Name: Matrikelnummer:

2.Übungstest Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Gruppe 5 (Fischl)

Lorenz Fischl

1. Gegeben Sie die Funktion f:

$$f : \mathbb{R} \to W : x \mapsto e^{-x^2}.$$

Bestimmen Sie

i) den Wertebereich W,

ii) 1. und 2. Ableitung der Funktion f,

iii) relative Extrema der Funktion f, und geben Sie an ob diese Minima oder Maxima sind.

iv) Wendestellen der Funktion f.

(7 Punke)

i) Wertebereich $W := \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y \}$

$x \mapsto x^2$ $\quad$ $\left(\begin{matrix} x \mapsto -x^2 \\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^- \end{matrix} \right)$ $\quad$ $x \mapsto e^x$ $\quad$ $x \mapsto \frac{1}{x}$

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_0^+$ $\quad$ $\mathbb{R}_0^+ \mapsto [1, \infty)$ $\quad$ $[1,\infty) \mapsto (0, 1]$

weil $x^2 \geq 0$ $\quad$ weil $e^x \geq 1$ $\quad$ weil $x \geq 1 \geq 0 / : x$

$\Leftrightarrow x = \ln(e^x) \geq \ln(1) = 0$ $\quad$ $\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{x} \geq 0$

ii) $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

iii) $f'(x) = 0$ $\quad \left(\text{da } e^{-x^2} > 0\right) \Leftrightarrow x = 0$

$f''(0) = -2$ somit ist 0 ein Maximum.

iv) $f''(x) = 0$ $\quad \left(\text{da } e^{-x^2} > 0\right) \Leftrightarrow 4x^2 - 2 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

müssen noch $f'''(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}) \neq 0$ überprüfen

$f'''(x) = (-2x)(4x^2-2)e^{-x^2} + 8x\, e^{-x^2} = (12x - 8x^3)\, e^{-x^2}$

$f'''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow 0 = 12x - 8x^3 = 2x\,(6 - 4x^2)$

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad 6 - 4(\pm\sqrt{\frac{1}{2}})^2 = 6 - 2 = 4 \neq 0$

somit $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ Wendestellen.

2. Gegeben sei die Funktion f:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}.$$

Bestimmen Sie

i) die ersten 3 Ableitungen der Funktion f,

ii) einen allgemeinen Ausdruck für die n-te Ableitung (zeigen Sie durch vollständiger Induktion, dass dieser stimmt),

iii) das Taylerpolynom n-ter Ordnung an der Entwicklungsstelle 0.

(6 Punkte)

i) $$f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = 2(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 4(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 4 \cdot (-3)(1-x)^{-4}(-1) = 12(1-x)^{-4}$$

ii) $$f^{(n)}(x) = 2\,n!\,(1-x)^{-n-1} \qquad n \geq 1$$

Per Induktion: $\boxed{IA}$: $f'(x) = 2 \cdot 1!\,(1-x)^{-2} = \frac{2}{(1-x)^2}$ ✓

$\boxed{IS}$ $n \mapsto n+1$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(n)}(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[2\,n!\,(1-x)^{-n-1}\right] = 2\,n!\,(-n-1) \cdot (1-x)^{-n-2}(-1)$$

$$= 2\,(n+1)!\,(1-x)^{-n-2}$$ ✓

iii) $$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k =$$ einsetzen aus (ii)

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cancel{k!}\,(1-\cancel{0})^{-k-1}}{\cancel{k!}} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2x^k$$

3. Gegeben ist die Funktion

$$f : D \to W : x \mapsto e^{x+1} - e$$

i) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen f.

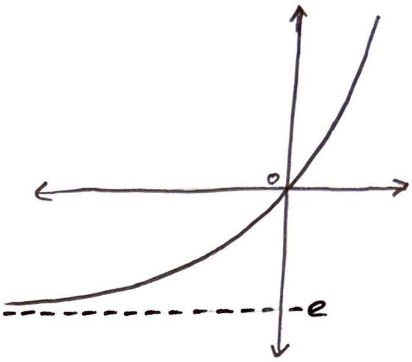
ii) Bestimmen Sie Definitionsbereich D und Wertebereich W,

iii) Wie ist die Stammfunktion F von f definiert? Berechnen Sie diese.

iv) Überprüfen Sie per definition ob die Stammfunktion F tatsächlich die Stammfunktion von f ist.

(7 Punkte)

i) $f(x) = e^{x+1} - e = e(e^x - 1)$



ii) $D := \{ x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ ist wohldefiniert} \}$

da $\exp(\cdot)$ $\underbrace{\text{überall}}_{\text{auf } \mathbb{R}}$ wohldef ist und ebenso $\cdot - e$

ist $D = \mathbb{R}$

Bestimmen von W: 1. Möglichkeit wie in Bsp 1.

2. Möglichkeit: $f : \mathbb{R} \to e^{\mathbb{R}+1} - e = e^{\mathbb{R}} - e = \mathbb{R}^+ - e = \underline{(-e, \infty) = W}$

iii) F heißt Stammfunktion von $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$F(x) = \int e^{x+1} - e \, dx = e \int e^x - 1 \, dx = e(e^x - x) + C$

iv) $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[e(e^x - x) + C\right] = e(e^x - 1) = f(x)$