Mathematik III

Vorlesung 4, 27.10.2006

Markus Nemetz

Oktober 2006

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
27.10.2006
02.11.2006 (Ergänzungen)
03.11.2006 (Ergänzungen nach Anmerkungen v. Prof. Panholzer)

2 Potenzreihenansatz zur Lösung von Differentialgleichungen

Es liegt eine Differentialgleichung in folgender Form vor:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)} = 0,$$

und wir nehmen an, dass die Lösung $x_0 = x$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d.h.:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

Die Bestimmung der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kann auf zwei Arten erfolgen:

2.1 Fortgesetzte Differentiation

Ausgangspunkt ist das AWP

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Mit der Taylor-Formel gilt:

$$a_m = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!},$$

Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ bei $x = x_0$ (Kettenregel) bestimmt man nacheinander die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= y(x_0) = y_0 \\ a_1 &= y'(x_0) = f(x_0, y_0) \\ 2!a_2 &= y''(x_0) = f_x(y_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) \\ 3!a_3 &= y'''(x_0) = [f_{xx} + f_{xy}y' + (f_{yx} + f_{yy})y' + f_y y'']_{x_0,y_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

2.2 Koeffizientenvergleich

1. Ableitungen bilden:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2}$$

2. Potenzen von $y(x)$ ($(y(x))^2, (y(x))^3, \dots$) nach der Cauchy-Produktformel entwickeln:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot (x - x_0)^n$$

$$h(x) := f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{h_n}_{h_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot g_{n-k}} \cdot (x - x_0)^n$$

3. Reihenentwicklung in Differentialgleichung einsetzen und nach Potenzen von $(x - x_0)^n$ ordnen. Dann die Koeffizienten von $(x - x_0)$ vergleichen, d.h. $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ setzen.

$\Rightarrow$ Gleichungssystem (unendlich dimensional) für $a_0, a_1, \ldots$.

Die Reihenentwicklung wird unter Annahme einer guten Approximation abgebrochen.

Zum Beispiel die **Laguerre-Differentialgleichung**:

$$x \cdot y'' + (1-x) \cdot y' + m \cdot y = 0, \qquad m \in \mathbb{R}$$

Potenzreihenentwicklung um $x_=0$ mit dem Ansatz:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$\sum_{n=0(\mathbf{1})}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-1} + (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot a_{n+1} \cdot x^n + (1-x) \cdot \sum_{n=0(\mathbf{1})}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n + m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot a_{n+1} \cdot x^n + (1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n + m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) \cdot n \cdot a_{n+1} + (n+1) \cdot a_{n+1} + (m-n) \cdot a_n) \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)^2 \cdot a_{n+1} + (m-n) \cdot a_n) \cdot x^n = 0$$

Koeffizientenvergleich für $(n+1)^2 \cdot a_{n+1} + (m-n) \cdot a_n$ für alle $n \geq 0$ durchführen und danach versuchen, ein Bildungsgesetz zu erkennen:

1. $n = 1$:

$$a_1 + m \cdot a_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = -m \cdot a_0$$

   a_0 frei wählbar

2. $n = 1$

$$2^2 \cdot a^2 + (m-1) \cdot a_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = -\frac{m-1}{2} \cdot \frac{a_1}{2} = (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{(m-1) \cdot m}{2} \cdot \frac{a_0}{2}$$

3. $n = 2$

$$3^2 \cdot a_3 + (m-2) \cdot a_2 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$a_3 = -\frac{m-2}{3^2} \cdot a_2 = (-1)^3 \underbrace{\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}_{\frac{m!}{3!(m-3)!} = \binom{m}{3}} \cdot \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Daraus ergibt sich das **Bildungsgesetz**:

$$a_n = (-1)^n \cdot \binom{m}{n} \cdot \frac{a_0}{n!}$$

Beweis müsste mittels vollständiger Induktion erfolgen. Die Funktion allgemein als Potenzreihe ausgedrückt (ist auch die Lösung der Daguerre-Differentialgleichung) lautet nun:

$$\mathbf{y(x) = a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n} \cdot \binom{m}{n} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Falls $m \in \mathbb{N}$ bricht die Reihe bei $n > m$ ab - es bleibt das Laguerre-Polynom übrig.

3 Modifizierter Potenzreihenansatz für lineare DGL 2. Ordnung

Wenn der bisher erwähnte Ansatz nicht zum Ziel führt wird der modifizierte Potenzreihenansatz verwendet. Die DGL muss in folgender Form vorliegen:

$$p(x) \cdot y'' + q(x) \cdot y' + r(x) \cdot y = 0$$

$\frac{q(x)}{p(x)}$ und $\frac{r(x)}{p(x)}$ müssen um $x = x_0$ in eine Taylorreihe entwickelbar sein.

Das Problem sind dabei die Nullstellen von $p(x)$. Wenn $p(x_0) = 0$, so wird x_0 ein **singulärer Punkt** genannt.

Eine Nullstelle x_0 von $p(x)$ heißt **reguläre Singularität** der DGL, falls die Funktionen $p_0(x), p_1(x), \ldots$ mit $p(x) = (x-x_0)^2 \cdot p_0(x), y(x) = (x - x_0) \cdot p_1(x), r = p_2(x)$ existieren, so dass $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ um x_0 in eine Taylorreihe entwickelbar sind und zusätzlich $p_0(x_0) \neq 0$ gilt.

Falls x_0 ist reguläre Singularität der DGL

$$(x-x_0)^2 \cdot p_0(x) \cdot y'' + (x-x_0) \cdot p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0$$

und r eine Nullstelle der Indexgleichung

$$r \cdot (r-1) \cdot p_0(x_0) + r \cdot p_1(x_0) + p_2(x_0) = 0$$

ist, dann gilt die Potenzreihendarstellung:

$$y(x) = (x-x_0)^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$$

Beispiel: **Bessel-Differentialgleichungen**, welche die folgende Form haben:

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 - \alpha^2) \cdot y = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Wenn $x = 0$, liegt reguläre Singularität vor - Lösung mittels Potenzreihenansatz um $x_0 = 0$ möglich. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle: (a) $\alpha = m \in \mathbb{N}$ und (b) $\alpha = m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

- $\alpha = m \in \mathbb{N}$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 + m^2) \cdot y = 0$$

$$p_0(x_0) = 1, \qquad p_1(x_0) = 1, \qquad p_2(x_0) = x^2 - m^2$$

$$\text{Indexgleichung: } \; r \cdot (r-1) \cdot 1 + r \cdot 1 - m^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad r^2 - m^2 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad r_{1,2} = \pm m$$

  - $r_1 = +m$

$$\text{Ansatz: } \; y(x) = x^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+m}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+m) \cdot (n+m-1) \cdot a_n \cdot \mathbf{x^{n+m}} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+m) \cdot a_n \cdot \mathbf{x^{n+m}} +$$

$$\underbrace{+ (x^2 - m^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+m}}_{=\blacksquare} = 0$$

$$\underbrace{\blacksquare \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+m+2} - \sum_{n=0}^{\infty} m^2 \cdot a_n \cdot x^m}_{=\Diamond}$$

$$\Diamond \sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty} a_{n-2} \cdot \mathbf{x^{n+m}} - \sum_{n=0}^{\infty} m^2 \cdot \mathbf{x^{n+m}}$$

Durchführung des Koeffizientenvergleichs:

* $n = 0$

$$m \cdot (m-1) \cdot a_0 + m \cdot a_0 - m^2 \cdot a_0 = 0$$

Da $0 \cdot a_0 = 0$ gilt ist a_0 frei wählbar!

* $n = 1$

$$(m+1) \cdot m \cdot a_1 = (m+1) \cdot a_1 - m^2 \cdot a_1 = 0$$
$$2 \cdot (m+1) \cdot a_1 = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{m \in \mathbb{N}} \quad a_1 = 0$$

* $n \geq 2$

$$(m+n) \cdot (n+m-1) \cdot a_n = (m+n) \cdot a_n + a_{n-2} - m^2 \cdot a_n = 0$$
$$\mathbf{((n+m)^2 - m^2) \cdot a_n + a_{n-2} = 0}$$

Rekursion für die Bestimmung für $n \geq 2$ (Differenzengleichung).
Mittels Induktion ergibt sich für die ungeraden Koeffizienten immer 0. Betrachten nun die geraden Koeffizienten (a_{2n}):

$$((2 \cdot n + m)^2 - m^2) \cdot a_{2n} + a_{2 \cdot n - 2} = 0$$
$$\Rightarrow a_{2 \cdot n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n+m)^2 - m^2} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n+2m) \cdot 2n} =$$
$$= -\frac{a_{2n-2}}{4(n+m) \cdot n} = \underbrace{\ldots}_{\text{iterieren}} =$$
$$(-1)^n \cdot \frac{a_0 \cdot m!}{4^n \cdot n! \cdot (n+m)!}$$

Die folgende Funktion ist somit eine Lösung der Bessel-Differentialgleichung ($a_0 \in \mathbb{R}$):

$$\mathbf{y(x) = x^m \cdot a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{a_0 \cdot m!}{4^n \cdot n! \cdot (n+m)!} \cdot x^{2n}}$$

Frei wählbares a_0: Mit folgendem speziellen a_0 ergibt sich die **Bessel-Funktion 1. Art der Ordnung m**:

$$a_0 = \frac{1}{2^m \cdot m!}$$
$$\mathbf{J_m(x) = \frac{x^m}{2^m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{4^n \cdot n! \cdot (n+m)!}}$$

– $r_2 = -m$ Nicht in der VO behandelt, aber der Vollständigkeit halber erwähnt. Die zweite Lösung der Differentialgleichung in der Gestalt

$$Y_m(x) = c \cdot J_m(x) \cdot \ln x + \frac{1}{x_m} \cdot P_2(x)$$

($c \in \mathbb{R}$,P_2 ist Potenzreihe um x_0 (singuläre Stelle)) ist die **Bessel-Funktion 2. Art der Ordnung m**(J_m und Y_m bilden eine Lösungsbasis).

- $\alpha = m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

  Berechnung analog wie bei r_1, nur statt dessen bei letzter Umformung statt $m!$ die Gamma-Funktion $\Gamma(\alpha + 1)$.

  Der Vollständigkeit halber (nicht in VO behandelt) seien der Ansatz $a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$ (Gamma-Funktion ist eine höhere Funktion und als $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ definiert) mit der folgenden Lösung erwähnt:

$$y(x) = \frac{x^\alpha}{2^\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{4^n \cdot n! \cdot \Gamma(n + \alpha + 1)} \cdot x^{2n}$$

  Für weitere Details siehe Meyberg/Vachenauer, Höhere Mathematik 2, 2. Aufl., S. 88.

Ergänzungen aus der 5.VO. (03.11.2006):

- Die Inxexgleichung ist ein quadratisches Polynom mit zwei Lösungen r_1,r_2

  – Wenn $r_1 \neq r_2 \ \wedge \ r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ - modifizierten Potenzreihenansatz verwenden - ergibt zwei unabhängige Lösungen: ($P(x)$ ist Potenzreihe)

    1. $(x - x_0)^{r_1} \cdot P(x)$
    2. $(x - x_0)^{r_2} \cdot P(x)$

  – $r_1 = r_2 \ \wedge \ r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ - wähle das 'grössere' r ($r = \max(r_1, r_2)$) für den Lösungsansatz

$$(x - x_0)^r \cdot P(x)$$

  Liefert aber keine allgemeine Lösung (nur durch Variation der Konstanten erhältlich, s.5.VO)

4 Lineare DGL n-ter Ordnung

$$a_n(x) \cdot y^n(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{n-1}(x) + \cdots + a_1(x) \cdot y(x)' + a_0(x)y(x) = b(x)$$

($a_n(x) \neq 0, a_0(x), \ldots$ sind stetige Funktionen in einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$)

$b(x)$ ist die Störfunktion (inhomogener Anteil). Ist $b = 0$ liegt eine homogene DGL vor.

Zum Satz vom Lösungsraum homogener linearer DGL n-ter Ordnung: $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ seien Lösungen der homogenen DGL - dann folgt daraus, dass $\alpha \cdot \varphi_1(x) + \beta \cdot \varphi_2(x)$ auch eine Lösung ist.

Die Gesamtheit aller Lösungen bildet einen n-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet:

$$y_h = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) + \cdots + c_n \cdot \varphi_n(x)$$

Für alle Werte $((y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ und $x \in I$ gilt: Das AWP $y^n(x) + \cdots + a_0(x) \cdot y(x) = 0$ mit $y^{(n)}(x_0) = y_0^k$ hat immer eine eindeutige Lösung.

Die n Lösungen der DGL $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ bilden genau dann eine Basis des Lösungsraums (= Lösungsbasis, Fundamentalsystem), wenn die **Wronski-Determinante** $W(x) \neq 0$ für *ein* $x \in I$ ist:

$$W(x) = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(x) & \varphi_2^{n-1}(x) & \ldots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vollständige Lösung $y^{(n)}(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.