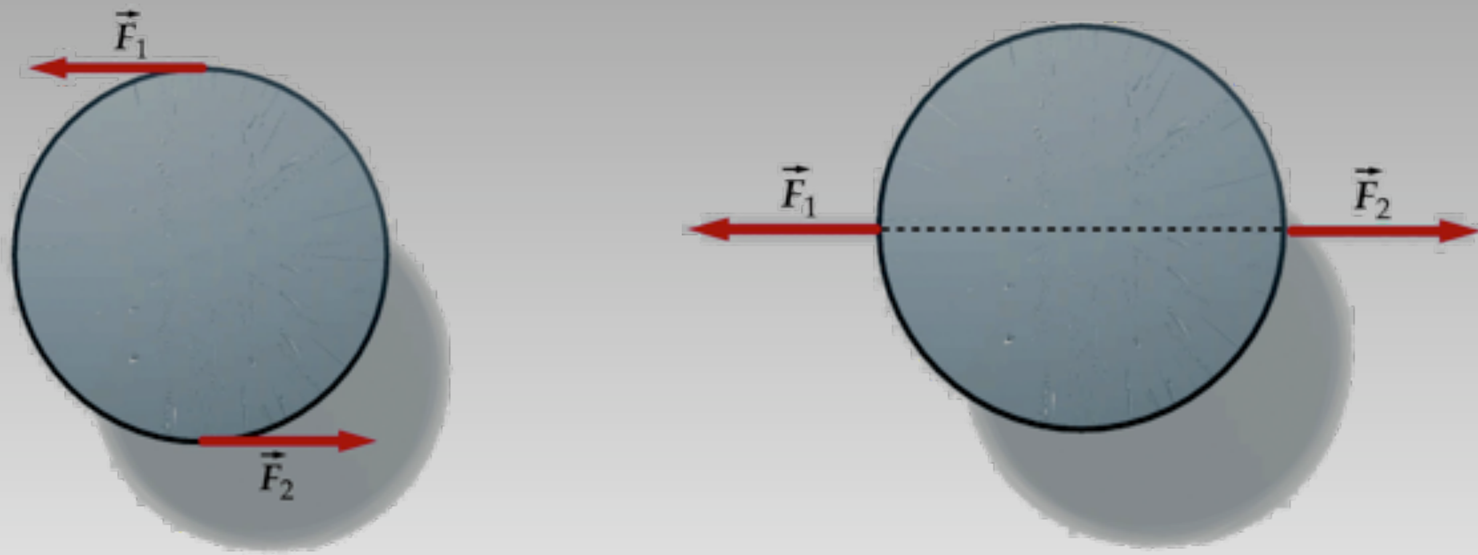

y
dm
r
z
dr
R
x

Table 9-1

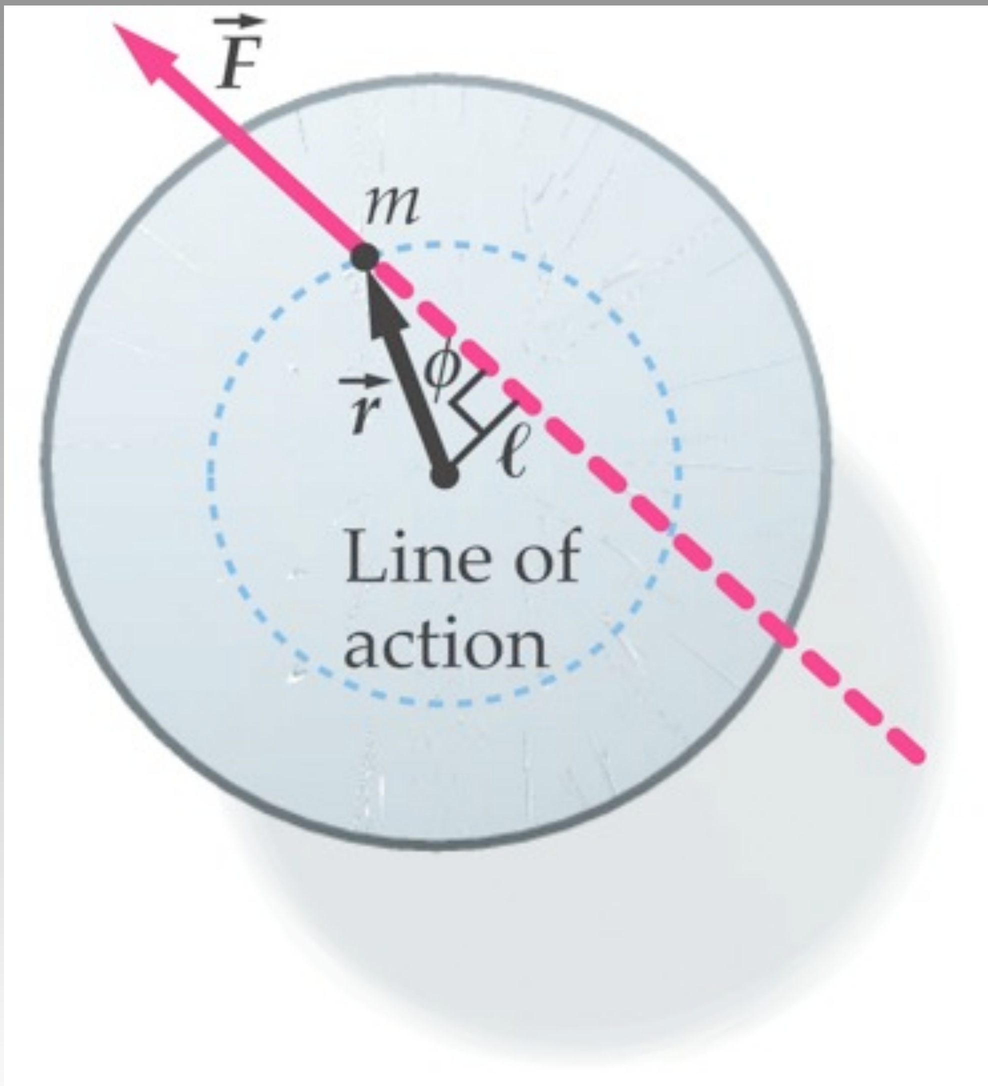
Moments of Inertia of Uniform Bodies of Various Shapes



A disk is a cylinder whose length L is negligible. By setting $L = 0$, the above formulas for cylinders hold for disks.


$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$

$$F_{\mathrm{t}} = m \cdot a_t \qquad rF_{\mathrm{t}} = m \cdot r \cdot r\alpha$$



$$M = F_{\mathrm{t}} r$$

$$_{\text{net ext}} = \sum M_{i,\text{ext}} = I\alpha$$

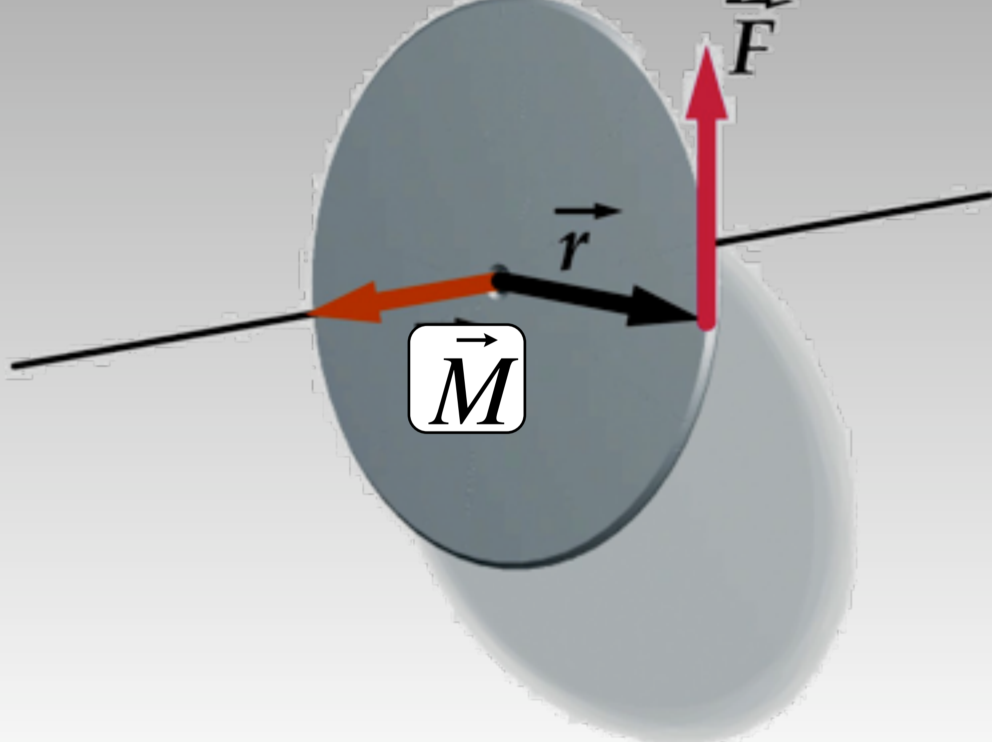
$$M = F_{\mathrm{t}} r = F \sin\phi \, r = F\ell$$

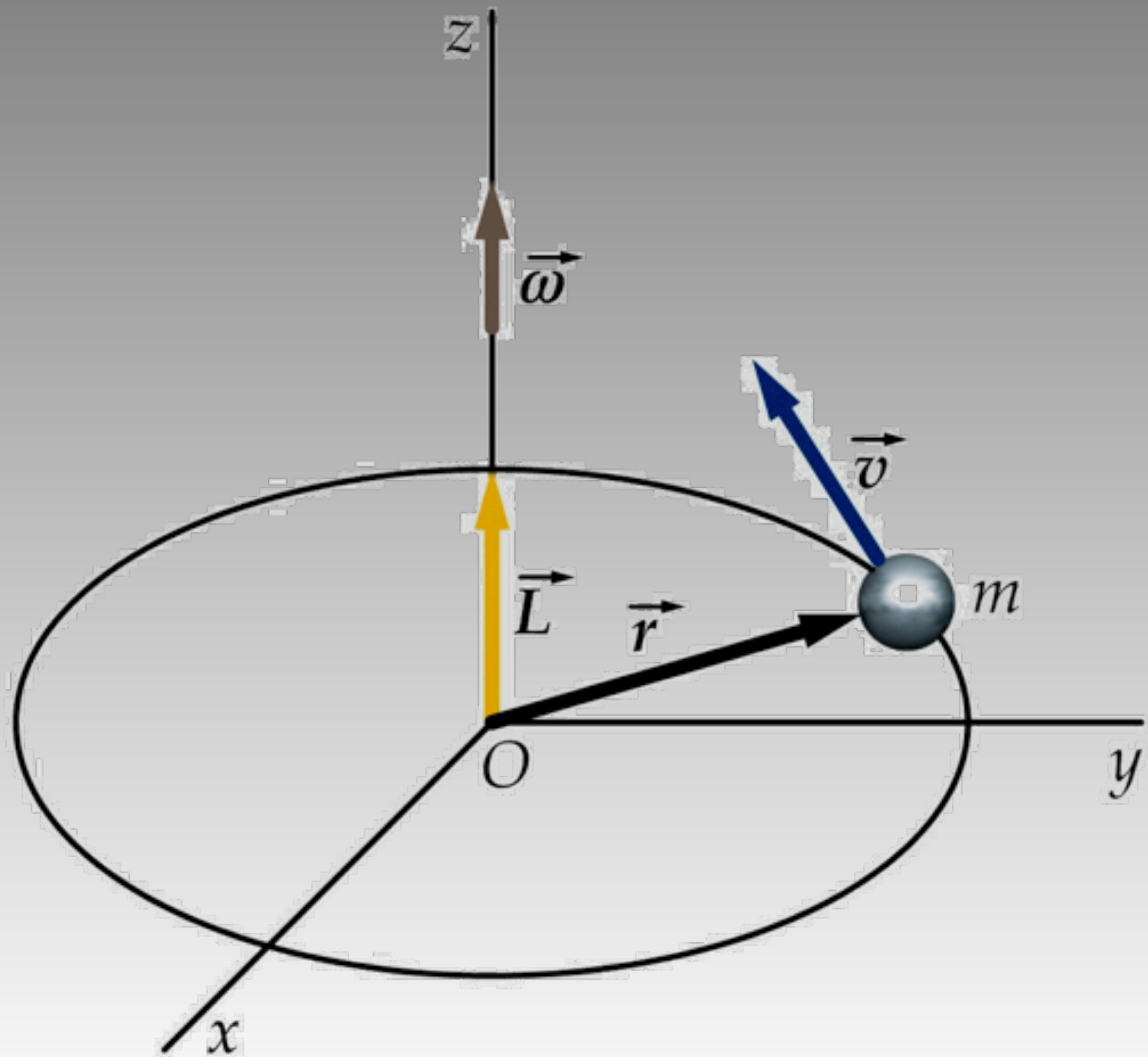
Drehmoment

$$d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r}$$

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$





z
$\vec{\omega}$
$\vec{v}$
$\vec{L}$
$\vec{r}$
m
O
y
x

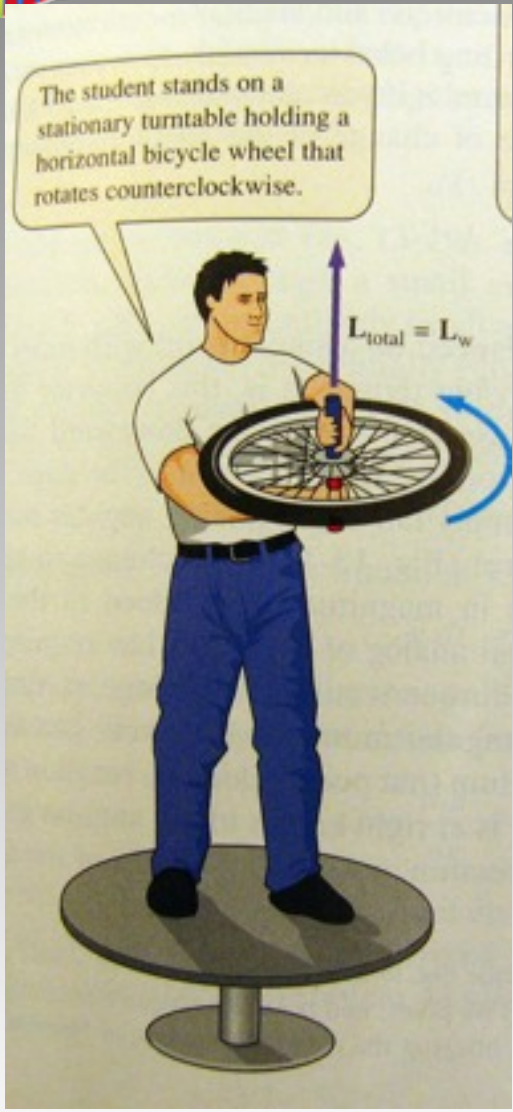
$$\vec{L} = \vec{r} \ \ x \ \ \vec{p} = p \cdot Hebelarm$$

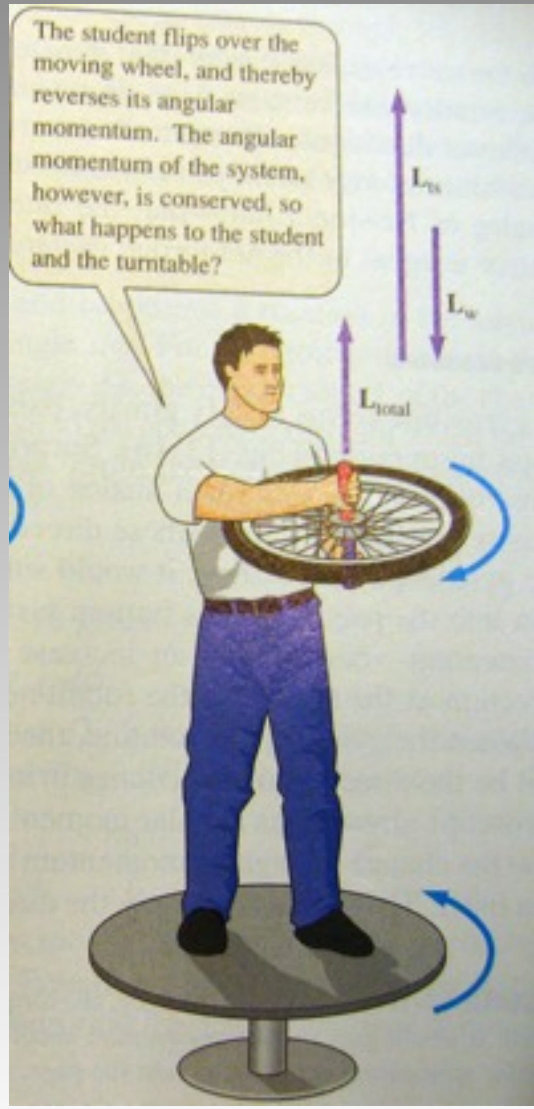
Wie das Drehmoment, so hängt auch der Drehimpuls von der Position der Achse ab, in Bezug auf welche er berechnet wird.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Wenn keine äußeren Drehmomente auf ein System von Teilchen einwirken, so bleibt der Drehimpuls konstant.

Konstanz des Drehimpulses, Versuch

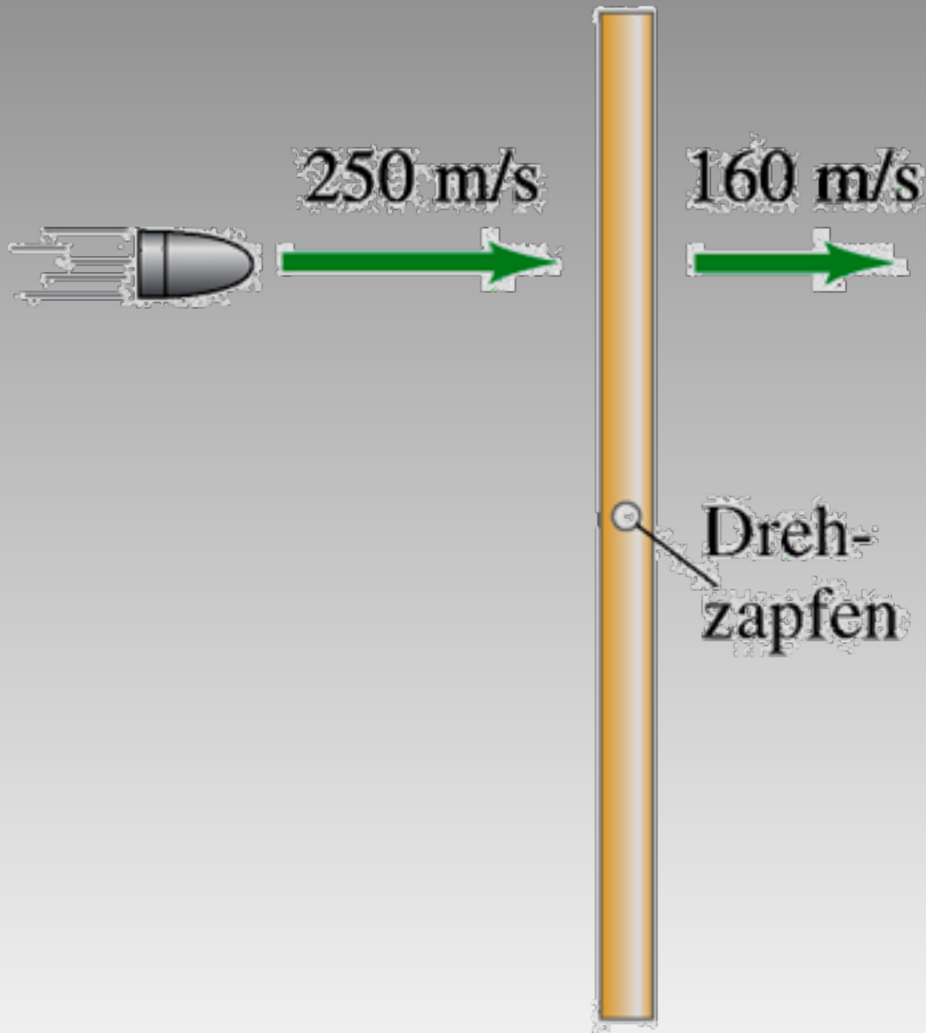




$$L = I\omega$$

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2{}_{\perp} dm}$$

Trägheitsmoment


250 m/s
160 m/s
Dreh-
zapfen

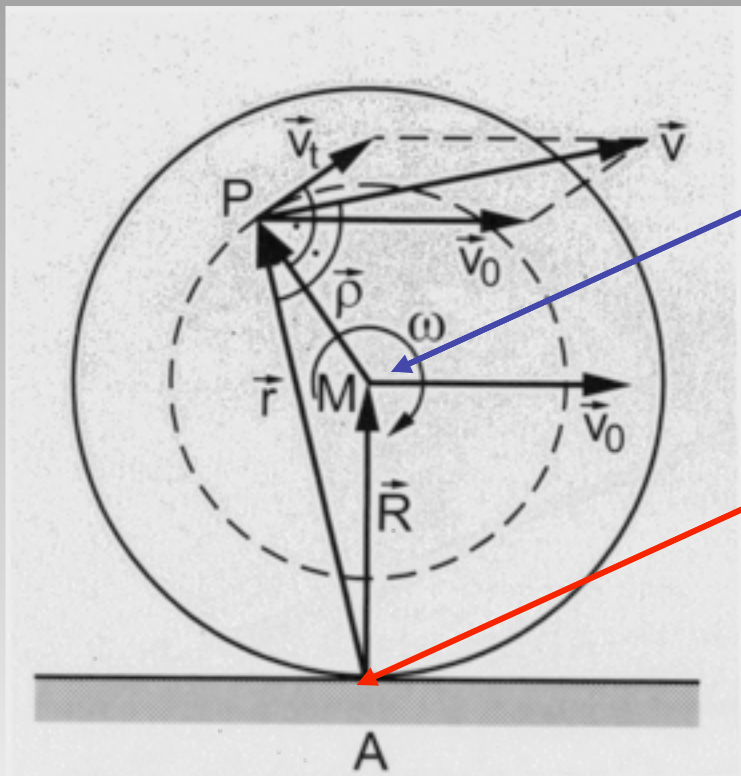
Rotationsenergie

- In weiterer Analogie zu Drehmoment, Drehimpuls und Trägheitsmoment:
  - Definition der Rotationenergie

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (r_i\omega)^2$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Beispiel: Rollende Kugel, Zylinder

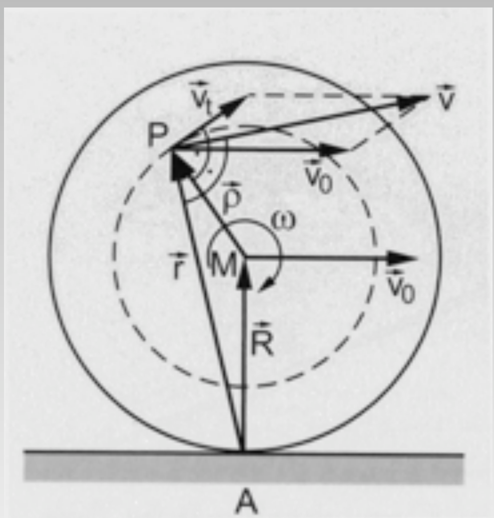


Rotation um Mittelpunkt

Momentane Drehachse

$$E = E_k + E_{rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_M\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R}{\boxed{t}}\right)^2 + \frac{1}{2}I_M\omega^2 \xrightarrow{\boxed{\omega = 2\pi\frac{1}{t}}}$$



$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R}{2\pi\frac{1}{\omega}}\right)^2 + \frac{1}{2}I_M\omega^2 = \frac{1}{2}m(R\omega)^2 + \frac{1}{2}I_M\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}I_A\omega^2$$

Steinerscher Satz!

Steinersche Satz:

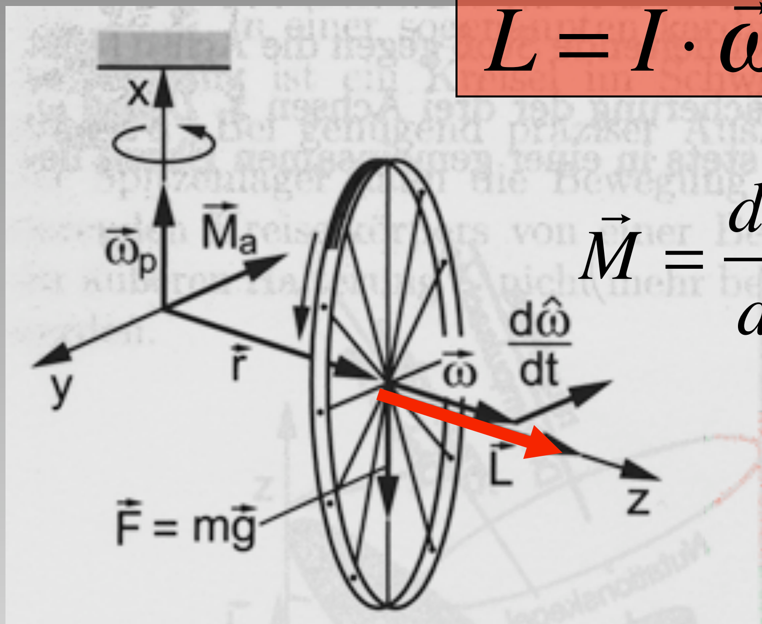
Kennt man das Trägheitsmoment I_S bezüglicher einer Achse durch den Schwerpunkt, kann man das Trägheitsmoment bezüglich einer dazu im Abstand a parallelen Achse erhalten:

$$\boxed{I_B = I_S + a^2 M}$$

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = I \cdot \omega \cdot \hat{\omega}$$

prinzipiell

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \boxed{\frac{dI}{dt}} \cdot \omega \cdot \hat{\omega} + I \cdot \boxed{\frac{d\omega}{dt}} \cdot \hat{\omega} + I \cdot \omega \cdot \boxed{\frac{d\hat{\omega}}{dt}}$$



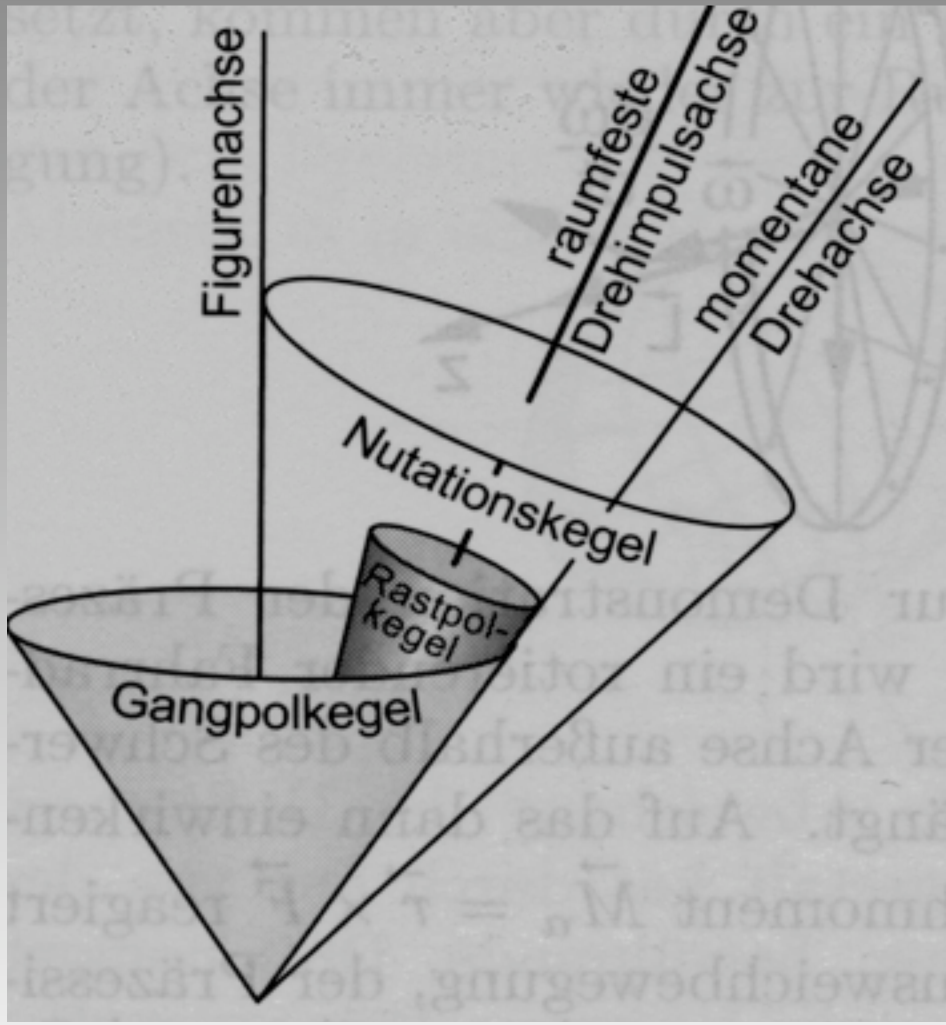
Die Richtung der Winkelgeschwindigkeit ändert sich!

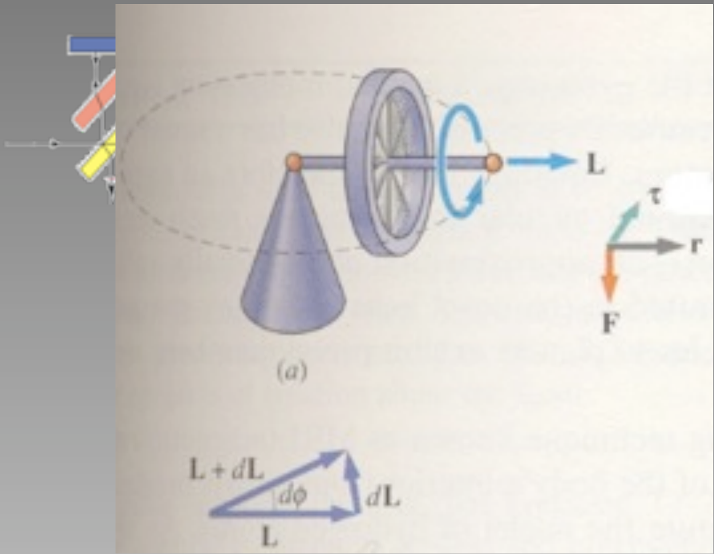
Hier nicht der Fall

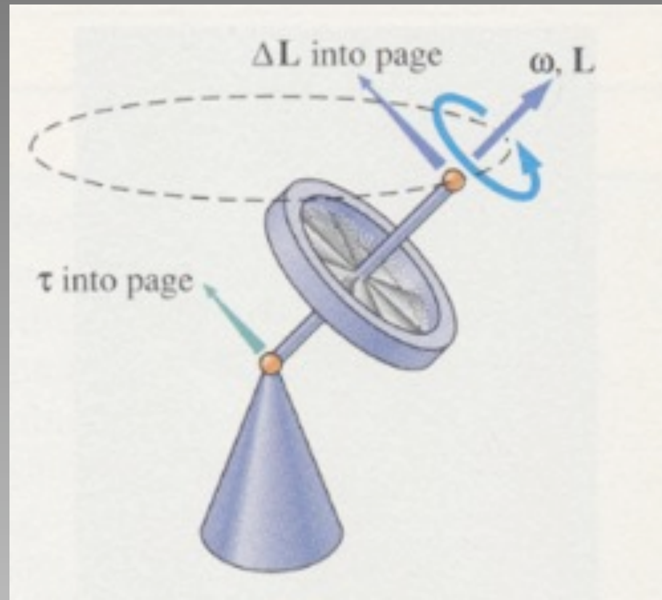
$$\vec{M}_a = I \cdot \omega \cdot \frac{d\hat{\omega}}{dt}$$

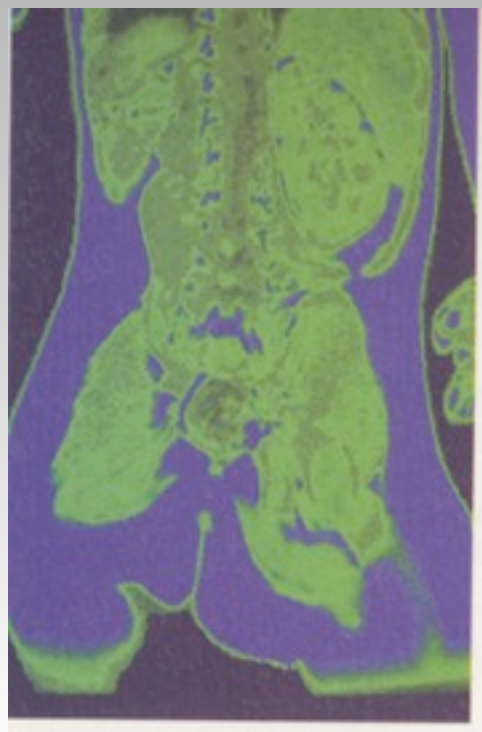
Präzession(sfrequenz)

$$\omega_P = \frac{|d\hat{\omega}|}{dt} = \frac{M_a}{L} = \frac{M_a}{I\omega}$$


Figurenachse
raumfeste
Drehimpulsachse
momentane
Drehachse
Nutationskegel
Rastpol-
kegel
Gangpolkegel







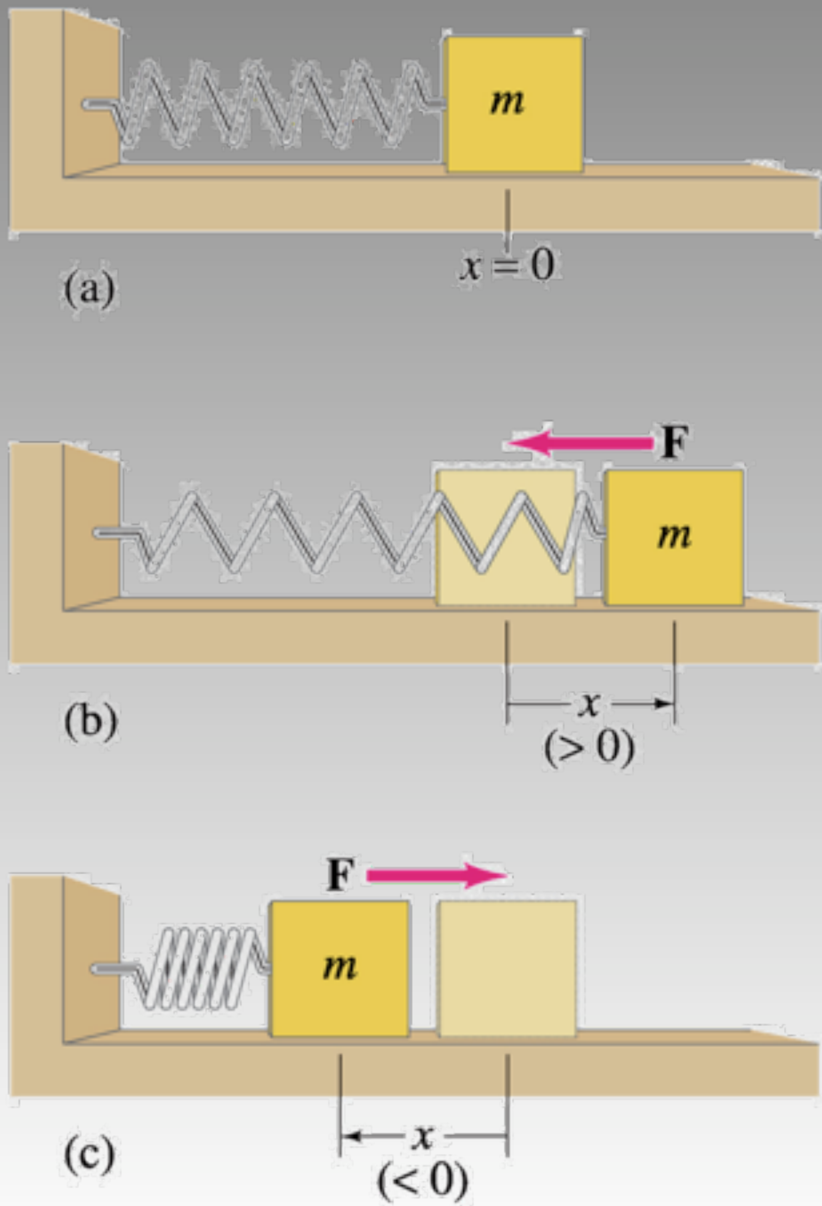
Magnetic
Resonance
Imaging
MR

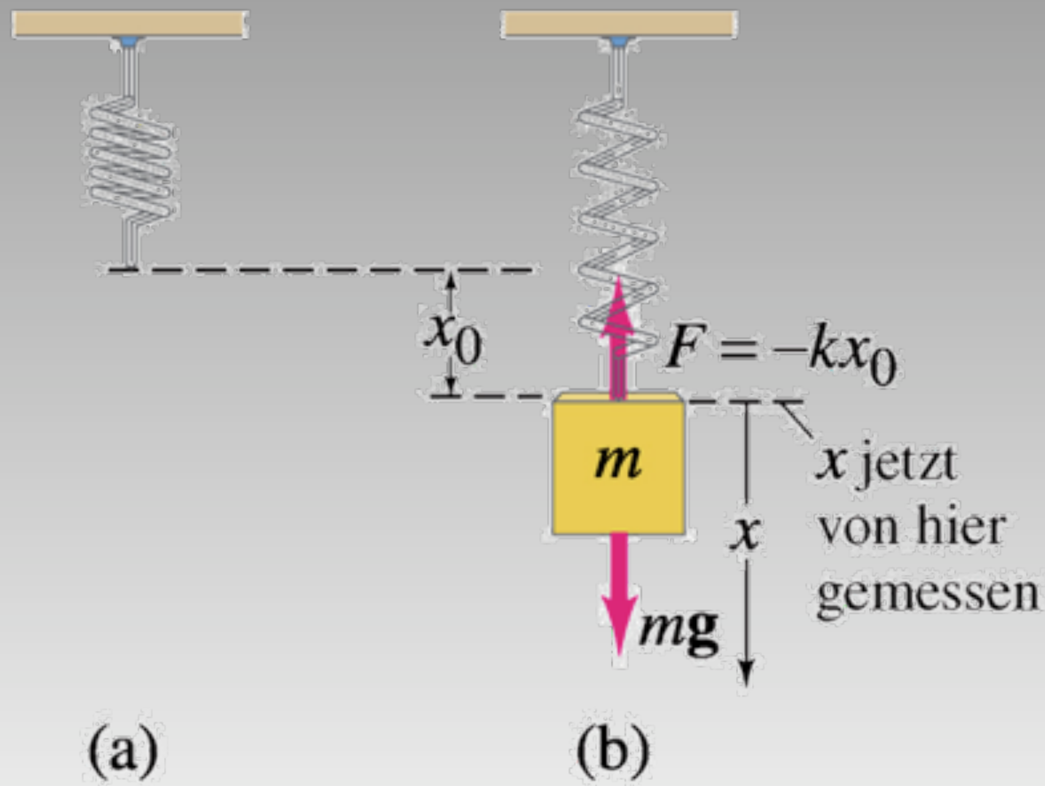
- Betrachten wir eine der wichtigsten Formen der Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = F \; = \text{"Rücktreibende Kraft"}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

Beispiele in der Natur, freie Schwingungen




x_0
$F = -kx_0$
m
x jetzt
von hier
gemessen
x
$m\mathbf{g}$
(a)
(b)

Beispiele in der Natur, freie Schwingungen

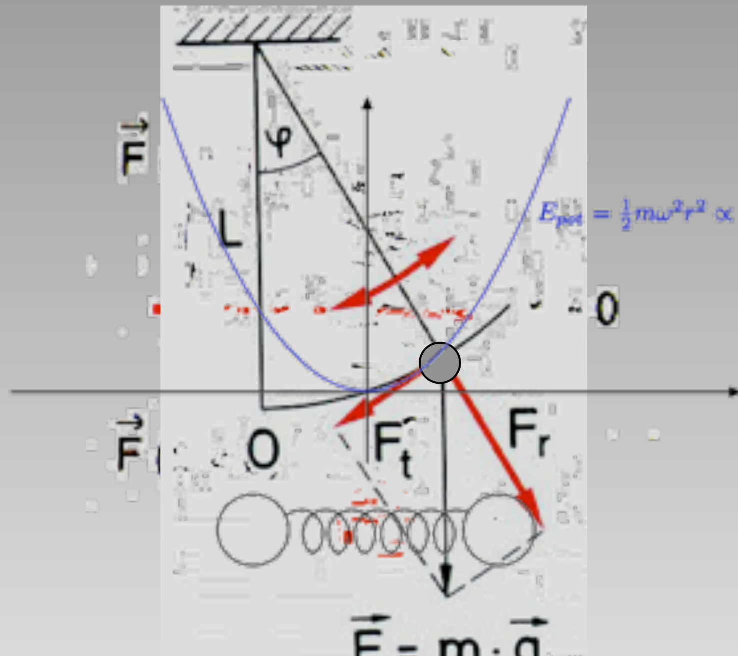
- Feder

$$F(x) = -kx$$

- Bindungskräfte

- Schwerkraft

- Dipole, elektrischer Schwingkreis etc.



Zur Erinnerung:

Einer Kraft -kx entspicht ein Potential der Form -kx²

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \boxed{x(t)} = \boxed{0}$$

Diese Kraft ist systeminherent

Diese Kraft wird von außen angewendet

Homogene Diffgleichung; freie Schwingung

Inhomogene Diffgleichung; erzwungene Schwingung

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \quad + x(t) = 0$$

Diese Kraft ist systeminherent

Dämpfungskraft

Diese Kraft wird von außen angewendet

Die Gleichung beschreibt eine ungedämpfte Schwingung

Die Gleichung beschreibt eine gedämpfte Schwingung

Die Energie pendelt zwischen:

Energie geht verloren

Kinetischer und potentieller Energie

Strom - Spannung etc.

Schritt 1: Lösen der homogenen Gleichung ohne Dämpfung

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k \cdot x(t) = 0$$

Ansatz:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$x'(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$x''(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$$\rightarrow$$

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

D.h. der Ansatz erfüllt die Schwingungsgleichung

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k \cdot x(t) = 0$$

$$-(A\omega^2 \cos\omega t + B\omega^2 \sin\omega t) + \frac{k}{m}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) = 0$$

$$\omega^2 (A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \frac{k}{m}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Kreisfrequenz}}$$

Bestimmung von A und B aus Anfangsbedingungen

$$x(t)\big|_{t\to 0} = A \underbrace{\cos\omega t}_{t\to 0} + B \underbrace{\sin\omega t}_{t\to 0} \to$$

$$x(0) = A + 0 \to$$

$$A = x(0)$$

$$x'(t)\big|_{t\to 0} = -A\omega \underbrace{\sin\omega t}_{t\to 0} + B\omega \underbrace{\cos\omega t}_{t\to 0} \to$$

$$x'(0) = -0 + \omega B \to$$

$$B = \frac{x'(0)}{\omega}$$

Lösung:

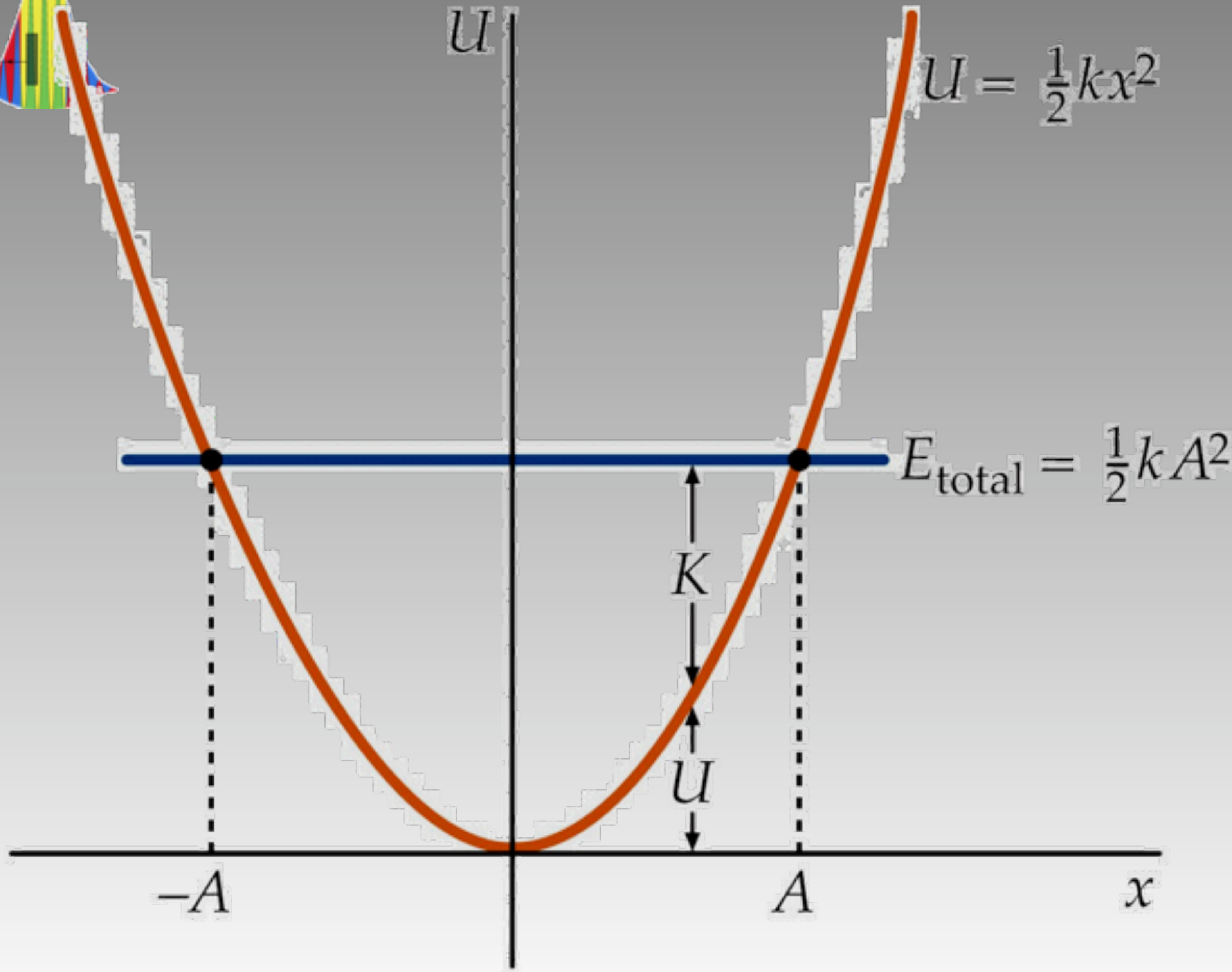
$$x(t) = \boxed{A}\cos\boxed{\sqrt{\frac{k}{m}}}\cdot t + \boxed{B}\sin\boxed{\sqrt{\frac{k}{m}}}\cdot t$$

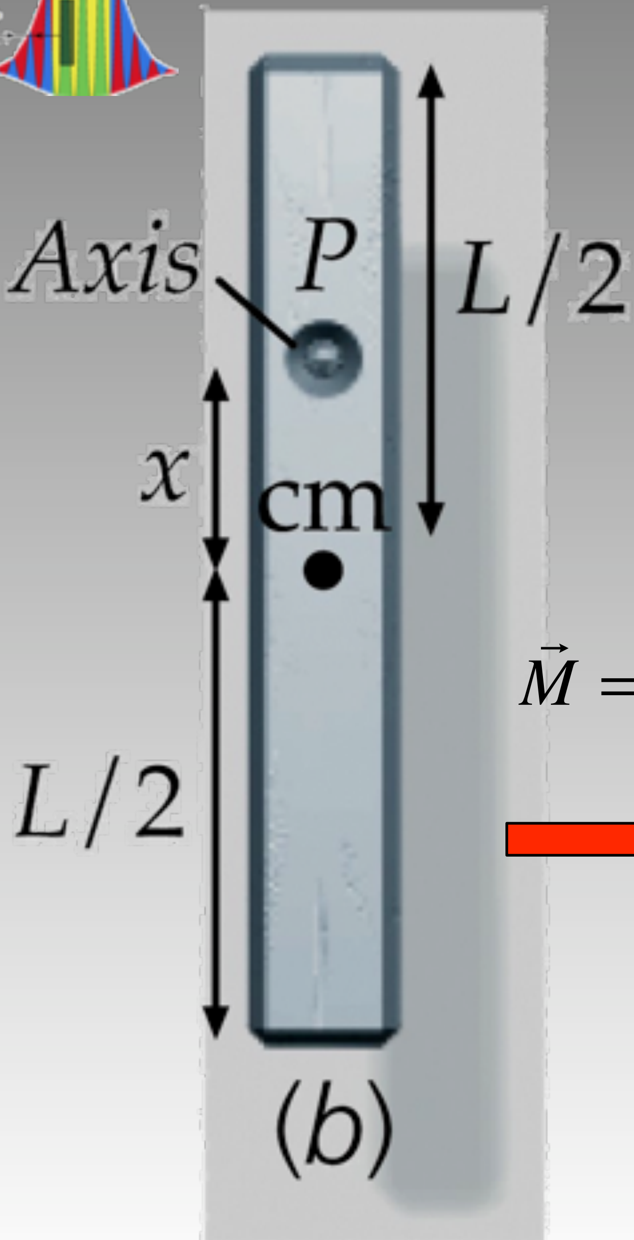
$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

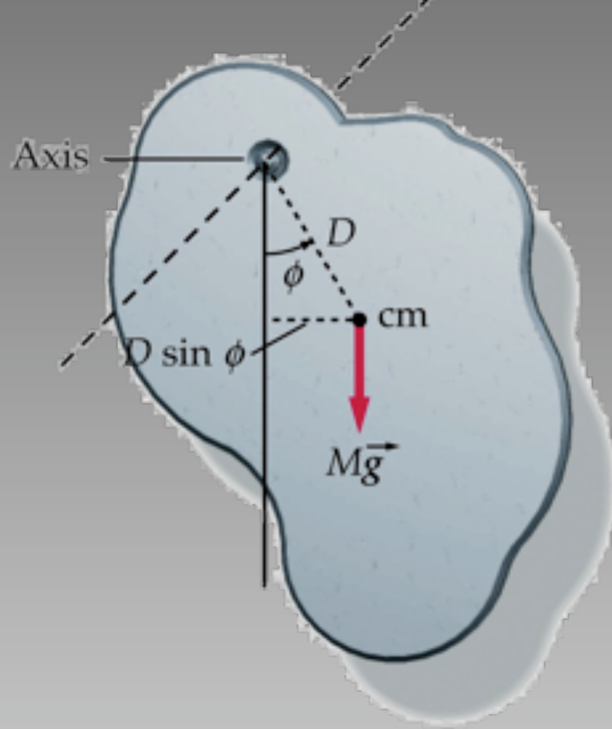
Amplitude: Maximale Auslenkung

Für entsprechende AB:

$$x(t) = A\cos\omega t = A \cdot \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right)$$


U
$U = \frac{1}{2}kx^2$
$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}kA^2$
K
U
$-A$
A
x

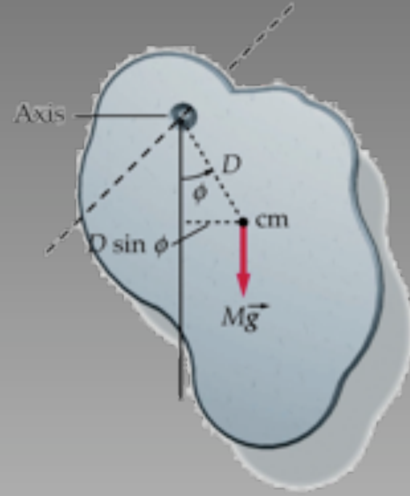




$$\vec{M} = m \cdot \vec{a} \cdot x = m \cdot x \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} x = m \cdot x^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} = I \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} = -D \cdot m \cdot g \cdot \sin\phi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}}$$



$$I\,\frac{d^2\phi}{dt^2} = -D\cdot m\cdot g\cdot\sin\phi$$

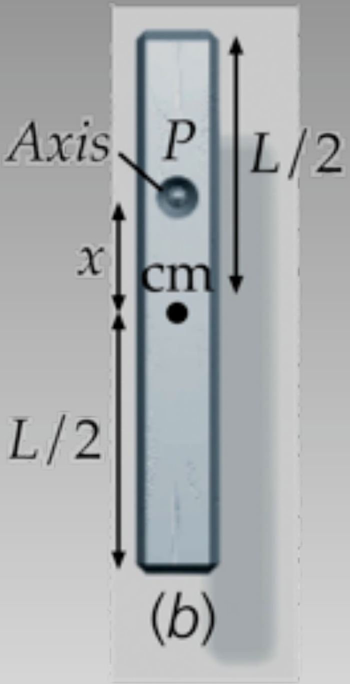
$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{D\cdot m\cdot g}{I}\cdot\sin\phi(t) = 0$$

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + \frac{D\cdot m\cdot g}{I}\cdot\phi(t) = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

$$I = I_S + m \cdot a^2 =$$

$$\frac{1}{12} m \cdot L^2 + m \cdot x^2$$



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}} =$$

$$= \quad 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} m \cdot L^2 + m \cdot x^2}{mgx}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot L^2 + \cdot x^2}{gx}}$$

Schritt 2: Lösen der homogenen Gleichung mit Dämpfung

$$m\cdot\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\gamma\cdot x'(t)+k\cdot x(t)=0$$

Möglicher Ansatz:

$$x(t)=e^{-\delta\cdot t}\cdot\underbrace{\xi(t)}_{A\cos\omega t+B\sin\omega t}$$

Lösen mit Mathematica und

Diskussion der Parameter

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega} \sin\omega t \right)$$

$$= x_0 \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\delta = \frac{R}{2m}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \quad \tan\varphi = \frac{\delta}{\omega}.$$

Frequenz verschoben

Schritt 3: Lösen der inhomogenen Gleichung

Erzwungene Schwingungen

ω_0^2

$$\cancel{m}\cdot\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\gamma\cdot\frac{dx(t)}{dt}+\boxed{\frac{k}{m}}\cdot x(t)=F(t)=F_0\cos(\boxed{\omega}\cdot t)$$

Systemresonanzfrequenz $\neq$ Treiberfrequenz

Bei der Lösung dieses Problems ist das Experiment hilfreich.
Man macht folgende Feststellungen:

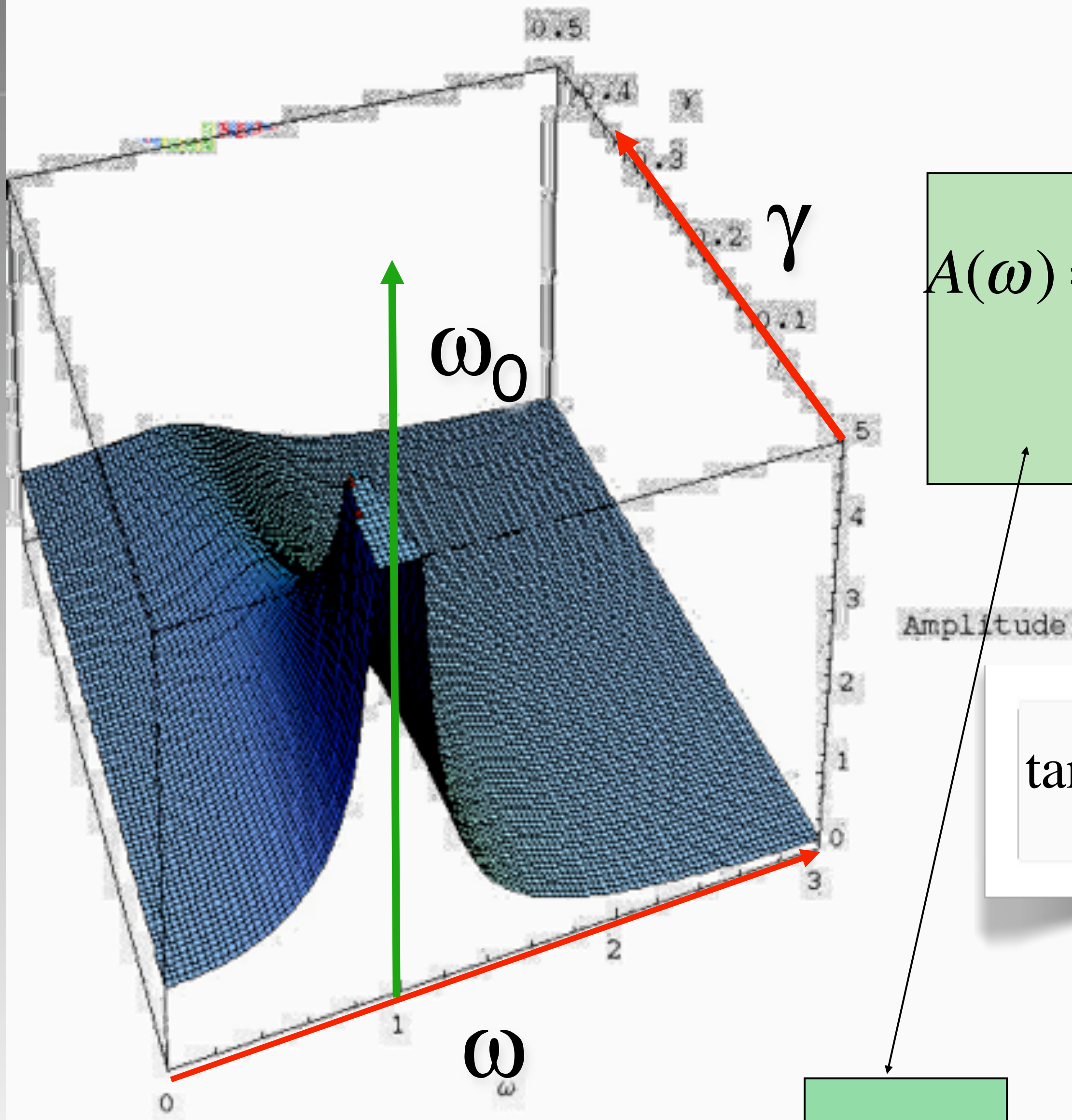
1. Welche Frequenz ω auch immer vom Erreger angeboten wird, das Pendel schwingt immer mit genau dieser Frequenz, nicht mit seiner Eigenfrequenz (nach dem Einschwingvorgang)
2. Das Pendel schwingt gegenüber dem Erreger mit einer Phasenverschiebung, die von der Erregerfrequenz abhängt.
3. Die Amplitude der Pendelschwingung hängt ebenfalls stark von der Erregerfrequenz ab.
Sie wird besonders groß,, wenn ω, mit der Eigenfrequenz ω_0 des Pendels übereinstimmt (Resonanz).

__Inhomogene Diffgl:__ Lösung besteht aus Lösung der homogenen + spezielle Lösung der inhomogenen Diffgl.

Nur für Einschwingvorgang

Ansatz: $$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$A(\omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}}$$



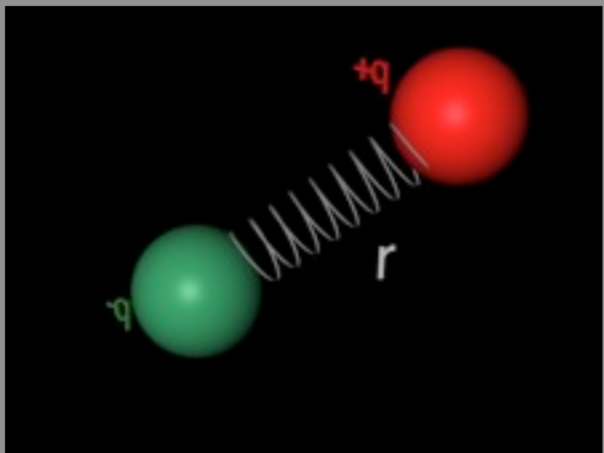
$$A(\omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\gamma\omega}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}$$

$$x(t) = \boxed{A(\omega)} \cdot \cos(\omega \cdot t + \boxed{\varphi(\omega)})$$

Erzwungene Schwingung

$$m\frac{d^2r(t)}{dt^2} + Cr + \underbrace{\frac{m}{\tau}\frac{dr(t)}{dt}}_{\text{Dämpfungsterm}} = q\underbrace{E_m(t)}_{E_{m0}e^{i\omega t}}$$

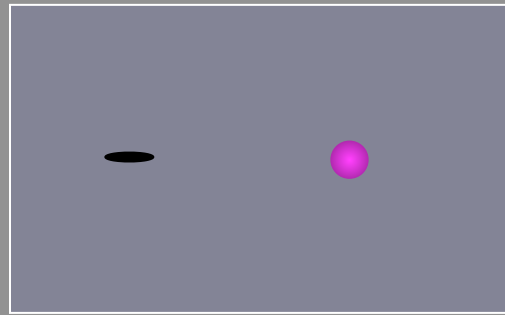


Näherung für Elektronenwolke um Kern

Kraft | Oszillator

Unterhalb der Resonanz

$\omega << \omega_0$

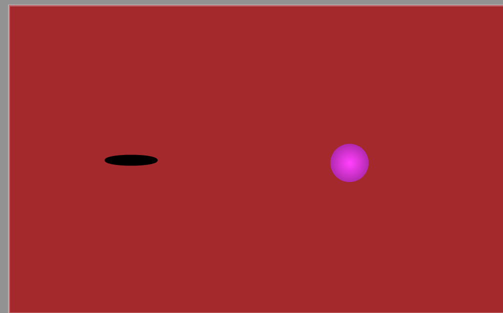


Kleine Amplitude

In Phase

In Resonanaz

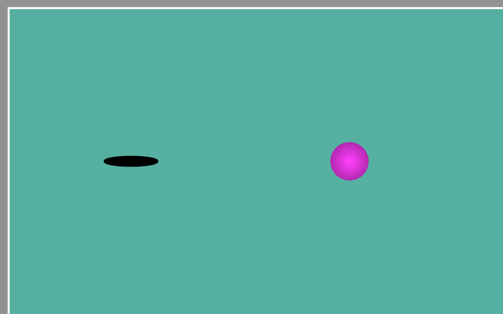
$\omega = \omega_0$



Riesige Amplitude 90° phasen-verschoben

Oberhalb der Resonanz

$\omega >> \omega_0$



Sehr kleine Amplitude 180° phasen-verschoben.

Energieübertragung

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = P = F \cdot \dot{x}(t)$$

$$F \cdot \dot{x}(t) = F_0 \cos \omega \cdot t \bullet (-1) \underbrace{A(\omega)}_{\dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\gamma\omega}{m}\right)^2}}} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$$

$$P = \frac{dW}{dt} = F(t) \cdot \dot{x}(t)$$

$$= -\frac{F_0^2 \omega \cos(\omega t) \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \right) + \omega t \right)}{\sqrt{m^2 \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

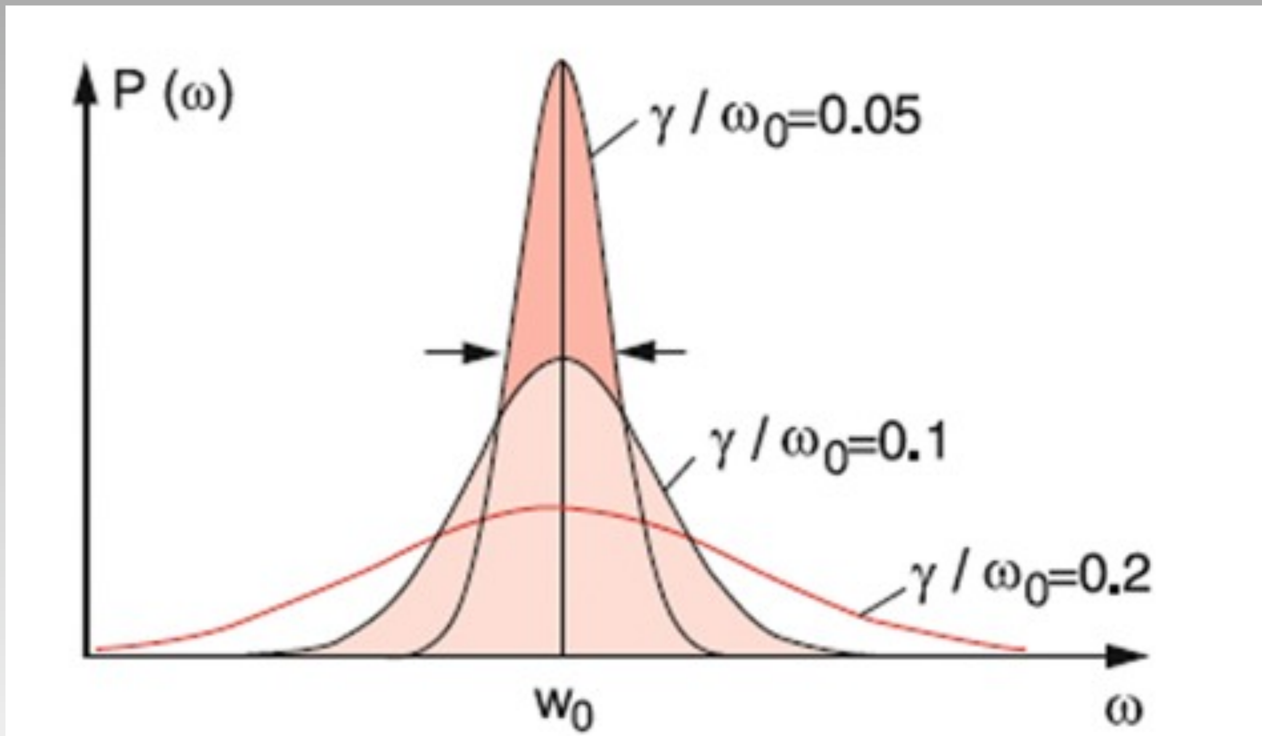
$$\overline{P} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P\, dt =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(-\frac{F_0^2 \omega \cos(\omega t) \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\gamma\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \right) + \omega t \right)}{\sqrt{m^2 \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2}} \right) dt$$

$$= \frac{F_o^2 \gamma \omega^2}{2\left(m^2 \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right)}$$

$$= \frac{F_o^2 \gamma \omega^2}{2\left(m^2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2\right)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{F_o^2}{\gamma}$$



Variante 1:

$$x(t) = A(\omega)\cdot \cos(\omega\cdot t+\varphi)$$

mit

$$A(\omega)=\frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\gamma\omega\right)^2}}$$

Variante 2:

$$x(t) = A_{el}(\omega)\cdot \cos(\omega\cdot t) + A_{inel}(\omega)\cdot \sin(\omega\cdot t)$$

$$A(\omega) = A_{el}(\omega) + i\, A_{inel}(\omega)$$

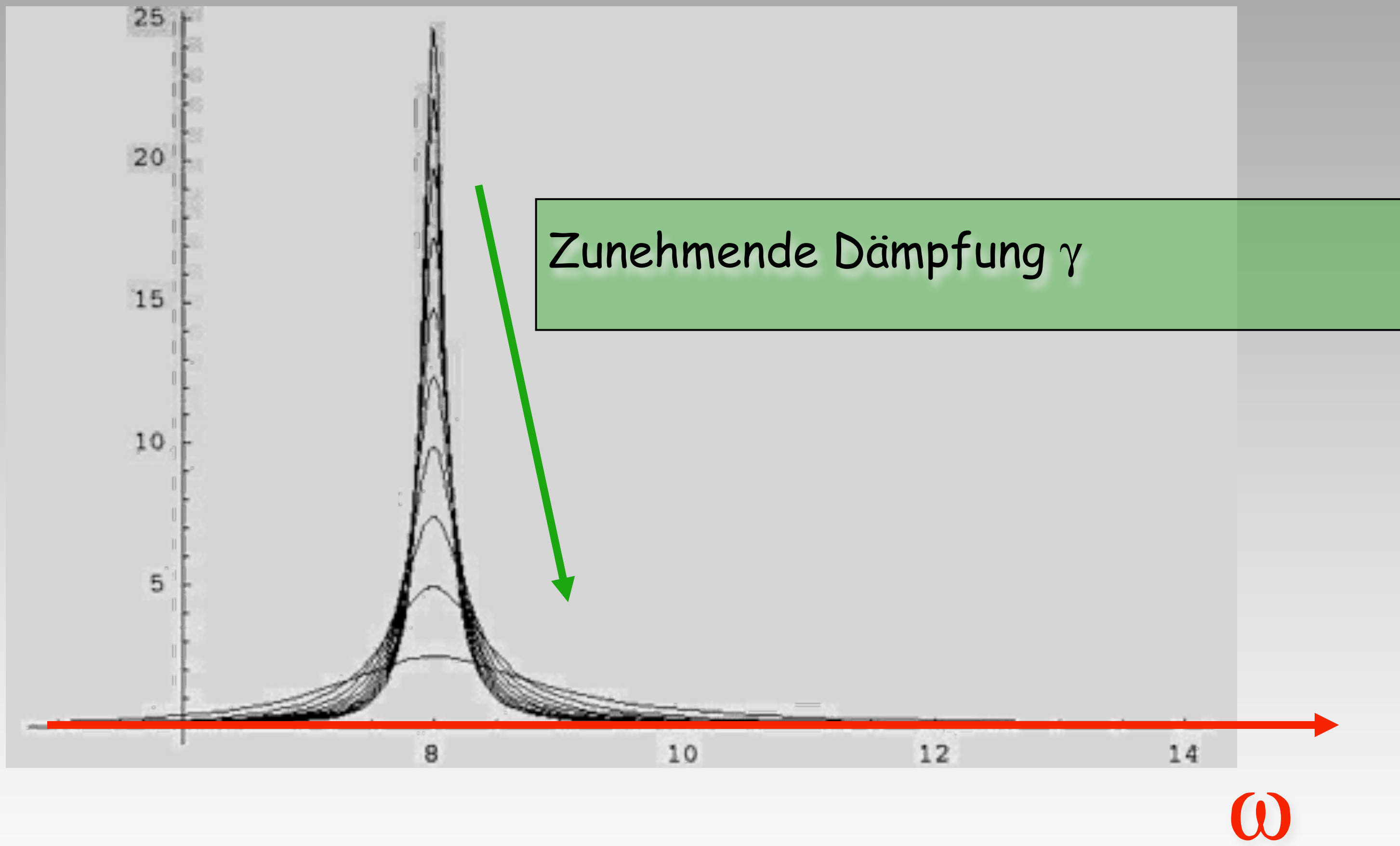
$$A_{inel}(\omega) = \frac{F_0/m}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}$$

$$A_{el}(\omega) = \frac{F_0/m\,\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\gamma\omega\right)^2}$$

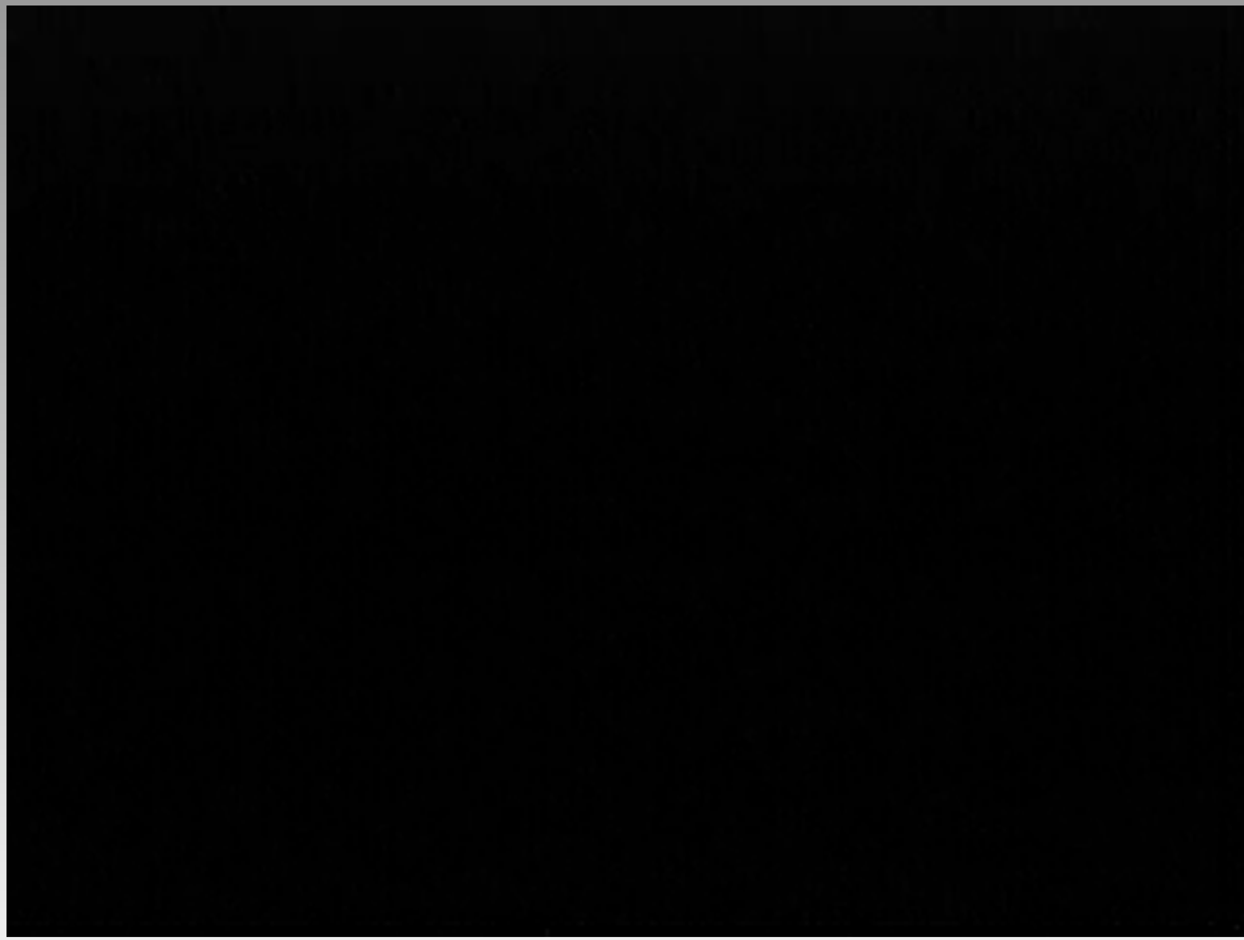
$$\boxed{P=\frac{1}{2}F_0\,\omega\, A_{inel}(\omega)}$$

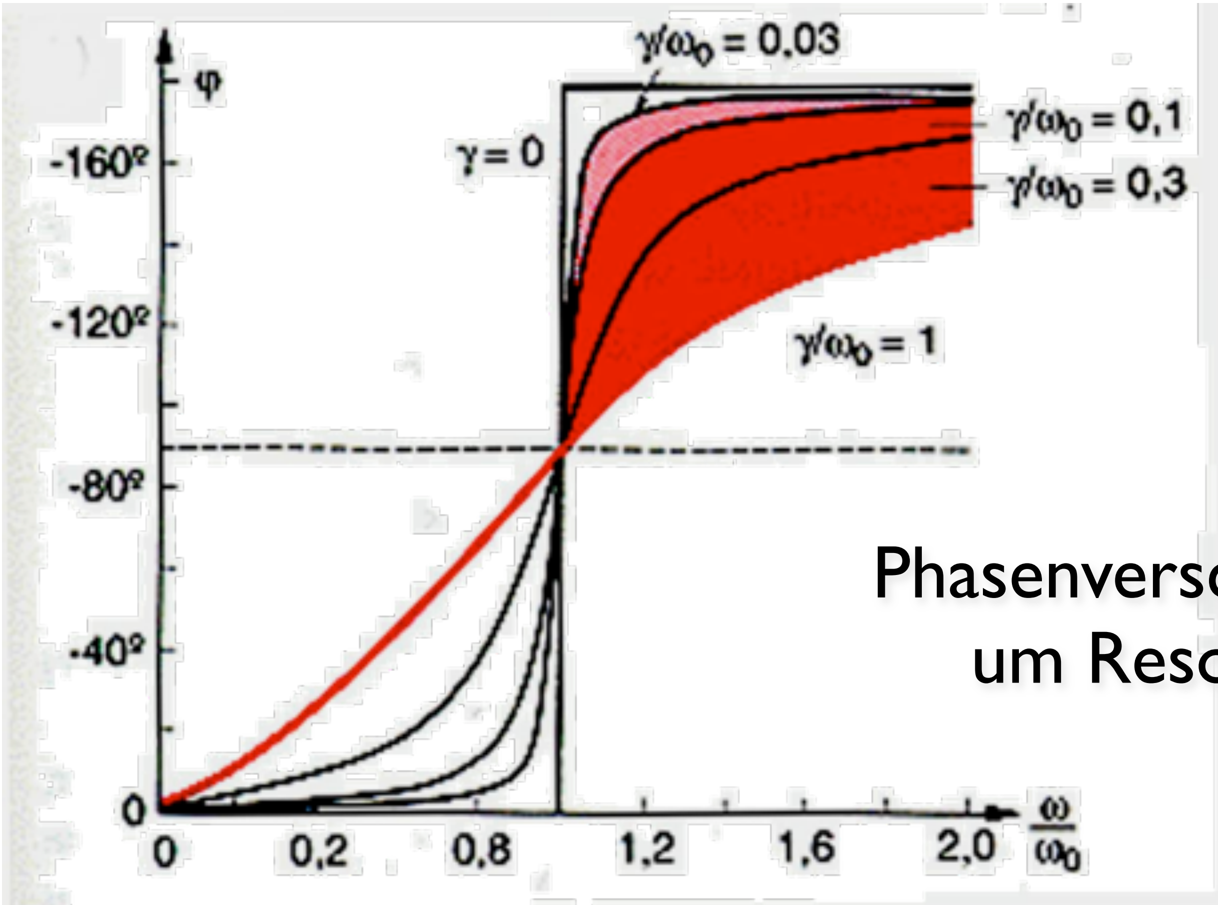
$$\bar{P} = \frac{F_o^2 \gamma \omega^2}{2\left(m^2\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right)}$$

Lorentzkurve
Resonanzkurve



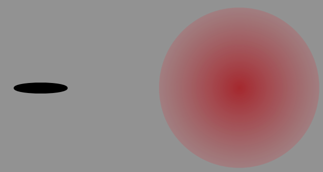
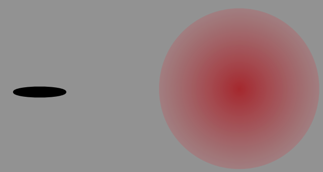
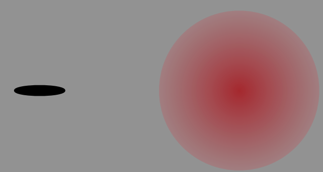
Resonanzkatastrophe





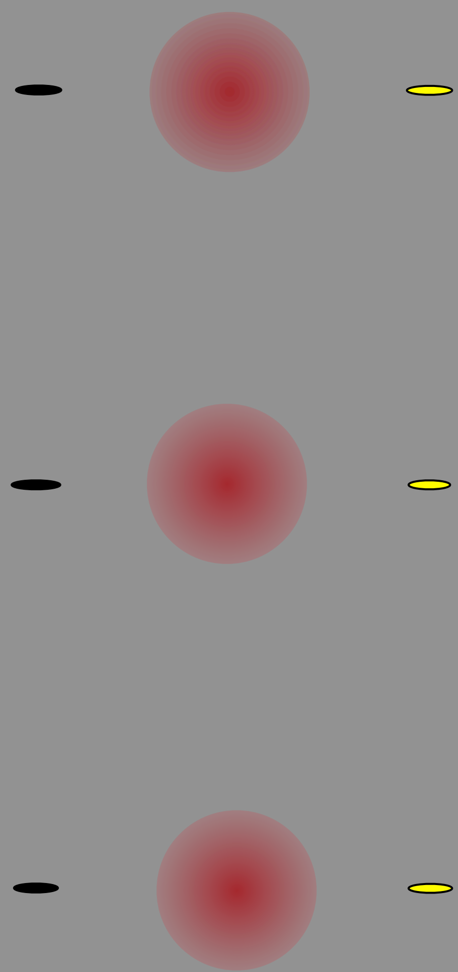
Phasenverschiebung
um Resonanz

Erzwungene Schwingung

	Kraft	Elektronen-wolke	
Unterhalb der Resonanz $\omega << \omega_0$			Kleine Amplitude 180° phasen-verschoben
In Resonanaz $\omega = \omega_0$			Riesige Amplitude -90° phasen-verschoben
Oberhalb der Resonanz $\omega >> \omega_0$			Sehr kleine Amplitude in Phase.

Erzwungene Schwingung

Kraft | Elektronen-wolke



Unterhalb der Resonanz

$\omega \ll \omega_0$

Kleine Amplitude
180° phasen-verschoben

Schwache Emission
90° phasen-verschoben

In Resonanaz

$\omega = \omega_0$

Riesige Amplitude
-90° phasen-verschoben

Starke Emission
180° phasen-verschoben.

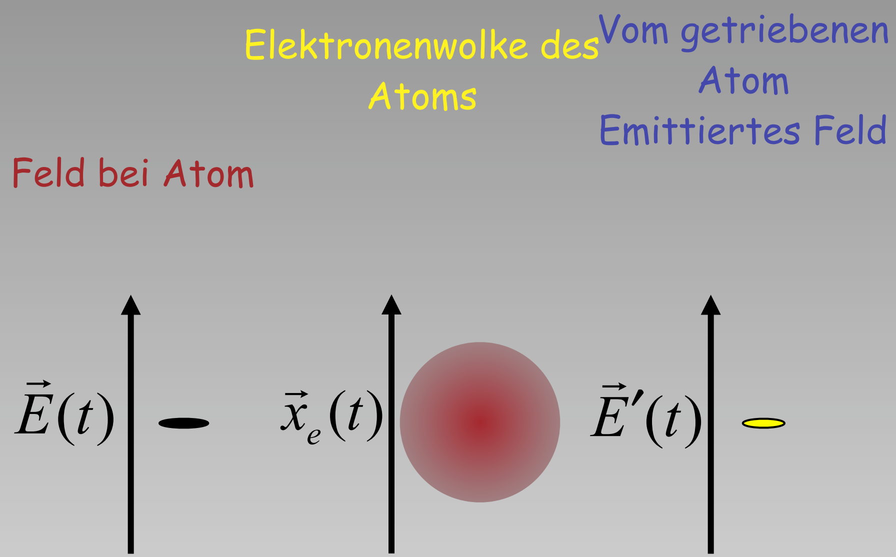
Oberhalb der Resonanz

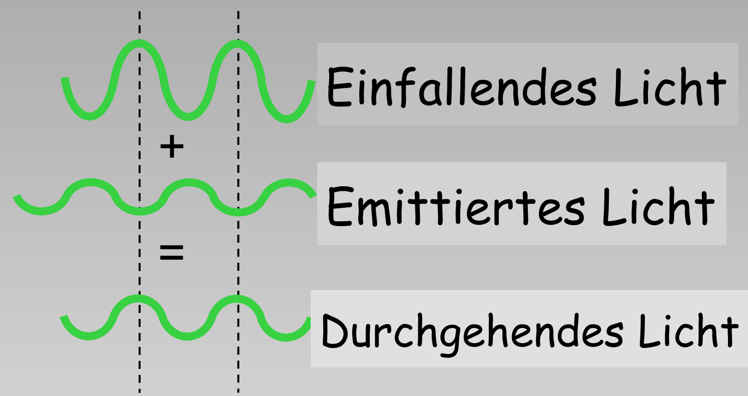
$\omega \gg \omega_0$

Sehr kleine Amplitude
in Phase.

Schwache Emission
-90° phasen-verschoben

Prinzip der Lichtausbreitung im Medium



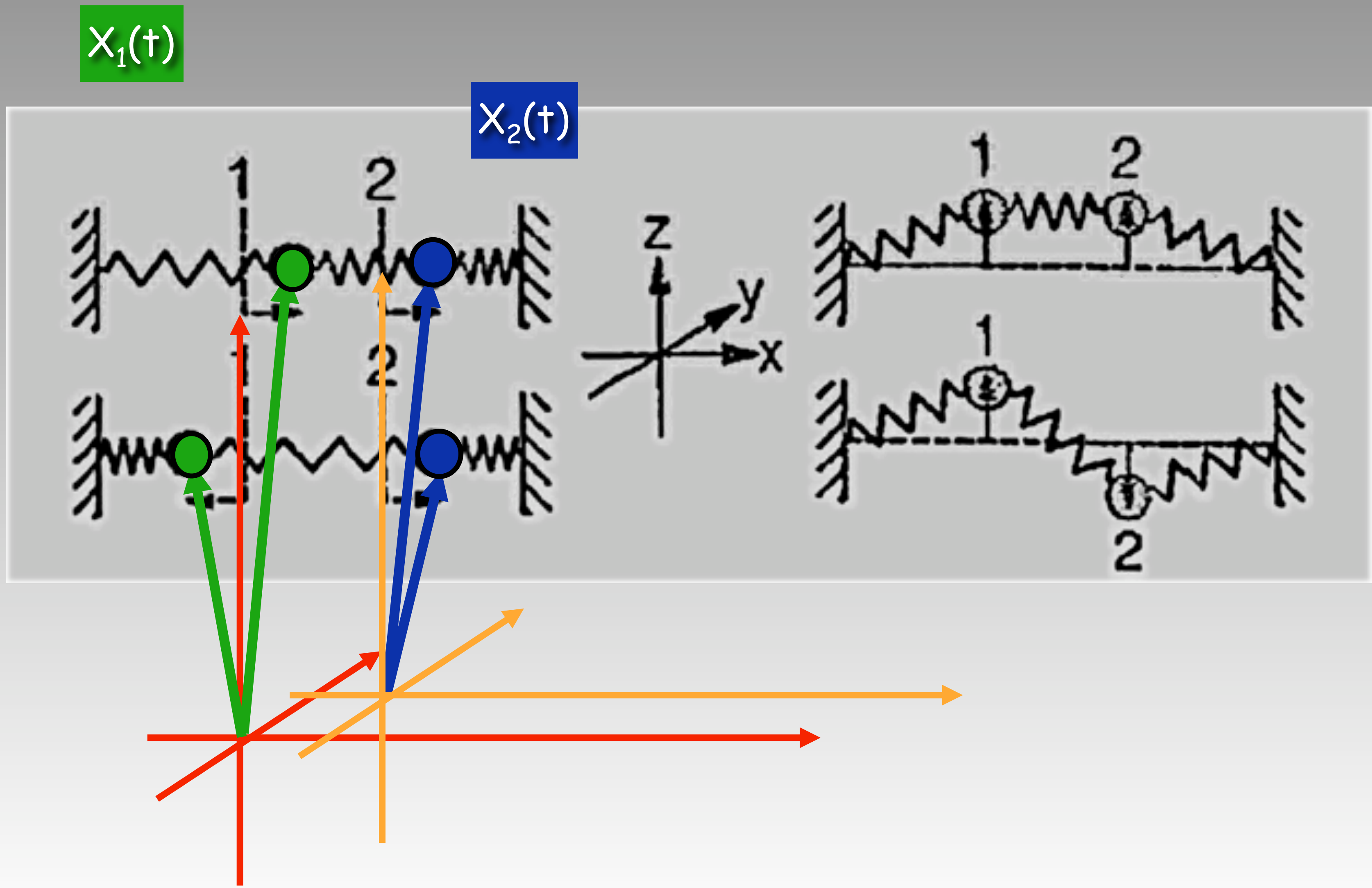


Ein Angeregtes Atom schwingt mit der Frequenz des antreibendes Feldes und sendet Licht mit dieser Frequenz aus.

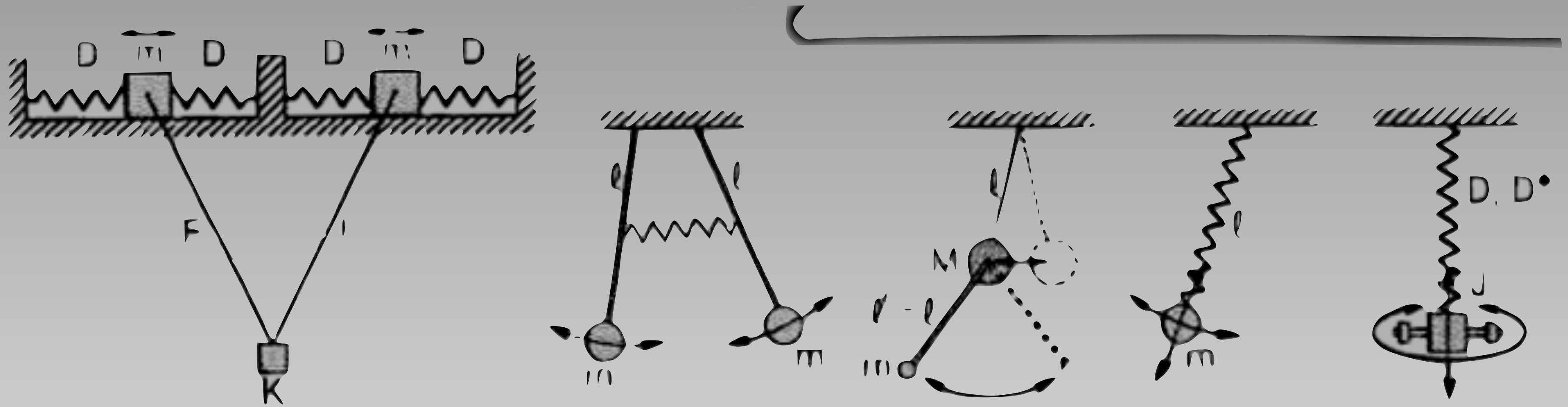
Entscheidend ist die relative Phase des einfallenden zum emittiereten Lichtes. Z. B. Im Fall von 180^{O} beobachten wir Absorption.

Mehrere Freiheitsgrade-Normalschwingungen

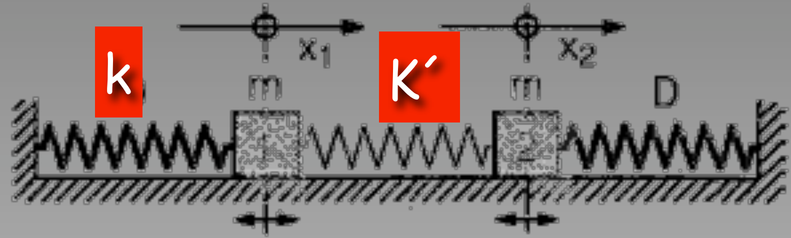
- Bisher: Ein Freiheitsgrad
- Praktische Bedeutung: Systeme mit vielen Freiheitgraden
  - Diskrete Systeme
    - Gekoppelte Pendel, Massen
    - Festkörper
  - Kontinuierliche Systeme
    - Schwingende Saite



$X_1(t)$
$X_2(t)$
1
2
1
2
z
y
x
1
2
1
2


D
D
D
D
K
M
D, D*
J

Schritt 4: Lösen der homogenen gekoppelten Gleichung



$$m \cdot \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + k \cdot x_1(t) + k' \cdot \left[x_1(t) - x_2(t)\right] = 0$$

$$m \cdot \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + k \cdot x_2(t) + k' \cdot \left[x_2(t) - x_1(t)\right] = 0$$

Gekoppeltes Differentialgleichungssystem

für x_1 und x_2

Lösungsmöglichkeiten

- Versuch Gleichungssystem direkt für x1 und x2 zu lösen
  - Z.B. mit Mathematica leicht möglich
- Einführen „neuer Koordinaten“
  - Durch Addition bzw, Subtraktion der Gleichungen erreicht
  - Dadurch Entkoppelung der Gleichungen
    - D.h. wir erhalten zwei „Schwingungsgleichungen“, die wir sofort lösen künnen.
    - Beschreiben bestimmte Bewegungszustände, die wir Normalschwingungen (Normalkoordinaten) nennen
- Jeder beliebige Zustand ist durch Linearkombination der Normalschwingungen darstellbar.

Normalschwingungen

$$\begin{cases} m\cdot\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2}+k\cdot x_1(t)+k'\cdot\left[x_1(t)-x_2(t)\right]=0 \\ m\cdot\dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2}+k\cdot x_2(t)+k'\cdot\left[x_2(t)-x_1(t)\right]=0 \end{cases}$$

$$m\cdot\frac{d^2\left[x_1(t)+x_2(t)\right]}{dt^2}+k\cdot\left[x_1(t)+x_2(t)\right]=0$$

$$m\cdot\frac{d^2\left[x_1(t)-x_2(t)\right]}{dt^2}+(k+2k')\cdot\left[x_1(t)-x_2(t)\right]=0$$

2 entkoppelte Schwingungsgleichungen für

$$m \cdot \frac{d^2\left[x_1(t) + x_2(t)\right]}{dt^2} + k \cdot \left[x_1(t) + x_2(t)\right] = 0$$

$$m \cdot \frac{d^2\left[x_1(t) - x_2(t)\right]}{dt^2} + (k + 2k') \cdot \left[x_1(t) - x_2(t)\right] = 0$$

Resonanzfrequenzen:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left[1 + 2\frac{k'}{k}\right]} = \omega_0 \sqrt{\left[1 + 2\frac{k'}{k}\right]}}$$

$$\boxed{x_1(t) + x_2(t) = A\cos[\omega_0 \cdot t]}$$

$$\boxed{x_1(t)} - x_2(t) = A'\cos[\omega_1 \cdot t]$$

$$\boxed{x_1(t) = \boxed{A\cos[\omega_0 \cdot t] - x_2(t)}}$$

$$A\cos[\omega_0 \cdot t] - x_2(t) - x_2(t) = A'\cos[\omega_1 \cdot t]$$

$$\rightarrow$$

$$\boxed{x_2(t) = \frac{1}{2}\left(A\cos[\omega_0 \cdot t] - A'\cos[\omega_1 \cdot t]\right)}$$

$$x_1(t) = A\cos[\omega_0 \cdot t] - \frac{1}{2}\left(A\cos[\omega_0 \cdot t] - A'\cos[\omega_1 \cdot t]\right)$$

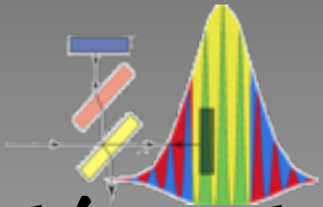
$$\boxed{x_1(t) = \frac{1}{2}\left(A\cos[\omega_0 \cdot t] + A'\cos[\omega_1 \cdot t]\right)}$$

x_1 und x_2 <u>zu jeder Zeit</u> als Überlagerung (Linearkombination) der Normalschwingungen darstellbar!

x_1 und x_2 zu jeder Zeit als Überlagerung (Linearkombination) der Normalschwingungen darstellbar!

Diese Aussage ist von weitreichender und sehr allgemeinen Gültigkeit (für alle Systeme die auf „Schwingungen“ basieren:

Sie gilt z.B. auch für den beliebeigen Energiezustand (Wellenfunktion) eines Elektrons in einem Atom, Molekül oder Festkörper: Er ist durch die Linearkombination der Eigenzustände (Normalschwingungen) gegeben.



$$k' << k$$

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1+2\frac{k'}{k}} \approx \omega_0\left(1+\frac{k'}{k}\right)$$

$$+AB: x_0, 0$$

$$x_1(t) = \frac{x_0}{2}\left(\cos[\omega_0 \cdot t] + \cos[\omega_1 \cdot t]\right)$$

$$x_2(t) = \frac{x_0}{2}\left(\cos[\omega_0 \cdot t] - \cos[\omega_1 \cdot t]\right)$$

Einführen:

$$\boxed{\overline{\omega} = \frac{1}{2}(\underbrace{\omega_1}_{\omega_0\left(1+\frac{k'}{k}\right)} + \omega_0) \approx \omega_0 \qquad \Delta\omega = \frac{1}{2}(\underbrace{\omega_1}_{\omega_0\left(1+\frac{k'}{k}\right)} - \omega_0) \approx \frac{k'}{k}}$$

$$x_1(t) = x_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right] \cdot \cos\left[\overline{\omega} \cdot t\right]$$

$$x_2(t) = x_0 \sin\left[\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right] \cdot \cos\left[\overline{\omega} \cdot t\right]$$

Langsame Amplitudenmodulation

Schnell osz. Fkt

Schwebung

Viele Freiheitsgrade

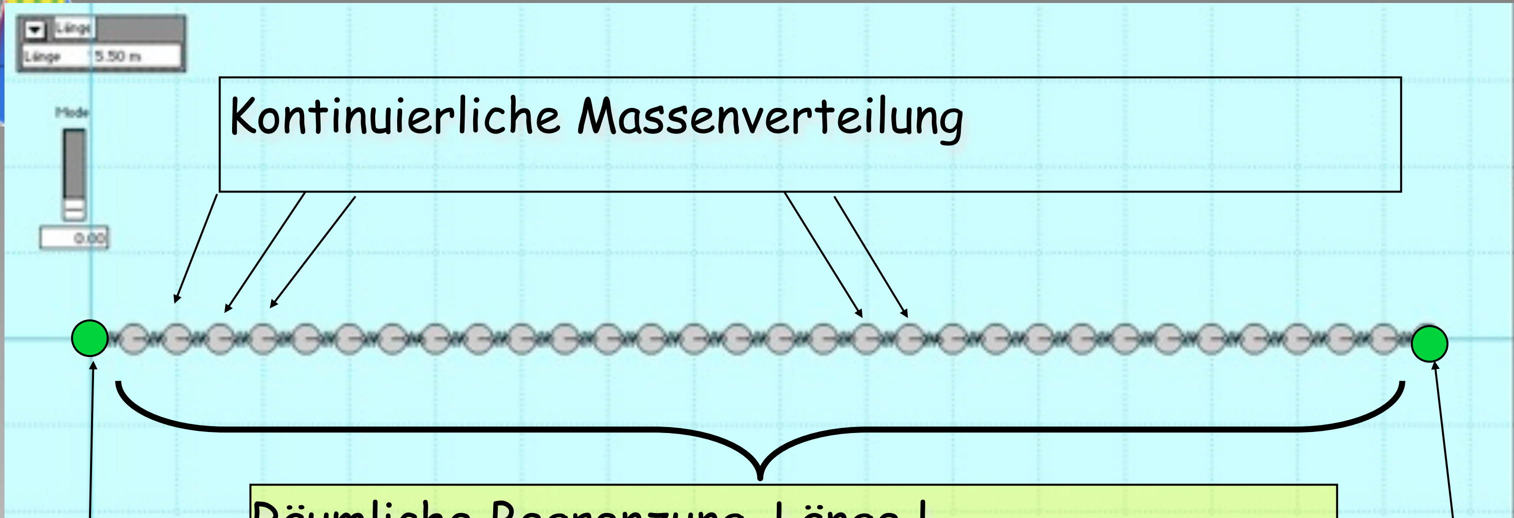
❶Enthält ein System eine große Anzahl von bewegten Teile und sind diese in einem beschränkten Raum verteilt

→ Anzahl gegen unendlich

→ Abstand geht gegen 0

❷Die Eigenschwingungen dieses „kontinuierlichen" Systems heißen Stehende Wellen

❸ Es besitzt unendlich viele Eigenschwingungen

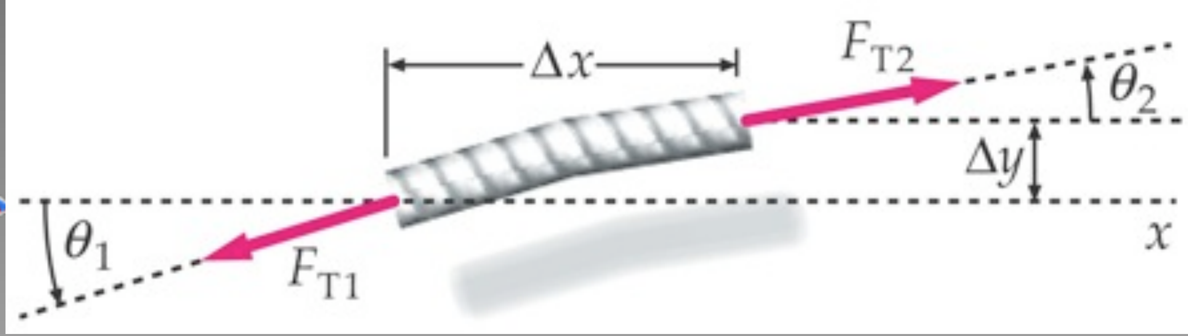


Kontinuierliche Massenverteilung

Räumliche Begrenzung, Länge l

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

+Randbedingung, z.B. Eingespannte Saite



$$v_{Phase} = \frac{\omega}{\underbrace{\left[\frac{2\pi}{\lambda}\right]}_{k..Kreiswellenzahl}} = \lambda \cdot \underbrace{\nu}_{Frequenz}$$

Am Ort x_1 Schwingung

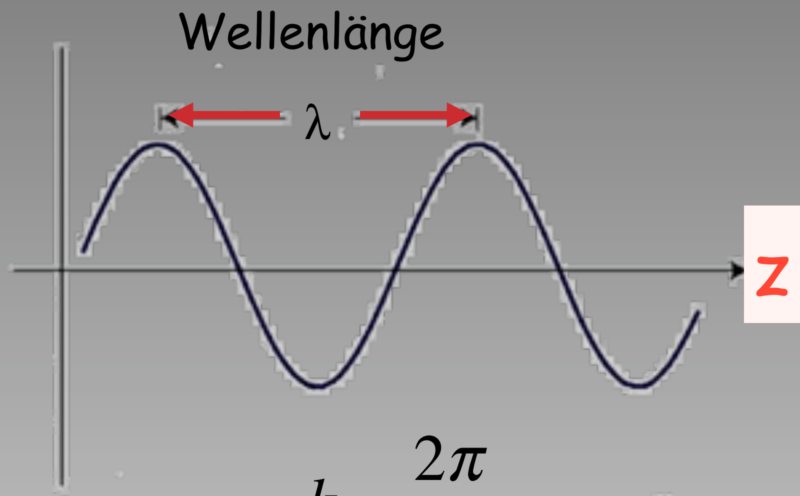
$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

Im Allgemeinen mehrere Frequenzen

Ausbreitung der Schwingung

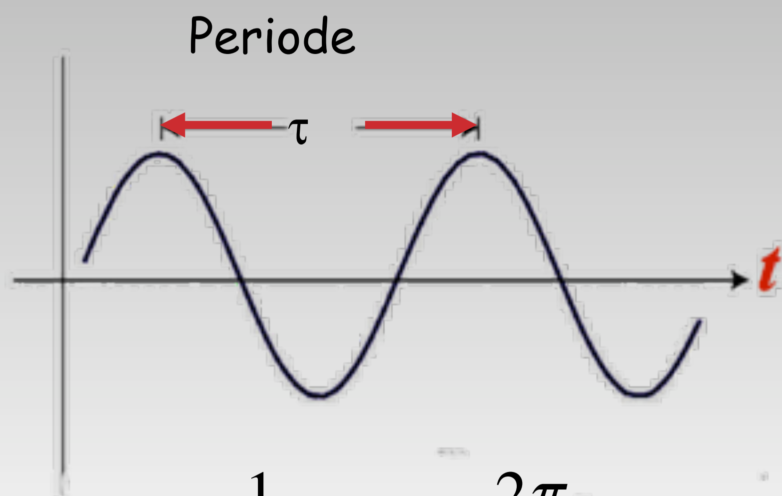
Definitionen

Räumliche Ausbreitung:



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Zeitliches Verhalten



$$\nu = \frac{1}{\tau} \qquad \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Möglichkeiten zur Wellendarstellung (ebene Welle)

$$f(z,t) = A\ \sin(\omega t - kz) =$$

$$A\ \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - z))\right] =$$

$$= A\ \sin\left[2\pi\left(\nu t - z/\lambda\right)\right]$$

$$\frac{\omega z_1}{\upsilon} + 2\pi = \frac{\omega z_2}{\upsilon}$$

$$\rightarrow \lambda = z_2 - z_1 = 2\pi \bullet \frac{\upsilon}{\omega} = \frac{\upsilon}{\nu}$$

Welle:

$$\psi(z,t) = \boxed{A}\,\cos(\boxed{\omega \cdot t - k \cdot z})$$

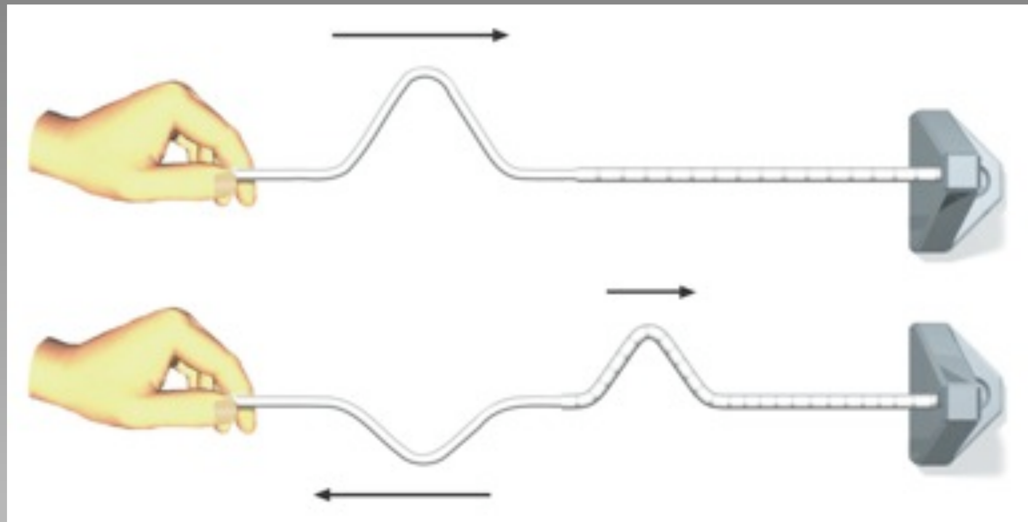
Amplitude

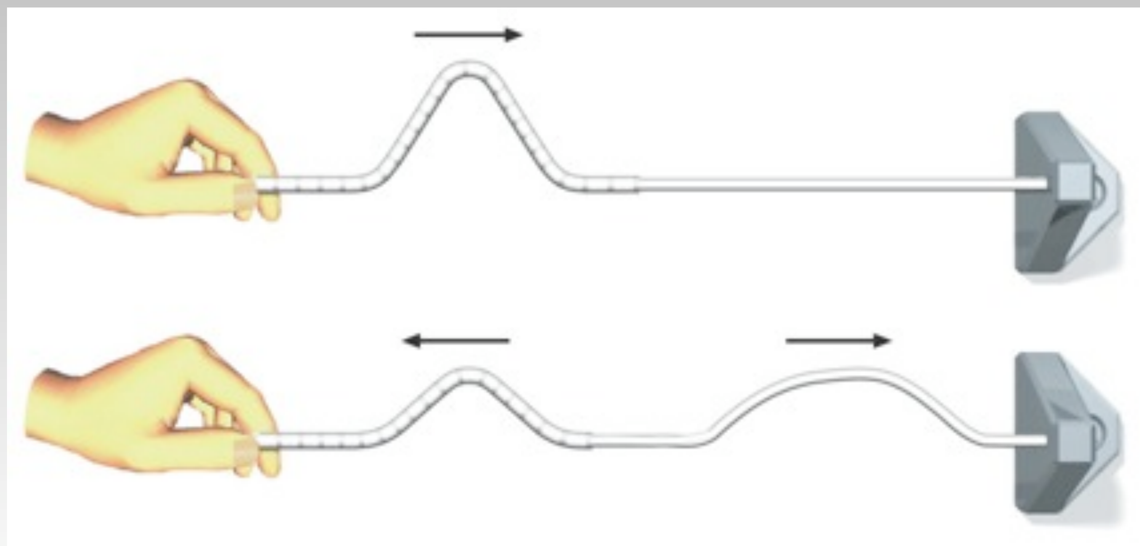
Phase

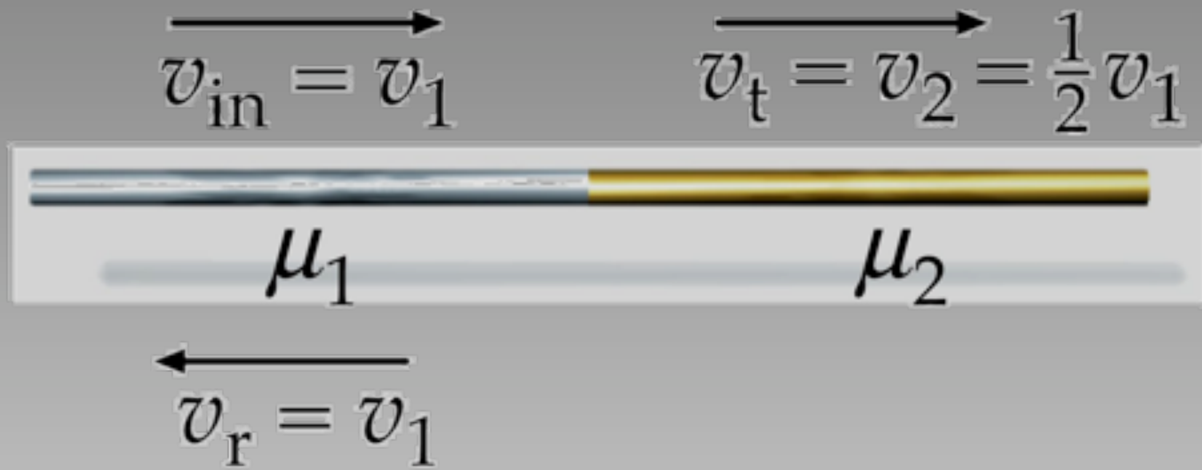
$$\frac{d}{dt}\left[\omega t - kz\right] = 0 \rightarrow \omega - k \bullet \frac{dz}{dt} = 0$$

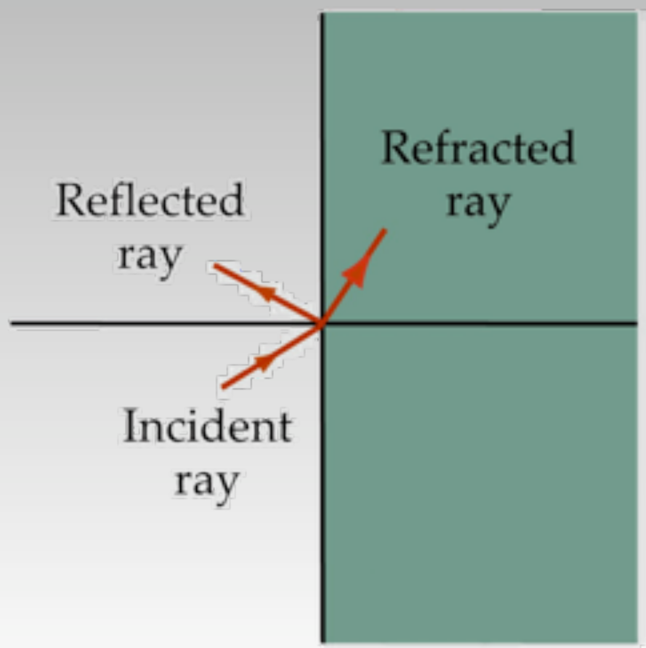
$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = \upsilon_{Phase} = \frac{\omega}{k}$$

$$\upsilon_{Phase} = \frac{\text{Weg einer Periode}}{\text{Zeit}} = \frac{\lambda}{1/\nu} = \lambda \cdot \nu = \frac{\omega}{\underset{k\text{...Kreiswellenzahl}}{2\pi/\lambda}}$$






$v_{in} = v_1$
$v_t = v_2 = \frac{1}{2} v_1$
μ_1
μ_2
$v_r = v_1$


Refracted ray
Reflected ray
Incident ray

❶ Die Eigenschwingungen der Saite können auch als stehende Wellen interpretiert werden.

❷ Die Randbedingungen ergeben einen Zusammenhang zwischen Wellenlängen und Frequenzen:

$\nu_1 = v_{Phase}/\lambda_1$, $\nu_2 = 2\,\nu_1$, $\nu_3 = 3\,\nu_1$,..........

❸ Die Frequenzen ν_2, ν_3,.... heißen zweite, dritte Harmonische der Grundfrequenz.

Elastische Saite

$$v_{Phase} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \text{........} Saitenspannung$$

$$\rho \text{.................} Massendichte$$

Phasen und Gruppengeschwindigkeit

- Die Beziehung zwischen ω und k bestimmt v, die Phasengeschwindigkeit einer Welle.

- In einem dispersionsfreien Medium wie Vakuum gilt daher:

$$v_{Phase} = \frac{\omega}{k} = \frac{const \bullet k}{k} = const$$

Alle Wellen eines bestimmten Typs
(zum Beispiel alle elektromagnetischen Wellen)
breiten sich in einem dispersionsfreien Medium
mit derselben Phasengeschwindigkeit aus.

Phasen und Gruppengeschwindigkeit

- Wenn mehrere Wellen einander überlagern, so bewegt sich die einhüllende Modulationskurve der Gesamtwelle mit einer anderen Geschwindigkeit als die einzelnen Wellen.
- Dies führt uns zum Begriff der Gruppengeschwindigkeit
  - und deren Zusammenhang mit der Phasengeschwindigkeit.

Phasen und Gruppengeschwindigkeit

$$\psi = A \cdot \left(\cos\left[\omega_1 \cdot t - k_1 z\right] + \cos\left[\omega_2 \cdot t - k_2 z\right] \right)$$

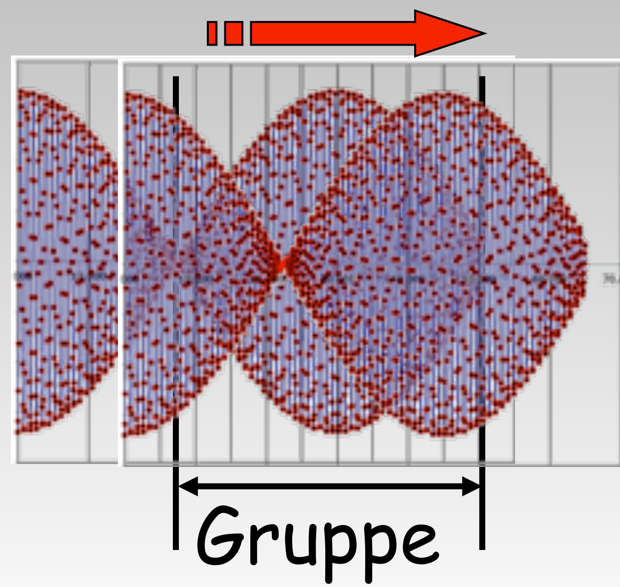
$$\psi = \underbrace{2A\cos\left[\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t - \frac{\Delta k}{2} \cdot z\right]}_{\text{Langsam veränderliche Amplitude}} \cdot \underbrace{\cos\left[\bar{\omega} \cdot t - \bar{k}z\right]}_{\text{Trägerwelle}}$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$\Delta k = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$



Phasen und Gruppengeschwindigkeit

$$\psi = \underbrace{2A\cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t - \frac{\Delta k}{2}\cdot z\right]}_{}\cdot\underbrace{\cos\left[\bar{\omega}\cdot t - \bar{k}z\right]}_{}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{\omega}\cdot t - \bar{k}\; z\right] = 0$$

$$\bar{\omega} - \bar{k}\,\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} \equiv v_{Ph} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

Für einen Beobachter, der sich mit der Welle, z.B. im Maximum, mit der Phasengeschwindigkeit mitbewegt, bleibt die Phase konstant (also ein Maximum)

Phasen und Gruppengeschwindigkeit

$$\psi = \underbrace{2A\cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t - \frac{\Delta k}{2}\cdot z\right]}\cdot\underbrace{\cos\left[\bar{\omega}\cdot t - \bar{k}z\right]}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\Delta\omega}{2}\cdot t - \frac{\Delta k}{2}\cdot z\right] = 0$$

$$\frac{\Delta\omega}{2} - \frac{\Delta k}{2}\cdot\frac{dz}{dt} = 0$$

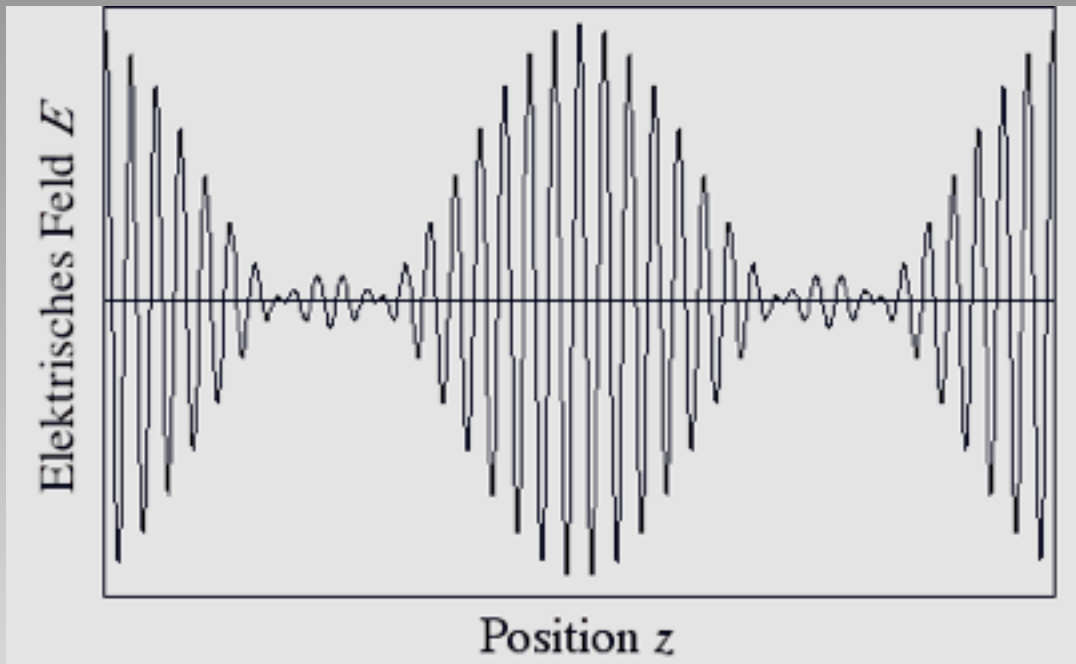
$$\frac{dz}{dt} \equiv v_{Gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \Rightarrow v_{Gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

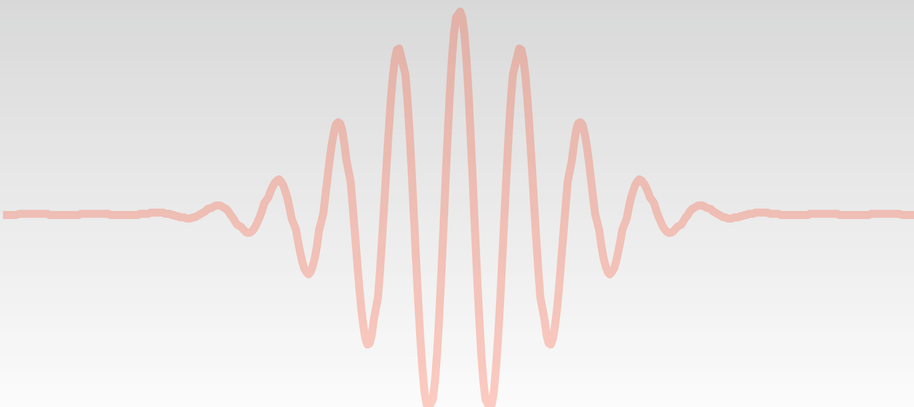
Für einen Beobachter, der sich mit der Welle, z.B. im Maximum der Amplitude, mit der Gruppengeschwindigkeit mitbewegt, bleibt die Amplitude konstant (also ein Maximum)

Phasen und Gruppengeschwindigkeit

Beispiele

$v_{Ph} = v_g$

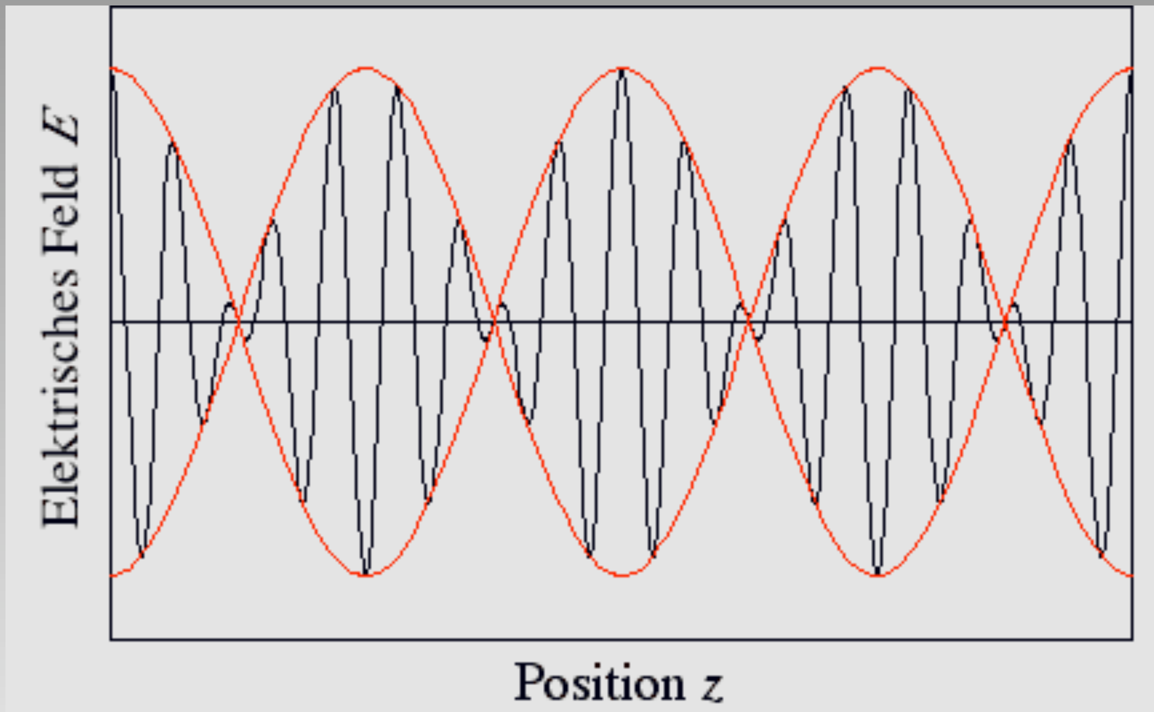


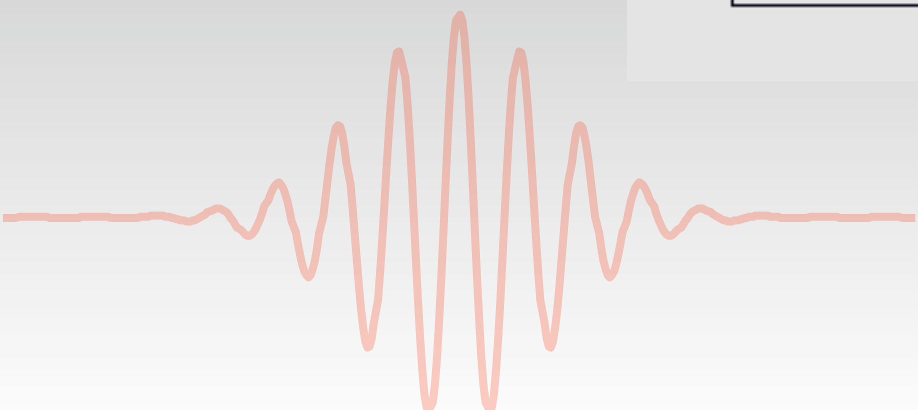


Phasen und Gruppengeschwindigkeit

Beispiele

$v_{Ph} \neq v_g$





Phasen und Gruppengeschwindigkeit