Beispiel 95

Die Zufallsgrößen X und Y nehmen die Werte 1, 2 und 3 an. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:
$P(X=1)=0.5 \quad P(X=2)=0.3$
$P(Y=1)=0.7 \quad P(Y=2)=0.2$
$P(X=1,Y=1)=0.35$
$P(X=2,Y=2)=0.06$
$P(X=3,Y=1)=0.20$

- **a)** Man stelle die Verteilungstabelle von (X,Y) auf.
- **b)** Sind X und Y unabhängig?
- **c)** Man bestimme $EX, EY, Var(X), Var(Y), \rho_{XY}$.

a)

$Y\downarrow \mid X\rightarrow$	1	2	3	p_Y
1	0,35	0,15	0,20	0,7
2	0,14	0,06	0	0,2
3	0,01	0,09	0	0,1
p_X	0,5	0,3	0,2	1

Zwei Zufallsvariable X und Y heißen voneinander unabhängig, wenn die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors (X,Y) gleich dem Produkt der Randverteilungsfunktionen ist.

Der Erwartungswert des Produkts der beiden Zufallsvariablen heißt Korrelationskoeffizient ρ_{XY}:

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

$$\sigma_{XY}=Cov(XY)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$\sigma_{XY}=\sum_i\sum_i x_iy_jf(x_iy_j)-E(X)E(Y)$$

b)

$P(X=1,Y=1)=0{,}35 \;=\; P(X=1)\cdot P(Y=1)=0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}35$
$P(X=1,Y=2)=0.14 \;\neq\; P(X=1)\cdot P(Y=2)=0{,}5\cdot 0{,}2=0{,}10$
$P(X=1,Y=3)=0.01 \;\neq\; P(X=1)\cdot P(Y=3)=0{,}5\cdot 0{,}1=0{,}05$
$P(X=2,Y=1)=0.15 \;\neq\; P(X=2)\cdot P(Y=1)=0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}21$
$P(X=2,Y=2)=0.06 \;=\; P(X=2)\cdot P(Y=2)=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06$
$P(X=2,Y=3)=0.09 \;\neq\; P(X=2)\cdot P(Y=3)=0{,}3\cdot 0{,}1=0{,}03$
$P(X=3,Y=1)=0.20 \;\neq\; P(X=3)\cdot P(Y=1)=0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}14$
$P(X=3,Y=2)=0.00 \;\neq\; P(X=3)\cdot P(Y=2)=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04$
$P(X=3,Y=3)=0.00 \;\neq\; P(X=3)\cdot P(Y=3)=0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}02$
nicht unabhängig (ein Widerspruch reicht natürlich bereits)

c)

$E(X)=1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}2=\mathbf{1{,}7}$
$E(Y)=1\cdot 0{,}7+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1=\mathbf{1{,}4}$
$Var(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=1^2\cdot 0{,}5+2^2\cdot 0{,}3+3^2\cdot 0{,}2-1{,}7^2=3{,}5-2{,}89=\mathbf{0{,}61}$
$Var(Y)=E(Y^2)-\big(E(Y)\big)^2=1^2\cdot 0{,}7+2^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}1-1{,}4^2=2{,}4-1{,}96=\mathbf{0{,}44}$
$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=-\frac{0{,}04}{\sqrt{0{,}61\cdot 0{,}44}}=-\frac{0{,}04}{\sqrt{0{,}2684}}\approx \mathbf{-0{,}0772}$
$\sigma_{XY}=E(XY)-E(X)E(Y)=2{,}34-1{,}7\cdot 1{,}4=2{,}34-2{,}38=-0{,}04$
$E(XY)=1\cdot 1\cdot 0{,}35+1\cdot 2\cdot 0{,}15+1\cdot 3\cdot 0{,}2+2\cdot 1\cdot 0{,}14+2\cdot 2\cdot 0{,}06+2\cdot 3\cdot 0+3\cdot 1\cdot 0{,}01+3\cdot 2\cdot 0{,}09+3\cdot 3\cdot 0=$
$=0{,}35+0{,}3+0{,}6+0{,}28+0{,}24+0+0{,}03+0{,}54+0=2{,}34$