Runde 11, Beispiel 73

LVA 118.181, Übungsrunde 11, 26.01.2007 (entfallen)

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 30.01.2007

1 Angabe

Man bestimme die allgemeine Lösung für $u(x, y)$ der PDG

$$9u_{xx} - \frac{1}{4}u_{yy} = \sin x$$

Bemerkung: Siehe Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

2 Theoretische Grundlagen: Eindimensionale Schwingungsgleichung (Wellengleichung)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} = f(x, t)$$

u_{tt} ist Auslenkung (Elongation) der Saite zum Zeitpunkt t an der Stelle x.
c^2 ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit.
$f(x, t)$ bezeichnet den Einfluss der äusseren Kräfte.

Geeignete Substitution: $\xi = x - ct$, $\tau = x + ct$. Daraus folgt weiter: $x = \frac{\xi+\tau}{2}$, $t = \frac{\xi-\tau}{2}$:

$$U(\xi, \tau) = u(\frac{\xi + \tau}{2}, \frac{\xi - \tau}{2}) = u(x, t)$$
$$F(\xi, \tau) = f(x, t)$$
$$U_t = U_\xi \cdot \xi_t + U_\tau \cdot \tau_t = U_\xi(-x) + U_\tau c = -cU_\xi + cU_\tau$$
$$u_{tt} = (-cU_\xi + cU_\tau) = -c(U_{\xi\xi}\xi_t + U_{\tau\xi}\tau_t) + c(c(U_{\tau\xi}\xi_t + U_{\tau\tau}\tau_t)) =$$
$$-c(U_{\xi\xi}(-c) + U_{\tau\xi}c) + (U_{\tau\xi}(-c) + U_{\tau\tau}c) = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\tau\xi} + U_{\tau\tau})$$
$$U_x = U_\xi\xi_x + U_\tau\tau_x = U_\xi + U_\tau$$
$$U_{xx} = U_{\xi\xi}\xi_x + U_{\tau\tau}\tau_x + U_{\tau\xi}\xi_x + U_{\tau\tau}\tau_x = U_{\xi\xi} + 2U_{\tau\xi} + U_{\tau\tau}$$
$$F(\xi, \eta) = u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\tau} + U_{\tau\tau}) - c^2(U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\tau}UI_{\tau\tau}) = -4c^2 U_{\xi\tau}$$
$$\Rightarrow U_{\xi\tau} = -\frac{1}{4c^2}F(\xi, \tau)$$

Dies ist eine gewöhnliche DGL:

$$\Rightarrow U(\xi, \tau) = -\frac{1}{4c^2}\int\int F(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,\tau$$

Dies ergibt eine Partikulärlösung. Die allgemeine Lösung setzt sich aus der Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer Partikulärlösung zusammen (Summe).

$$U_{\xi\tau} = 0 \Rightarrow \int \mathrm{d}\,\tau \ \Rightarrow U_{\xi})\breve{\psi}(\xi)$$
$$\Rightarrow \int \breve{\psi}\,\mathrm{d}\,\xi + \varphi(\tau) = U(\xi,\tau) = \varphi(\tau) + \psi(\xi)$$
$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

Das ist die Lösungsformel von d'Alembert (Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen).

2.1 Lösung des Beispiels

Nach den obenstehenden Formeln erhält man für die zugehörige partikuläre Lösung

$$u_p = -\frac{1}{9}\sin(t)$$

Für die zugehörige homogene Lösung erhält man mit der Substitution $\xi = 3y - \frac{1}{2}x$, $\eta = 3y + \frac{1}{2}x$:

$$u_h = g(3y - \frac{1}{2}x) + h(3y + \frac{1}{2}x)$$