(1) [7 Punkte] Gegeben sind die folgenden Permutationen $\pi, \rho \in S_6$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme die Zyklendarstellungen von π und von ρ.
(b) Man bestimme weiters die Kompositionen $\tau_1 = \rho \circ \pi$ und $\tau_2 = \pi \circ \rho$, sowie das Inverse π^{-1}.
(c) Weiters ermittle man das Vorzeichen von π, also $\mathrm{sgn}(\pi)$.

Lösung:

(a) $\pi = (162)(35)$, $\rho = (1264)(35)$

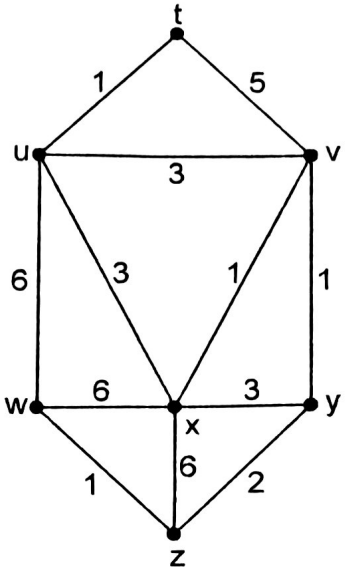
(b) $\tau_1 = \rho \circ \pi = (1264)(35)(162)(35) =$
$= (14)$

$\tau_2 = \pi \circ \rho = (162)(35)(1264)(35) =$
$= (46)$

$\pi^{-1} = (261)(53) = (126)(35)$

(c) $\mathrm{sgn}(\pi) = \mathrm{sgn}(162) \cdot \mathrm{sgn}(35) =$
$= 1 \cdot (-1) = -1$

(2) [6 Punkte] Gegeben sei der folgende ungerichtete kantenbewertete Graph G:

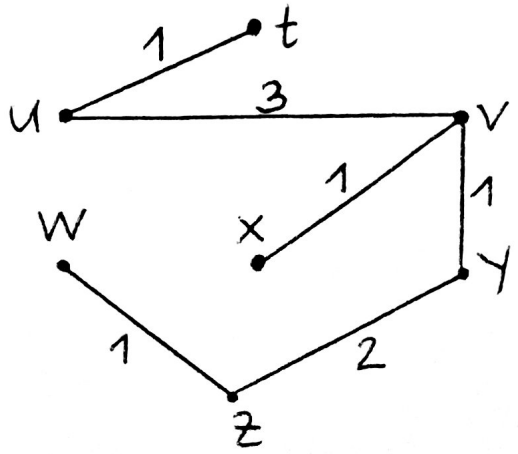


Man bestimme für G mit dem Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege und ihre Längen von allen Knoten zum Knoten z. Geben Sie dabei bitte unbedingt die Ergebnisse der Iterationsschritte des Dijkstra-Algorithmus in einer Tabelle an.

Lösung: Der Dijkstra-Algorithmus liefert folgende Tabelle:

z	y	x	w	v	u	t	Auswahl	Vorgänger
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	z	—
	2	6	$\boxed{1}$	∞	∞	∞	w	z
	$\boxed{2}$	6		∞	7	∞	y	z
		5		$\boxed{3}$	7	∞	v	y
		$\boxed{4}$			6	8	x	v
					$\boxed{6}$	8	u	v
						$\boxed{7}$	t	u

Aus der Tabelle ergibt sich der „Entfernungsbaum":



Aus diesem liest man (ebenso wie aus der Tabelle) die kürzesten Wege (und Längen) von allen Knoten zum Knoten z ab.

(3) [7 Punkte] Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} -x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & 10 \end{array}\right) :2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array}\right) : (-11)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{aligned} -x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 1 \\ x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x_2 = 5 - 4x_3 = 5 - 4 \cdot 1 = 1$$

$$\Longrightarrow -x_1 = 1 - 2x_3 = 1 - 2 \cdot 1 = -1 \Longrightarrow x_1 = 1$$

Das System hat also die eindeutige Lösung:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

Die Lösungsmenge lautet somit:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$