Beispiel 117 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 11, 22.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man zeige: $u = \ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ genügt der Differentialgleichung $u_{xx}+u_{yy}=0$.

2 Lösung des Beispiels

Wir berechnen zunächst die ersten beiden partiellen Ableitungen nach x:

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \cdot 2(x-a) = \frac{(x-a)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$u_{xx} = \frac{(x-a)^2+(y-b)^2-(x-a)\cdot 2(x-a)}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2} = \frac{-(x-a)^2+(y-b)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}$$

Nun berechnen wir die ersten beiden partiellen Ableitungen nach y:

$$u_y = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \cdot 2(y-b) = \frac{(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

$$u_{yy} = \frac{(a-x)^2+(y-b)^2-2(y-b)\cdot 2(x-a)}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2} = \frac{-(y-b)^2+(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2}$$

Berechnung von $u_{xx}+u_{yy}$:

$$u_{xx}+u_{yy} = \frac{-(x-a)^2+(y-b)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2} + \frac{-(y-b)^2+(x-a)^2}{((x-a)^2+(y-b)^2)^2} = 0$$

Was zu zeigen war.