Beispiel 21 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 6, 03.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die partiellen Ableitungen

$$f(x,y,z) = \frac{y+\sqrt{xz}}{1+\sin^2(xyz)}$$

2 Lösung des Beispiels

Wir erhalten die Ableitungen mit Hilfe der Quotientenregel, und zu diesem Zweck führen wir einige vorbereitende Subsitutionen durch:

$$f(x,y,z) = \frac{\overbrace{y+\sqrt{xz}}^{u}}{\underbrace{1+\sin^2(xyz)}_{v}} = \frac{u}{v}$$

Nun betrachten wir $u = y+\sqrt{xz} = y + x^{1/2}\cdot z^{1/2}$ und führen die Ableitungen u_x, u_y, u_z durch:

$$u_x = 0 + \frac{1}{2}x^{-1/2}\cdot z^{1/2} = \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{x}}$$
$$u_y = 1 + 0$$
$$u_z = 0 + \frac{1}{2}z^{-1/2}\cdot x^{1/2} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{z}}$$

Man beachte: u_z kann sehr einfach aus u_x durch die Vertauschung der Variablen gewonnen werden, da in u die Variablen x und z vertauscht werden können!

Wir berechnen nun die Ableitungen von $v = 1+\sin^2(xyz) = 1+\sin(xyz)\cdot\sin(xyz)$. Dazu benützen wir die Ableitungsregel für die Mutltiplikation, die besagt: $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$:

$$v_x = 2\cdot \underbrace{\cos(xyz)}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{(yz)}_{\text{innere Ableitung}} \cdot\sin(xyz)$$

Die weiteren Ableitungen v_y und v_z erhält man ganz einfach durch die Vertauschung der entsprechenden Variablen in v_x:

$$v_y = 2\cdot\cos(xyz)\cdot(xz)\cdot\sin(xyz)$$
$$v_z = 2\cdot\cos(xyz)\cdot(xy)\cdot\sin(xyz)$$

Schließlich führen wir die abschließenden Ableitungen durch:

$$f_x = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{x}} \cdot (1 + \sin^2(xyz)) - (2 \cdot \cos(xyz) \cdot (yz) \cdot \sin(xyz)) \cdot (y + \sqrt{xz})}{(1 + \sin^2(xyz))^2}$$

$$f_y = \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = \frac{(1 + \sin^2(xyz)) - (y + \sqrt{xz}) \cdot 2 \cdot \cos(xyz) \cdot (xz) \cdot \sin(xyz)}{(1 + \sin^2(xyz))^2}$$

$$f_z = \frac{u_z v - v_z u}{v^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{z}} \cdot (1 + \sin^2(xyz)) - (2 \cdot \cos(xyz) \cdot (xy) \cdot \sin(xyz)) \cdot (y + \sqrt{xz})}{(1 + \sin^2(xyz))^2}$$