Beispiel 45 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 7, 11.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die extremalen Werte der Funktion $f(x, y) = x \cdot y$ auf der Einheitskreislinie.

2 Theoretische Grundlagen: Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Die Extremwerte einer Funktion $z = f(x, y)$, deren unabhängige Variablen x und y einer Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe des Lagranegschen Multiplikatorverfahrens wie folgt bestimmen:

1. Aus der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ und deren Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$ wird zunächst die Hilfsfunktion

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \phi(x, y)$$

   gebildet. Der (noch unbekannte) Faktor λ heißt Langrangescher Multiplikationsfaktor.

2. Dann werden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich Null gesetzt:

$$\begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda \cdot \phi_x(x, y) = 0 \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda \cdot \phi_y(x, y) = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

   Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten Extremwerte sowier der Lagrangesche Multiplikationsfaktor λ berechnen.

3 Lösung des Beispiels

Zunächst legen wir fest:

- Die **Funktion mit den unabhängigen Variablen** ist $f(x, y) = x \cdot y$.
- Die **Nebenbedingung** ist die Einheitskreislinie, d.h. ein Kreis mit dem Radius 1, d.h. $x^2 + y^2 = 1$ - korrekt ausgeschrieben zur Verwendung des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens: $\phi(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Wir bilden nun die **Hilfsfunktion** $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)$:

$$F(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Von dieser Hilfsunktion bilden wir die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

- F_x : $\quad y + \lambda \cdot (2 \cdot x) = 0$
- F_y : $\quad x + \lambda \cdot (2 \cdot y) = 0$
- F_λ : $\quad x^2 + y^2 = 1$

Wir sehen anhand F_x und F_y sofort, dass $x = y$ gelten muss. Nun substituieren wir in F_λ und erhalten $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Wenn wir nun den Einheitskreis im Koordinatensytem zeichnen (Mittelpunkt ist Nullpunkt), so erhalten wir als Lösung die Punkte
$(\frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}|\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}|-\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}|-\frac{1}{\sqrt{2}})$.