

1. Übungsblatt

Kreuzen Sie **bis zwei Stunden vor Übungsbeginn** auf TUWEL (<https://tuwel.tuwien.ac.at>) jene Aufgaben, die Sie gerechnet haben und in der Übung präsentieren können.

Mit * gekennzeichnete Beispiele **dürfen** Sie mit MATLAB bearbeiten, jene mit ! **müssen** mit MATLAB gelöst werden. Bringen Sie Ihren Code auf USB-Stick oder eigenem Rechner (mit VGA-Anschluss) mit.

Bei Unklarheiten wenden Sie sich bitte gerne an stefan.wurm@tuwien.ac.at oder posten Sie in das TUWEL-Forum.

Aufgabe 1:

Für eine differenzierbare Funktion f ist die (relative) Konditionszahl

$$\kappa_{\text{rel}}(t) = \left| \frac{tf'(t)}{f(t)} \right|.$$

a) Bestimmen Sie $\kappa_{\text{rel}}(t)$ für $f(t) = \arccos(t)$.

!b) Plotten Sie $\kappa_{\text{rel}}(t)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Geben Sie eine Interpretation dafür an.

Aufgabe 2:

In TUWEL finden Sie eine Datendatei `cosinusdata.csv`, welche die Aufzeichnung eines Cosinussignals $x(t)$ (2. Spalte) an mehreren Stellen im Intervall $t \in [0, \pi]$ (1. Spalte) enthält. Diese Aufzeichnung ist mit Datenfehlern behaftet.

!a)

Plotten Sie den absoluten und den relativen Datenfehler und überzeugen Sie sich davon, dass diese beschränkt und viel kleiner als 1 sind. Die Fehler sollen dabei logarithmisch skaliert werden.

!b)

„Wenn der Arcuscosinus ($\arccos$) auf das Cosinussignal angewendet wird, sollten sich als Resultat die Abtastpunkte auf $[0, \pi]$ ergeben.“

Testen Sie diese Aussage, indem Sie den absoluten und den relativen Fehler von $\arccos(x)$ zu t plotten. Die Fehler sollen dabei wieder logarithmisch skaliert werden.

Erklären Sie dieses Ergebnis (vgl. Aufgabe 1b).

Hinweise: Die Datei kann mithilfe des Befehls `csvread` eingelesen werden.

Beim Anwenden des $\arccos$ können kleine Imaginärteile entstehen, vernachlässigen Sie diese durch Benutzung der Funktion `real`.

Aufgabe 3:

(*) *Konditionsanalyse.* Berechnen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_x = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|$ von

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

und versuchen Sie eine Abschätzung für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ anzugeben (entweder durch analytische Überlegungen oder Berechnen von Werten in MATLAB...). Gesucht ist also eine von x unabhängige (möglichst kleine) Konstante C , so dass $\kappa_x < C$ für alle $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt.

Aufgabe 4:

(!) Betrachten Sie das Polynom

$$p(x) = (1 - x)^6.$$

Berechnen Sie zunächst die relative Konditionszahl $\kappa_x = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|$ und werten Sie diese bei $x = 0.9$ aus. Welche Fehlerverstärkung erwarten Sie somit bei einer stabilen Auswertungsvariante an der Stelle $x = 0.9$?

Berechnen Sie anschließend $p(0.9)$ in MATLAB durch direkte Auswertung (also $y_1 = (1 - 0.9)^6$), durch Auswertung des expandierten Polynoms $y_2 = 1 - 6 \cdot 0.9 + 15 \cdot 0.9^2 - 20 \cdot 0.9^3 + 15 \cdot 0.9^4 - 6 \cdot 0.9^5 + 0.9^6$ und durch Anwenden des Horner-Schemas $y_3 = 1 + 0.9 \cdot (-6 + 0.9 \cdot (15 + 0.9 \cdot (-20 + 0.9 \cdot (15 + 0.9 \cdot (-6 + 0.9))))$).

Vergleichen Sie die relativen Fehler $\left| \frac{10^{-6} - y_i}{10^{-6}} \right| = |1 - 10^6 y_i|$ und versuchen Sie das Ergebnis zu erklären.

Aufgabe 5:

(!) *Numerische Differentiation.* Betrachten Sie die Konstruktion eines Verfahren (zur numerischen Differentiation) der Ordnung 4 aus der sogenannten *asymptotischen Entwicklung* des zentralen Differenzenquotienten. Sei $f(x) = e^x$. Wir wollen die Ableitung von f an der Stelle $x = 1$ auf verschiedene Arten approximieren. Berechnen Sie

$$D(h) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h}$$

und betrachten Sie weiters

$$D(h) - f'(1) = D(h) - e^1 = \frac{h^2}{6} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4), \quad \text{siehe Skriptum}$$

$$D\left(\frac{h}{2}\right) - f'(1) = D\left(\frac{h}{2}\right) - e^1 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{1}{6} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4) = \frac{h^2}{24} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{3} \left(D(h) - D\left(\frac{h}{2}\right) \right) = \frac{h^2}{24} f'''(1) + \mathcal{O}(h^4) = \left(D\left(\frac{h}{2}\right) - f'(1) \right) + \mathcal{O}(h^4).$$

Der linke Ausdruck ist also eine Schätzung des Verfahrensfehlers $(D(\frac{h}{2}) - f'(1))$ auf $\mathcal{O}(h^4)$ Niveau. Aus dieser Abschätzung folgt direkt

$$f'(1) + \mathcal{O}(h^4) = \frac{4}{3} D\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} D(h)$$

also eine Approximation der Ordnung 4 für $f'(x)$.

Erstellen Sie eine Tabelle der Form

$D(h)$	$D(h) - e^1$	$\frac{h^2}{6} e^1$	$\frac{D(h) - D(\frac{h}{2})}{3}$	$\frac{4}{3} D\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3} D(h) - e^1$
--------	--------------	---------------------	-----------------------------------	--

für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 2 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-9}$ und interpretieren Sie die Ergebnisse. Achten Sie vor allem auf die Größenordnungen von h .

Aufgabe 6:

Auslöschung Berechnen Sie für die beiden reellen Zahlen $r = \frac{3}{5}$ und $s = \frac{4}{7}$ mit normierten, gerundeten Repräsentationen in Binärarithmetik und mit fünfstelliger Mantisse die Differenz $r - s$ und den relativen Fehler. Führen Sie die Rechnung auch mit dreistelliger Mantisse in Binärarithmetik aus. Analysieren Sie die Subtraktion für allgemeine Zahlen a und b , die mit den kleinen relativen Fehlern ε_a und ε_b behaftet sind, mit Hilfe der Rundungsfehleranalyse.

Hinweis: Berechnen Sie die Binärdarstellung der beiden Zahlen indem Sie in der Binärarithmetik dividieren.

Aufgabe 7:

Schätzen Sie den relativen Rundungsfehler bei der Berechnung von

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

durch die Analyse der Fehlerfortpflanzung ab und vergleichen Sie mit dem mathematisch äquivalenten Ausdruck $z = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Betrachten Sie verschiedene Werte von x , also etwa $x \approx 0$, x sehr groß....

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 2.08 \\ 5 & 6\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

und untersuchen Sie die Abhängigkeit der Lösung von der Genauigkeit bzw. Zahl der Dezimalstellen zur Darstellung der reellen Zahl $\sqrt{2}$.