NUM-Prüfung 19.4.2023 (Lösungen)

1. (a) Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $x \in \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

i. Für welche Werte von x hat A nur reelle Eigenwerte (1 Punkt)?

Um die Eigenwerte zu bestimmen, subtrahieren wir λ von der Hauptdiagonale und berechnen die Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & x \\ x & 1-\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{(1-\lambda)^2 - x^2}_{a^2-b^2} = \underbrace{(1-\lambda+x)}_{(a+b)}\underbrace{(1-\lambda-x)}_{(a-b)} = ((1+x)-\lambda)((1-x)-\lambda)$$

Somit sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $1+x$ und $1-x$. Das sind die Eigenwerte. Weil x reell ist, sind auch $1+x$ und $1-x$ reell.

ii. Für welche Werte von x ist A eine normale Matrix (1 Punkt)?

Eine reelle Matrix A ist genau dann normal, wenn

$$A^T A = AA^T.$$

Weil A offensichtlich symmetrisch ($A^T = A$) ist, gilt

$$A^T A = AA = AA^T.$$

Dadurch ist A normal, egal welche reellen x man nimmt.

iii. Für welche Werte von x ist A positiv definit/negativ definit/weder positiv noch negativ definit (also indefinit) (3 Punkte)?

Wir verwenden für die Definitheit das Hauptminorenkriterium.

- Die Matrix ist genau dann positiv definit, wenn

$$\det(1) > 0 \text{ und } \det\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

Offensichtlich ist $\det(1) = 1 > 0$. Die zweite Determinante ist $1 - x^2$. Damit diese positiv ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &> 0 && \mid + x^2 \\ 1 &> x^2 && \mid \sqrt{\ } \\ 1 &> |x| && \end{aligned}$$

Somit ist die Matrix genau dann positiv definit, wenn $-1 < x < 1$.

- Die Matrix ist genau dann negativ definit, wenn

$$\det(1) < 0 \text{ und } \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

  Da die erste Determinante nicht negativ ist, ist die Matrix für kein x negativ definit.

- Weder positiv noch negativ definit: Sie ist für $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ weder positiv noch negativ definit.

(b) Nehmen Sie an, dass Sie für die Berechnung der Quadratwurzel folgende Näherungsformel verwenden: $\sqrt{x} \approx 1 + (x-1)/2$. Welcher relative Vorwärtsfehler und welcher relative Rückwärtsfehler ergeben sich, wenn Sie mit dieser Näherungsformel $\sqrt{4}$ approximieren? (ohne potentielle Effekte der Gleitkommaarithmetik zu berücksichtigen!) (2 Punkte)

Unser $x = 4$ und $y = \sqrt{x} = 2$. Unser $\hat{y}$ ist unser verfälschtes Ergebnis, also $1+(4-1)/2 = 2.5$. Um die Ausgabe 2.5 zu erhalten, müssen wir 2.5 quadrieren. Somit kommen wir auf $\hat{x} = 6.25$.

- Relativer Vorwärtsfehler: $\frac{|y-\hat{y}|}{|y|} = \frac{|2-2.5|}{|2|} = \frac{0.5}{2} = 0.25$.
- Relativer Rückwärtsfehler: $\frac{|x-\hat{x}|}{|x|} = \frac{|4-6.25|}{|4|} = \frac{2.25}{4}$.

(c) Im Standard IEEE 754-2008 ist half precision (ofiziell binary16) durch folgende Festlegungen spezifiziert:

- Basis: 2, Exponentenlänge: 5, minim. Exponent: -14, maxim. Exponent: 15
- Mantissenlänge: 11 (nur 10 Stellen müssen explizit gespeichert werden)

Welchen Wert hat die Maschinengenauigkeit in half precision, wenn Rundung auf die nächstgelegene Maschinenzahl verwendet wird? Wieviele korrekte Dezimalstellen kann man daher in half precision normalerweise erwarten?
Hinweis: Um die notwendigen Berechnungen auf Papier ohne Taschenrechner durchführen zu können, dürfen Sie folgende Näherungen verwenden:
$2^{-3} \approx 1.3 \cdot 10^{-1}, 2^{-4} \approx 6.3 \cdot 10^{-2}, 2^{-5} \approx 3.1 \cdot 10^{-2}, 2^{-6} \approx 1.6 \cdot 10^{-2}$

Wenn auf die nächst gelegene Maschinenzahl gerundet wird, kommt man auf

$$\epsilon_{mach} = \frac{\beta^{1-p}}{2} = \frac{2^{-10}}{2} = 2^{-11}.$$

Für die Anzahl der korrekten Dezimalstellen können wir die Hinweise verwenden:

$$2^{-11} 2^{-5} \cdot 2^{-6} \approx 3.1 \cdot 10^{-2} \cdot 1.6 \cdot 10^{-2} = 4.96 \cdot 10^{-5} = 0.0000496$$

Weil die ersten 5 Stellen nur Nuller sind, erwartet man sich in etwa 5 richtige Dezimalstellen.

(d) Gegeben sei eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ein Startvektor x_0, sodass die power iteration zum Eigenvektor des (eindeutigen) betragsmäßig größten Eigenwerts konvergiert. Wovon hängt es ab, wie schnell dieser Algorithmus konvergiert (1 Punkt)?

Wenn λ_1 der betragsmäßig größte und λ_2 der betragsmäßig zweitgrößte Eigenwert ist, hängt die Konvergenzgeschwindigkeit von

$$\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$$

ab. Je kleiner der Wert ist, desto schneller konvergiert es.

2. (a) Gegeben die Funktion $f(x) = x^2 - x + \frac{2}{3}$ im Intervall $[0, 2]$.

i. Bestimmen Sie die beiden Fixpunkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ für die Funktion $f(x)$ (2 Punkte).

Wir suchen alle $x \in [0, 2]$, sodass $f(x) = x$.

$$\begin{array}{rcll} x^2 - x + \frac{2}{3} & = & x & \quad | - x \\ x^2 - 2x + \frac{2}{3} & = & 0 & \end{array}$$

Für die Gleichung verwenden wir eine Lösungsformel.

$$x = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 - \frac{2}{3}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Somit $\hat{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\tilde{x} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ii. Beginnt man dann die Fixpunktiteration bei $x_0 = \frac{1}{2}$, welchen Punkt würde man im nächsten Schritt erhalten (2 Punkte)?

$x_1 = f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} - \frac{6}{12} + \frac{8}{12} = \frac{5}{12}$.

iii. In welchen offenen Teilintervall (a, b) von $[0, 2]$ sind die Voraussetzungen für die Fixpunktiteration erfüllt (1 Punkt)?

Wir bilden dazu die erste Ableitung.

$$f'(x) = 2x - 1$$

Wir müssen überprüfen, wann $|f'(x)| < 1$. Das heißt, wir erwarten uns

$$\begin{array}{rcll} -1 < & 2x - 1 & < 1 & \quad | + 1 \\ 0 < & 2x & < 2 & \quad | /2 \\ 0 < & x & < 1 & \quad | /2 \end{array}$$

Das heißt, unser offenes Teilintervall ist $(0, 1)$.

(b) Gegeben die Funktion $g(x) = x^2 + \ln x$ $(x > 0)$
Wendet man dann die Newton Nullstellensuche für diese Aufgabe an und startet bei $x_0 = 1$, welchen Punkt erreicht man nach dem ersten Schritt (3 Punkte)?

Wir berechnen die Ableitung

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}.$$

Jetzt berechnen wir x_1.

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 1 - \frac{g(1)}{g'(1)} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(c) Welche der folgenden Aussagen sind wahr oder falsch?
Bitte entsprechend markieren (4 Punkte).

	wahr	falsch
Die Gleichungen $\frac{x}{2} + \ln x = 0$ und $-2 \ln x = x$ haben die selben Lösungen	☒	☐
Die Newton Nullstellensuche konvergiert immer	☐	☒
Bei mehrfachen Nullstellen konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch	☐	☒
Die Fixpunktiteration konvergiert nicht immer	☒	☐

- Wir kommen von der ersten Gleichung zur Zweiten, indem wir mit $\frac{x}{2}$ subtrahieren und anschließend mit -2 multiplizieren. Da das Äquivalenzumformungen sind, haben die Gleichungen die gleiche Lösungsmenge.
- Man stelle sich eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vor, die nur eine Nullstelle an der Stelle 0 hat und sich im Unendlichen an die x-Achse asymptotisch annähert. Dann kann die Iteration gegen unendlich gehen und sie konvergiert dann nicht.
- Bei einfachen Nullstellen konvergiert es quadratisch, wenn man nah genug startet. Wenn sie mehrfach ist, kann viel Blödsinn entstehen.
- Beim Beispiel $f(x) = -x$ mit $x_0 = 1$ erhalten wir die Folge $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$, die nicht konvergiert.

3. (a) Folgende Datenpunkte $(-2,0),(-1,0),(0,1),(1,0),(2,2)$ sind gegeben. Man lege durch diese Punkte näherungsweise eine Gerade ("Linear Least Squares") (3 Punkte)

$p_{LS}(t) = a + bt$ und bestimme a, b.

Wir erwarten uns

$$\begin{aligned} p_{LS}(-2) &= a - 2b \approx 0 \\ p_{LS}(-1) &= a - b \approx 0 \\ p_{LS}(0) &= a \approx 1 \\ p_{LS}(1) &= a + b \approx 0 \\ p_{LS}(2) &= a + 2b \approx 2 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir ein lineares Gleichungssystem, das wir in die Matrixform bringen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Um eine möglichst nahe Lösung zu finden, müssen wir beide Seiten mit A^T multiplizieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dadurch kommen wir auf

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die Lösung $a = 3/5$ und $b = 2/5$.

(b) Welchen Wert würden Sie dann an der Stelle $t = 3$ vorhersagen (2 Punkte).
$p_{LS}(3) = \quad a + b3 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$

(c) Gegeben sind jetzt folgende Stützstellen:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1, \quad & y_0 &= 0 \\ x_1 &= 1, & y_1 &= 2 \\ x_2 &= 2, & y_2 &= 4 \end{aligned}$$

Man bestimme die Koeffizienten des Newton-Interpolationspolynoms $p_N(x)$ (3 Punkte)

$$f[x_0] = y_0 = 0, f[x_1] = 2, f[x_2] = 4$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2-0}{1-(-1)} = 1, f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{2-1} = 2$$

$$\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

Wir erhalten die Koeffizienten, indem wir einfach $f[x_0], f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2]$ ablesen.
Koeffizient 1: 0
Koeffizient 2: 1

Koeffizient 3: $\frac{1}{3}$

(d) Man berechne den Wert dieses Newton-Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 0$ (2 Punkte).

Das Newton-Polynom schaut so aus:

$$p_N(x) = f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) = 0+1(x-(-1))+\frac{1}{3}(x-(-1))(x-1).$$

$p_N(0) = \quad 0 + 1(0-(-1)) + \frac{1}{3}(0-(-1))(0-2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

4. Gegeben sei folgender Vektor

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme eine Elementarmatrix A, die durch die Multiplikation Aa den Eintrag in der 3. Zeile des Vektors a zum Wert 0 transformiert (2 Punkte).

Es bietet sich an, das -2-fache von der ersten Zeile zur dritten Zeile zu addieren, daher kommen wir auf eine Lösung:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Bestimme eine Householder Matrix H, die durch die Multiplikation Ha den Eintrag in der 3. Zeile des Vektors a zum Wert 0 transformiert (2 Punkte).

Weil $3^2 + 4^2 = 5^2$, bietet es sich an, die oberste Zeile zu ignorieren. Wir haben also

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\alpha = \|\tilde{a}\|_2 = 5$, $v = \tilde{a} - \alpha e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$H = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{20}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

(c) Bestimme eine Givensrotationsmatrix G, die durch die Multiplikation Ga den Eintrag in der 3. Zeile des Vektors a zum Wert 0 transformiert (2 Punkte).

Wir fixieren uns wieder auf die letzten beiden Koordinaten und rechnen:

$\alpha = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $c = \frac{3}{5}$, $s = \frac{4}{5}$
$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

(d) Welche der folgenden Aussagen sind wahr oder falsch? Bitte entsprechend markieren (4 Punkte).

	wahr	falsch
Householdertransformationen sind immer symmetrisch und orthogonal.	⊠	☐
Givensrotationen sind immer symmetrisch und orthogonal.	☐	⊠
Elementarmatrizen sind immer symmetrisch und orthogonal.	☐	⊠
Projektionsmatrizen sind immer symmetrisch und orthogonal.	☐	⊠

- Steht in den Vorlesungsfolien.
- Aufgabe (c) liefert ein nicht-symmetrisches Gegenbeispiel.
- Aufgabe (b) liefert ein Gegenbeispiel, das weder symmetrisch noch orthogonal ist.
- Eine quadratische Matrix P ist genau dann eine Projektionsmatrix, wenn sie symmetrisch und idempotent ($P^2 = P$) ist. Ein Gegenbeispiel ist die Nullmatrix.