Übungsblatt 11 für Mathematik 3 für InformatikerInnen

71.) Man löse die folgende PDG für $u(x,y)$ durch Zurückführen auf eine gewöhnliche DGL:

$$u_{xy} + u_x + x + y = 1, \quad u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0.$$

72.) Man löse die folgende PDG für $u(x,y)$ durch Zurückführen auf eine gewöhnliche DGL:

$$u_{xy} + yu_x = 0, \quad u(x,x) = x^2, \quad u_x(x,x) = u_y(x,x).$$

73.) Man bestimme die allgemeine Lösung für $u(x,y)$ der PDG

$$9u_{xx} - \frac{1}{4}u_{yy} = \sin x.$$

Bemerkung: Siehe Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

74.) Man bestimme die allgemeine Lösung für $u(x,y)$ der PDG

$$12u_x + 4u_y = x.$$

Bemerkung: Siehe Lösung von PDG 1. Ordnung mit konst. Koeffizienten.

75.) Man betrachte die PDG 1. Ordnung mit konst. Koeffizienten in 3 Variablen:

$$au_x + bu_y + cu_z = f(x,y,z).$$

Man weise nach, daß durch die Substitutionen

$$\xi = x, \quad \eta = bx - ay, \quad \zeta = cx - az$$

die Reduktion auf folgende DGL für $U(\xi,\eta,\zeta) := u(x,y,z)$ gelingt:

$$aU_\xi = f\Big(\xi, \frac{b\xi + \eta}{a}, \frac{c\xi + \zeta}{a}\Big).$$

Damit bestimme man die allgemeine Lösung der PDG

$$2u_x + 3u_y + 4u_z = e^{x+y+z}.$$

76.) Durch die Substitution $u(x,y) = v(x,y)e^{\lambda x+\mu y}$ und geeignete Wahl von λ, μ eliminiere man die ersten Ableitungen (u_x und u_y) aus der PDG

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0.$$

Bemerkung: Selbstverständlich brauchen Sie die entstehende PDG nicht zu lösen, sondern nur anzugeben.

77.) Man löse mittels Laplace-Transformation von $u(x,t)$ bezüglich t folgende PDG:

$$xu_x + u_t = xt, \quad u(0,t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \quad u(x,0) = 0 \text{ für } x \geq 0.$$

Bemerkung: Laplace-Transformation bezüglich t liefert für $U(x,s) := \mathcal{L}\{u(x,t)\}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$xU_x + sU = \frac{x}{s^2}.$$

Lösen dieser DGL und Berücksichtigen der Anfangswerte liefert nach der Rücktransformation die gesuchte Lösung.