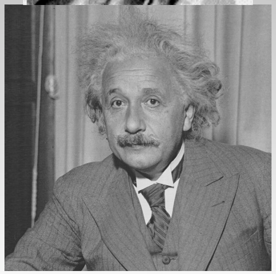
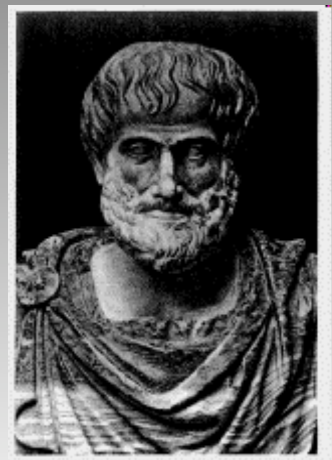
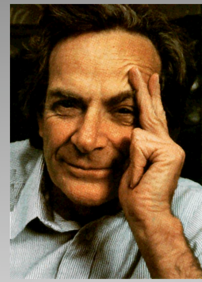
Modellbildung in der Physik

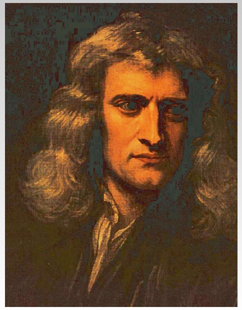
Vorlesung und Übung
im SS 2009
Wolfgang Husinsky

Aus der Geschichte der Physik



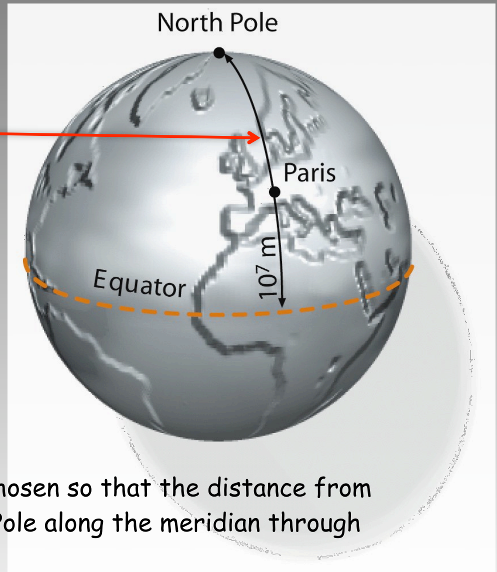






Einheiten

- Länge
- Zeit
- Masse



The meter was originally chosen so that the distance from the equator to the North Pole along the meridian through Paris would be 10^7 m.

Si Einheiten

Zeit Sekunde s

1 Sekunde

ist das 9 192 631 770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids 133Cs entsprechenden Strahlung.

Si Einheiten

Länge Meter m

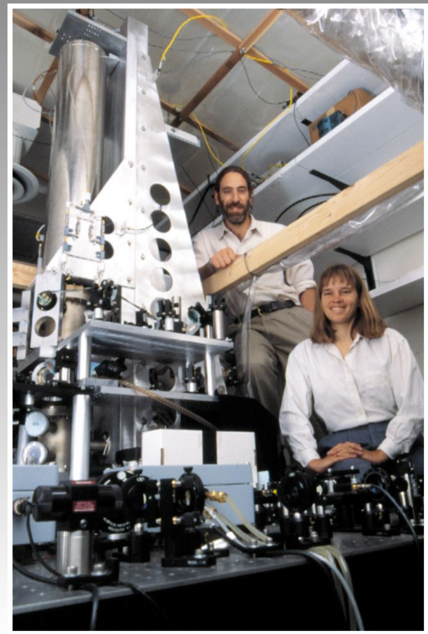
1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunden durchläuft.

Si Einheiten

Masse Kilogramm kg

1 Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.

Uhren: einst und jetzt



Relevante (Signifikante Stellen) und Messfehler

- Viele Zahlen, mit denen wir es in der Wissenschaft zu tun haben, sind das Resultat einer Messung
  - und damit nur bis zu einer bestimmten Messgenauigkeit bekannt.
- Systematische Fehler
- Statistische Fehler

Messgenauigkeit

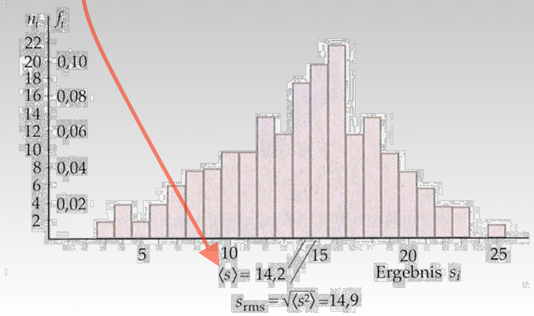
- Das Ergebnis einer Messung entsteht durch den **Vergleich der zu messenden Größe mit der zugehörigen Maßeinheit**.

Wahrscheinlichkeit - Mttelwert

$$\sum_i f_i = f_1 + f_2 + \ldots = \sum_i \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_i n_i, \qquad \sum f_i = 1.$$

Um den Mittelwert einer Messerie zu ermitteln,
sind sämtliche Ergebnisse zu addieren und die Summe ist durch
n zu dividieren

$$\langle s \rangle = \frac{1}{n}\sum_i n_i s_i = \sum_i s_i f_i.$$



Normalverteilung

$$f(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(h-\langle h\rangle)^2/(2\sigma^2)}.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)^2}$$

Standardabweichung

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \langle x\rangle)^2}$$

Statistischer Messfehler

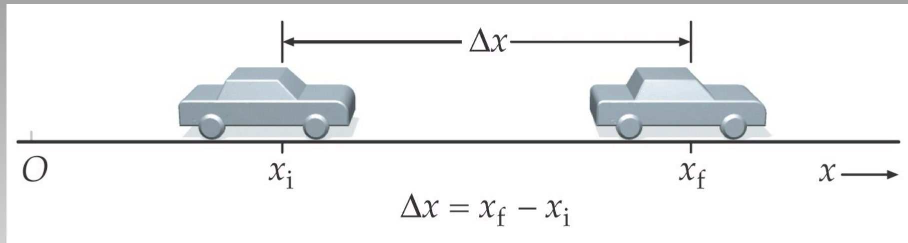
Angabe eines Messwertes

Das Ergebnis einer Messung sollte immer der Messwert und der Messfehler mit der Einheit sein :

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x)\,[x]$$

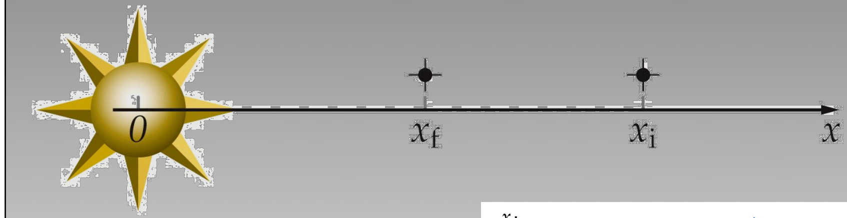
Die Bewegungsgleichung

Weg-Geschwindigkeit-Beschleunigung



Weg, Verschiebung

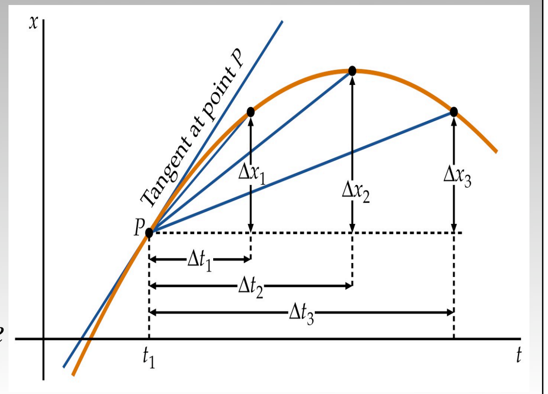
Geschwindigkeit



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$= \mathit{Steigung\ \ der\ \ Tangente}$$



Beschleunigung

Beschleunigung

$$a_{\text{av}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Newtonsche Axiome

Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine resultierende äußere Kraft auf ihn wirkt.

Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung

Zu jeder Aktion gibt es eine gleich große, jedoch umgekehrte Reaktion.

- Diese drei Gesetze bildeten die Grundlage der dynamischen Beschreibung der Welt vom 18. bis ins frühe 20. Jahrhundert. Sie werden oft auch als die drei Newtonschen Axiome bezeichnet.

- Die Newtonsche Mechanik beschreibt erfolgreich die Bewegung von Objekten der Alltagswelt.

- Sie versagt erst in der Beschreibung von Vorgängen auf atomarem und subatomarem Niveau oder auf der Skala riesiger Massen und Entfernungen. Dann kommen allgemeinere Theorien wie Quantenmechanik oder Relativitätstheorie ins Spiel.

- An Hand des Newtonschen Axioms wollen wir versuchen, eine mathematische Formulierung dieses Gesetztes - und damit allgemein gültige Regeln - aufzustellen
- Wir kommen damit auf den Begriff „physikalische Größe" und „physikalische Einheit"

Physikalische Größe = **Zalenwert** * **Einheit**

Physikalische Größe = Zalenwert * Einheit

Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

[kg] [m/s²]

[Geschw/s= m/s²]

Physikalische Größe = Zalenwert * Einheit

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = m \cdot (a_x, a_y, a_z)$$

Basis linear unabhängiger Koordinaten

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = m \cdot (a_x, a_y, a_z)$$

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = \boldsymbol{m \cdot \frac{d^2 s_x}{dt^2} = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}} = F_x$$

$$m \cdot \frac{dv_y}{dt} = m \cdot \frac{d^2 s_y}{dt^2} = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y$$

$$m \cdot \frac{dv_z}{dt} = m \cdot \frac{d^2 s_z}{dt^2} = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z$$

Kräfte

Newton erkannte, dass die Ursache für Änderungen des Bewegungszustandes eines Körpers Wechselwirkungen dieses Körpers mit seiner Umgebung sein müssen.

Die Wechselwirkungen können langreichweitig sein, wie z. B. die Gravitationswechselwirkung zwischen Sonne und Erde, oder kurzreichweitig, wie z. B. zwischen zwei stoßenden Billardkugeln, oder über noch kürzere Entfernung wirkend, wie z. B. die starke Wechselwirkung, die die Protonen und Neutronen im Atomkern zusammenhält.

Man beschreibt alle

das Konzept der Kräfte.

Wenn ein Körper seinen Bewegungszustand ändert, so sagen wir, dass Kräfte an ihm angreifen. Stoßen z. B. zwei Kugeln zusammen, so sagen wir: Jede der beiden Kugeln hat beim Stoß eine Kraft auf die andere ausgeübt, so dass sich der Bewegungszustand jeder Kugel geändert hat.

diese Wechselwirkungen durch

Einen Körper, der überhaupt keine Wechselwirkung mit seiner Umgebung erfährt oder für den die Vektorsumme aller Kräfte null ist, nennen wir frei.

Ein freies Teilchen ändert seinen Bewegungszustand nicht.

Streng genommen gibt es natürlich in Wirklichkeit keine Körper, die überhaupt keine Wechselwirkung mit ihrer Umgebung haben (sie wären dann ja auch nicht beobachtbar).

Eine Kraft ist nur durch Reaktion,

die sie hervorruft, feststellbar

Die Bewegungsgleichung spielt eine
Zentrale Rolle in der Physik.
Ein Körper, der Kräften ausgesetzt
ist, wird dadurch beschrieben.

Mechanik, Atomphysik, Elektrodynamik etc.

$$m \cdot \frac{d \ldots}{d \ldots} = F_x$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot x''(t) = F_x(t)$$

Differentialgleichung

Bewegungsgleichung

$$m \cdot \boxed{x''(t)} = \boxed{F_x(t)}$$

Gesuchte Funktion x(t)

$$x''(t) = \frac{F_x(t)}{m} \rightarrow v_x(t) = \int \frac{F_x(t)}{m}\,dt + v_{x0}$$

$$x(t) = \int v_x(t)\,dt = \int\int \frac{F_x(t)}{m}\,dt\,dt + x_0$$

$$v(t) = \int \frac{F_x(t)}{m} dt + v_0$$

Bestimmt „Komplexität“ der Lösung

$$m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k \cdot x(t) = 0$$

Ansatz: $x(t) = A \cos\omega t + B \sin\omega t$

$$x'(t) = -A\omega \sin\omega t + B\omega \cos\omega t$$

$$x''(t) = -A\omega^2 \cos\omega t - B\omega^2 \sin\omega t$$

$$\rightarrow$$

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$m \cdot x''\boxed{(t)} = F_x\boxed{(t)}$$

•Transformieren in 2 Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m}\boxed{F_x}$$

•Numerische Integration

–Differential durch Differenzen ersetzt

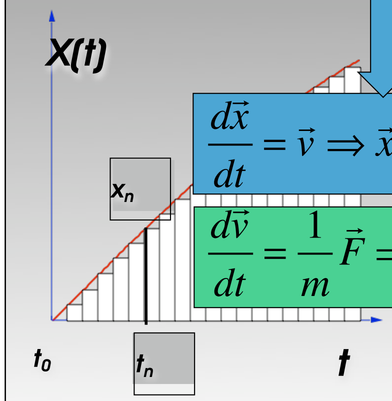
Forward Euler method

•1. Diskretisierung der Zeitachse

$$t_n = t_0 + n\Delta t \qquad \vec{x}_n = \vec{x}(t_n) \qquad \vec{v}_n = \vec{v}(t_n) \qquad \vec{a}_n = \vec{F}(\vec{x}, t_n)/m$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow \vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n = \vec{v}_n \Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\vec{F} \Rightarrow \vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n = \vec{a}_n \Delta t + O(\Delta t^2)$$



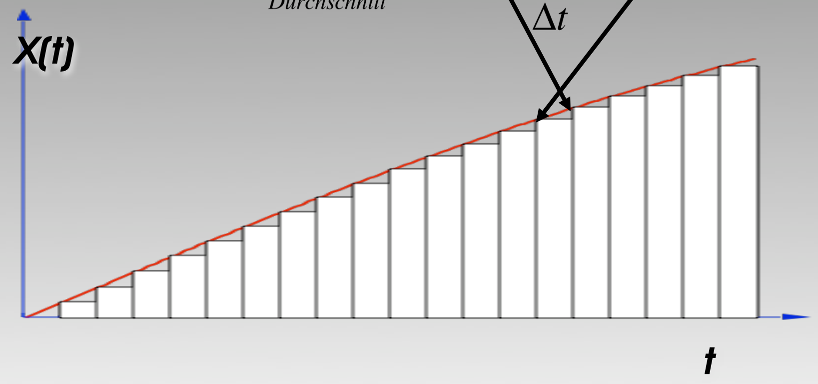
•3. Umordnen um "forward-Euler integrator" zu erhalten

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \vec{v}_n \Delta t$$
$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{a}_n \Delta t$$

•Problem: Insatbil für periodische Lösungen

Geschwindigkeit, Beschleunigung

$$v_{Durchschnitt} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$



Gravitation

- 1665 -1666 Isaac Newton
- Die Kraft, die den Apfel vom Baum fallen lässt, ist die gleiche, die den Mond um die Erde und die Erde um die Sonne zwingt, d. h.: Beide Fälle sind Spezialfälle eines allgemeinen Kraftgesetzes, nach dem alle Massen einander anziehen.

$$F = f(m_1, m_2, r\ldots\ldots)$$

- ➠ Aus dem Reaktionsprinzip folgt gleichzeitig, dass es sich um eine beiderseitige Anziehung handeln muss: Die Erde wird vom Apfel mit der gleichen Kraft angezogen wie umgekehrt
  - ➠ m_1 und m_2 müssen also in symmetrischer Weise in die Funktion f eingehen
- Folgende Beobachtungen legen die Form des Gesetzes näher fest:
- Auf der Erdoberfläche fallen alle Körper gleich schnell, abgesehen von denen, die so leicht sind, dass der Luftwiderstand eine wesentliche Rolle spielt. Die Fallbeschleunigung ist also unabhängig von der Masse m_2 des fallenden Körpers.

- Die zur Erklärung dieser Beschleunigung zu postulierende Kraft muss also proportional m sein.
- Aus dem Reaktionsprinzip folgt dann, dass F auch proportional zu m_1 sein muss.

Postulat: $$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

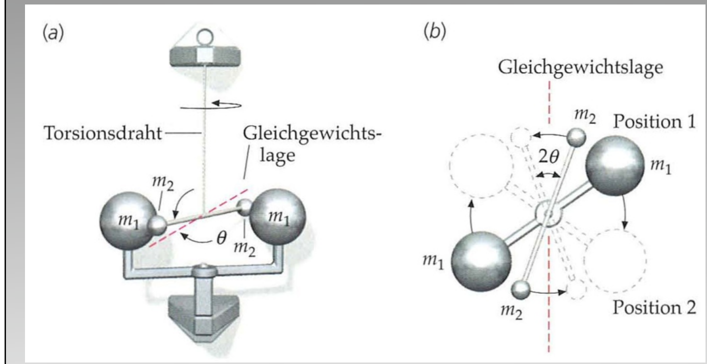
Cavendish, Bestimmung von G

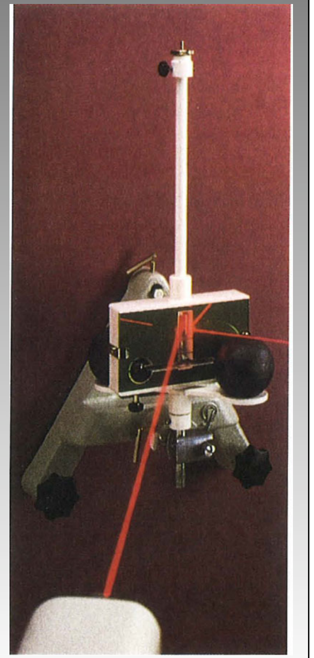
$$G = 6{,}67\ 10^{-11}\, Nm^2 / kg^2$$

$$\vec{F}_2^{(1)} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \widehat{r}_{12} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$$F = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

$$\Gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$$


(a)
Torsionsdraht
Gleichgewichts-
lage
m_2
m_1
θ
m_2
m_1
(b)
Gleichgewichtslage
m_2
Position 1
2θ
m_1
m_1
m_2
Position 2



Kraftfeld, Feldstärke, Gravitationsfeld

$$\vec{F} = -\boxed{m_p}\,\frac{G\,m_Q}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad -\frac{G\,m_Q\vec{r}}{r^3}$$

Probemasse

Eigenschaft d nabhängig von der speziellen
"Probemasse"

Man nennt diese Größe die Feldstärke des Gravitationsfeldes

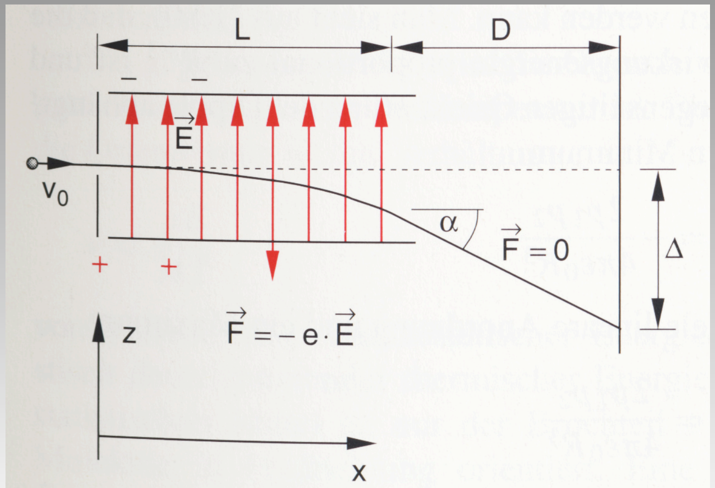
Coulombkraft

•In der Natur existieren „Ladungen" die aufeinender eine Kraft ausüben:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

- Die Ladungen existieren in zwei Formen: Positive und Negative
  - ➢ Gleichartige stoßen einender ab, entgegengesetzte ziehen einander an
- Die ganze Materie ist eine Mischung aus positiven Protonen und negativen Elektronen
  - ➢ Diese kommen vollkommen ausgewogen vor.
- In abgeschlossenen System bleibt die Ladung erhalten

Ablenkung im elektrischen Feld



$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2 / kg^2$$

Kraft $\propto \dfrac{1}{\boldsymbol{r}^2}$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Die Coulombkraft ist typisch 10^{36}fach stärker als die Gravitationskraft (Proton-Proton WW)

ε_0....Dielektrizitätskonstante

$$\mathbf{k1} = \frac{\mathbf{(1.67262158 \wedge -27\ Kilogram)^2\ 6.673 \wedge -11\ (Meter^2\ Newton)}}{\mathbf{Kilogram^2}}$$

$$\mathbf{k2} = \frac{\mathbf{(1.602176462 \wedge -19\ Coulomb)^2}}{\frac{4\pi\, 8.854187817\wedge -12\ (\text{Ampere Second})}{\text{Meter Volt}}}$$

$$\mathrm{e} = 1{,}602177 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$\vec{F}_2^{(1)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\widehat{r}_{12} = -\Gamma\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

$$F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

Elektrisches Feld

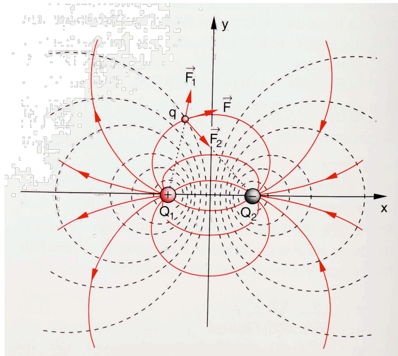
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

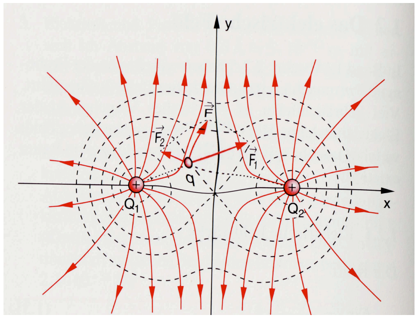
$$\vec{F} = q\vec{E}$$

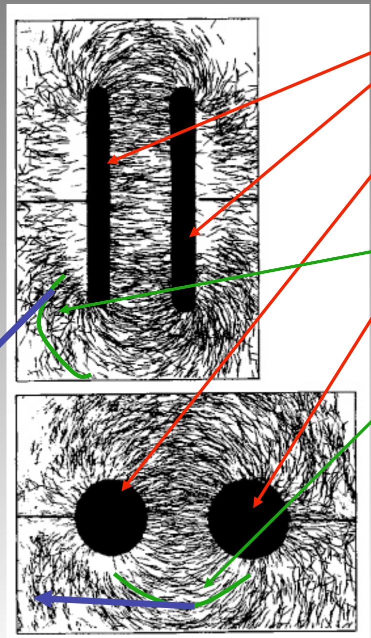
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r^2}\hat{r}$$

Das Gesamtfeld einer Anordnung von Punktladungen ergibt sich aus der Überlagerung der Felder der einzelnen Ladungen

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung geht die Summe in das Integral über.





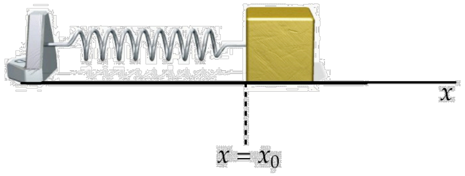


Ladungsverteilungen

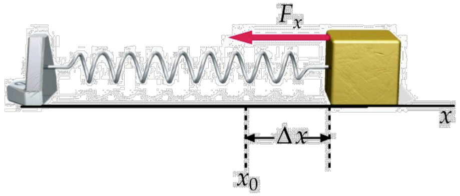
Feldlinien

Dichte gibt Stärke des Feldes

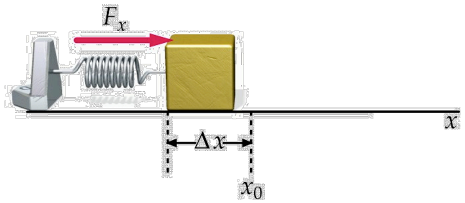
Tangente Richtung des El. Feldes

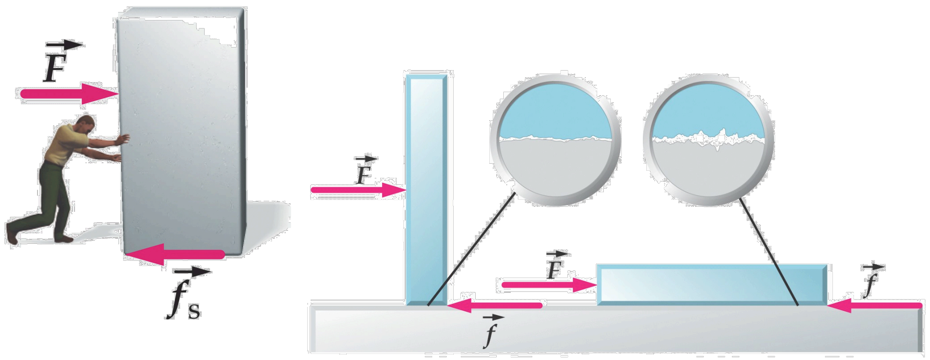


$F_x = -k\,\Delta x$ is negative because Δx is positive.



$F_x = -k\,\Delta x$ is positive because Δx is negative.



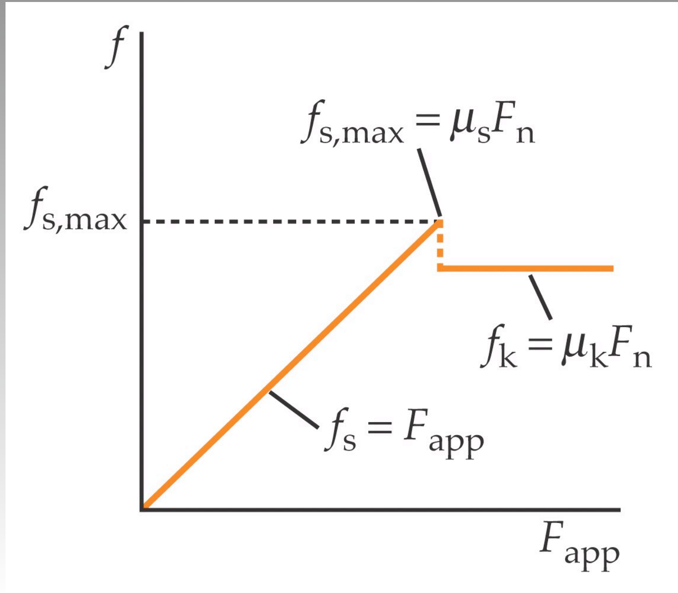


$$f_k = \mu_k F_n$$

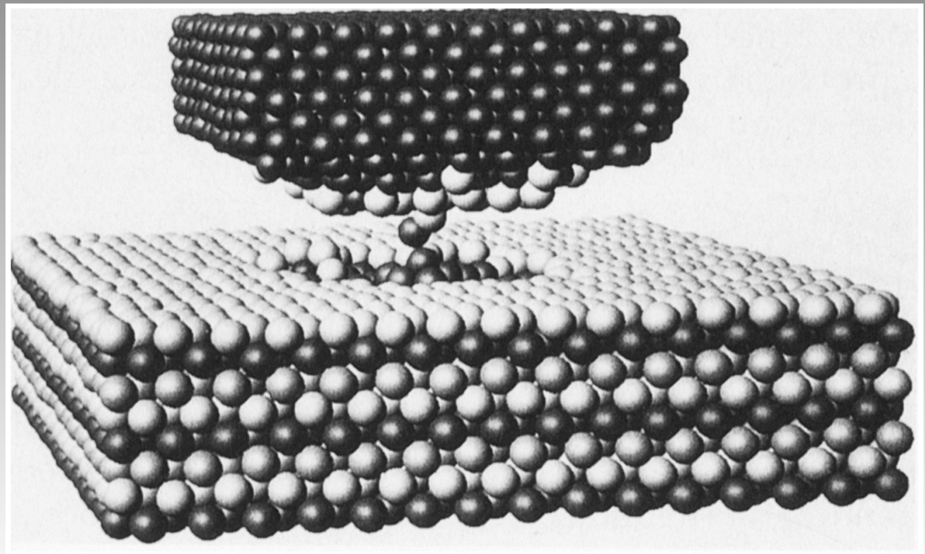
Haftreibung
Gleitreibung
Rollreibung

Definition des Reibungskoeffizienten

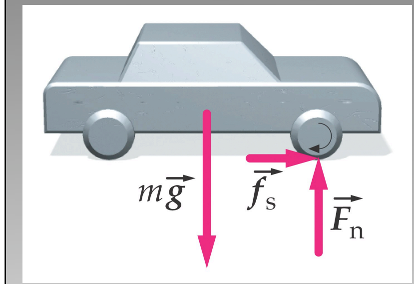
Haftreibung - Gleitreibung

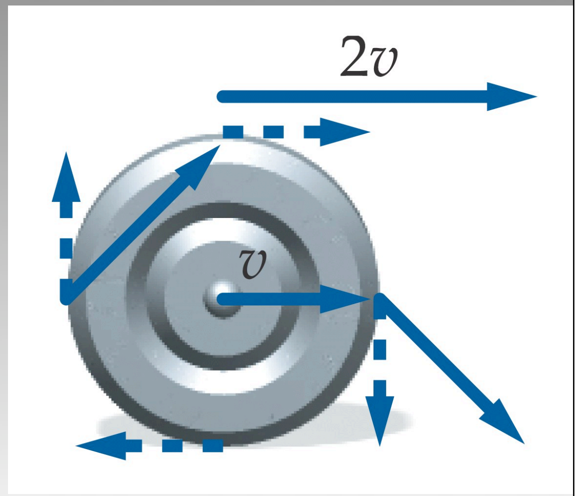


Physikalische Ursache der Reibung



ABS





5. Substituting these results in the equation for Δx in step 2 gives the stopping distance:

$$\Delta x = -\frac{v_0^2}{2a}$$

$$\boxed{= -\frac{(30\ \text{m/s})^2}{2(-4.90\ \text{m/s}^2)} = 91.8\ \text{m}}$$

(*b*)1. When the wheels lock, the force exerted by the road on the car is that of kinetic friction. Using reasoning similar to that in part (*a*), we obtain for the acceleration:

$$a_x = -\mu_k g = -(0.3)(9.81\ \text{m/s}^2)$$
$$= -2.94\ \text{m/s}^2$$

2. The stopping distance is then:

$$\boxed{\Delta x = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{(30\ \text{m/s})^2}{2(-2.94\ \text{m/s}^2)} = 153\text{m}}$$

normal force F_n exerted by the road balances the weight mg of the car. Substitute mg for F_n and solve for a_x:

$$a_x = \frac{-\mu_s F_n}{m} = \frac{-\mu_s mg}{m} = -\mu_s g$$
$$= -(0.5)(9.81\ \text{m/s}^2) = -4.90\ \text{m/s}^2$$