8 Drehbewegungen

8.1 Arbeit und Leistung bei Drehbewegungen

In Kap. 3.2 wurde bereits festgestellt, daß Drehbewegungen von Drehmomenten in Gang gesetzt werden. Das Drehmoment wurde als Produkt aus wirkender Kraft F und wirksamem Kraftarm r definiert, in vektorieller Schreibweise

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{8.1}$$

$\vec{r}$ ist dabei der Vektor vom Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft. Wie Kräfte mit Hilfe von (linearen) Federwaagen, so werden Drehmomente mit (linearen) *Torsionsfederwaagen* gemessen. Der Winkelausschlag φ ist direkt ein Maß für das Drehmoment.

$$\boxed{M = r \cdot F = D^{\bullet} \cdot \varphi \qquad (D^{\bullet}\text{: Winkelrichtgröße}).} \tag{8.2}$$

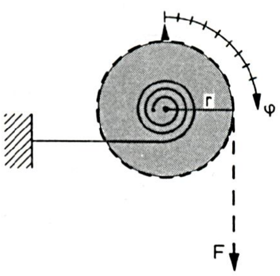

Fig. 8.1: Modell einer Torsionsfederwaage zur Messung von Drehmomenten.

Im Experiment, wie in Fig. 8.1 skizziert, läßt sich die Proportionalität $M \sim \varphi$ mit einer geeigneten Torsionsfeder (Torsionsdraht) demonstrieren: Auf eine drehbar gelagerte, mit der Feder verbundene Kreisscheibe ist ein Faden aufgewickelt (gestrichelt gezeichnet). Die an ihm angreifende Kraft F wird mit einer üblichen Federwaage gemessen. Die einfache Fadenkonstruktion stellt sicher, daß Kraft und Kraftarm stets senkrecht aufeinander stehen und Gl. (8.2) befriedigt wird: r ist konstant und F ist direkt ein Maß für das Drehmoment.

Man sollte aber gleich von vornherein beachten, daß das Drehmoment eine neue physikalische Größe darstellt und keineswegs immer in ein Produkt aus Kraft und Kraftarm zerlegbar sein muß. Denken Sie z. B. an eine Drehachse, die ein Drehmoment überträgt; sie tut dies mit ihrem ganzen Querschnitt; eine Kraft und ihr zugehöriger Kraftarm sind nicht angebbar; trotzdem läßt sich das Drehmoment mit einer Torsionswaage messen.

In der Beziehung (8.2) erkennt man erste Anzeichen einer formalen Analogie in der Beschreibung von translatorischen und rotatorischen Bewegungen:

Translation		**Rotation**	
Kraft	$\vec{F}$ in N	Drehmoment	$\vec{M}$ in N m
Auslenkung/Weg	$\vec{s}$ in m	Winkel	φ in rad
Federkonstante	D in N/m	Winkelrichtgröße	D^{*} in N m/rad

Bei translatorischen Bewegungen war die Arbeit durch $W = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$ definiert worden. Mit Hilfe des obigen Experiments gelingt es, diese Definition auch auf Drehbewegungen zu übertragen. Hier kann man nämlich den Vektorcharakter von F und $\mathrm{d}s$ vergessen: Die Fadenverlängerung ist immer parallel zur wirkenden Kraft gerichtet. Man erhält dann unter Verwendung von $\mathrm{d}s = r \cdot \mathrm{d}\varphi$ mit r als Scheibenradius:

$$W = \int F \cdot \mathrm{d}s = \int F \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi = \int M \cdot \mathrm{d}\varphi. \tag{8.3}$$

Genauer muß man schließlich wieder zur Vektorschreibweise übergehen und für die Arbeit bei Rotationen schreiben:

$$\boxed{W = \int \vec{M}\,\mathrm{d}\vec{\varphi}.} \tag{8.4}$$

Die Vektoren $\vec{M}$ und $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ sind entsprechend der Rechten-Hand-Regel definiert (Fig. 2.12). Das Skalarprodukt im Integral stellt sicher, daß nur die wirksame Komponente von $\vec{M}$ in Richtung $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ zur Arbeit beiträgt. Die Gleichung (8.4) gilt auch in den Fällen, in denen das Drehmoment nicht mehr in ein Produkt aus Kraft und Kraftarm zerlegt werden kann. In Gl. (8.4) findet man die in der obigen Tabelle angesprochene Analogie bestätigt.

Bei *konstanten Drehmomenten* reduziert sich das Integral (8.3/8.4) einfach auf das Produkt

$$W = M \cdot \varphi. \qquad \text{(analog zur Hubarbeit } W = G \cdot h\text{)} \tag{8.5}$$

Zum Spannen linearer Torsionsfedern, für die also $M = D^{*} \cdot \varphi$ gilt, benötigt man die *Spannarbeit*

$$W_s = \int M\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\varphi_0} D^{*} \cdot \varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} D^{*} \varphi_0^2. \tag{8.6}$$

Ist ein Körper um eine Achse frei drehbar gelagert, dann verrichtet ein angreifendes Drehmoment *Beschleunigungsarbeit*. Wie bei translatorischer Bewegung gemäß dem Grundgesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ die Bahnbeschleunigung des Körpers der wirkenden Kraft proportional ist, so ist bei Drehungen die Winkelbeschleunigung α dem wirkenden Drehmoment M proportional:

$$M = J \cdot \alpha; \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}. \tag{8.7}$$

Der Proportionalitätsfaktor J berücksichtigt die Trägheit, die der Körper der Änderung seines Rotationszustandes entgegensetzt: Er stellt das *Trägheits-*

moment des Körpers bezüglich der gewählten Drehachse dar. Das Trägheitsmoment ist allerdings eine kompliziertere Größe als die Masse, die bei translatorischen Bewegungen als Sitz der Trägheit erkannt worden war. Sie soll in den folgenden Abschnitten noch eingehend erläutert werden.

Wie bei der translatorischen Bewegung aus $dW = \vec{F}\,d\vec{s}$ die momentane Leistung $P_{tr} = dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$, so kann man bei Drehbewegungen mit $dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$ die *Momentanleistung* P_{rot} angeben:

$$P_{rot} = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}. \tag{8.8}$$

8.2 Rotationsenergie, Erweiterung des Energiesatzes

Ein Drehmoment verrichtet an einem drehbar gelagerten Körper Beschleunigungsarbeit. Der Körper besitzt danach kinetische Energie der Rotation. Wie bei translatorischen Bewegungen kann man durch Auswertung des Arbeitsintegrals (8.3) unter Verwendung von Gl. (8.7) zu einem Ausdruck für die Rotationsenergie gelangen:

$$E_k^{(rot)} = \int M \cdot d\varphi = \int J \cdot \alpha \cdot d\varphi = J \cdot \int \frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi$$

$$= J \cdot \int \frac{d\varphi}{dt} \cdot d\omega = J \cdot \int \omega \cdot d\omega$$

$$E_k^{(rot)} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2. \tag{8.9}$$

Einen analytischen Ausdruck für das Trägheitsmoment J erhält man aus einer Herleitung, die direkt auf den bekannten Ausdruck für die kinetische Energie der Translation zurückgreift und auf die Rotationsbewegung überträgt. In Fig. 8.2 ist z. B. eine unregelmäßig geformte und um eine Achse A drehbare Scheibe gezeichnet. Bei der Rotationsbewegung besitzen verschiedene Teile der Scheibe unterschiedliche Geschwindigkeiten. Man denkt sich die Scheibe daher in lauter infinitesimal kleine Massenelemente Δm_i zerlegt, denen man eine eindeutige Bahngeschwindigkeit v_i zuordnen kann. Dann läßt sich nämlich der Ausdruck für die kinetische Translationsenergie auswerten. Die Rotationsenergie ergibt sich als Summe der kinetischen Energien aller Massenelemente:

$$E_k^{(rot)} = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot v_i^2. \tag{8.10}$$

Bezeichnet man mit r_i die *senkrechten* Abstände der Massenelemente Δm_i von der Drehachse A, dann kann man dies mit Hilfe von $v_i = \omega r_i$ umformen in

$$E_k^{(rot)} = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_i r_i^2 \cdot \Delta m_i \right] \cdot \omega^2. \tag{8.11}$$

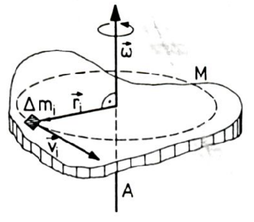

Fig. 8.2: Zur Herleitung des Trägheitsmoments eines Körpers betrachtet man eine flache Scheibe, die man in Massenelemente Δm_i zerlegt, denen man eindeutig eine Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_i$ zuordnen kann.

Der Vergleich mit (8.9) zeigt, daß die Summe in der Klammer wieder das Trägheitsmoment J darstellt. Der Grenzübergang $\Delta m \to 0$ führt schließlich zu

Rotationsenergie: $$E_k^{(rot)} = \frac{1}{2} \cdot J\omega^2 \qquad (8.12)$$

und

Trägheitsmoment: $$J = \int_{Körper} r_\perp^2 \, dm. \qquad (8.13)$$

Im Trägheitsmoment treten jeweils die *senkrechten* Abstände $r_\perp$ der Massenelemente dm von der Drehachse A auf. Eine andere Wahl der Drehachse hat andere $r_\perp$ und damit i. allg. ein anderes Trägheitsmoment zur Folge. Man kann daher nur von dem *Trägheitsmoment J_A bezüglich einer Achse A* sprechen.

In der Beziehung (8.12) für die Rotationsenergie findet man wieder eine Analogie zur Translation: Der Masse m entspricht bei der Rotation das Tägheitsmoment J, der Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ entspricht die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

Die Rotationsenergie ist eine weitere Form der kinetischen Energie. Dadurch erfährt der Energiesatz eine Erweiterung. Allgemein: In einem mechanischen System kann nun kinetische Energie der Translation *und* der Rotation vorhanden sein

$$\Delta W = \Delta E_p + \Delta E_k^{(trans)} + \Delta E_k^{(rot)}. \qquad (8.14)$$

In Worten: Die Zufuhr von Arbeit kann in einem mechanischen System die Vergrößerung sowohl der potentiellen Energie als auch der kinetischen Energien von Translation und Rotation bewirken.

Analog gilt für abgeschlossene Systeme der *Energieerhaltungssatz*

$$\Delta E_p + \Delta E_k^{(trans)} + \Delta E_k^{(rot)} = 0 \qquad (8.15)$$

oder

$$E_p + E_k^{(trans)} + E_k^{(rot)} = const. \qquad (8.16)$$

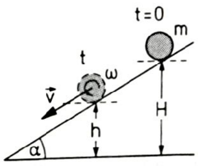

Fig. 8.3: Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene hinab. Aus der anfänglich vorhandenen potentiellen Energie gewinnt sie kinetische Energie der Rotation *und* der Translation.

Beispiel:

Eine Kugel rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hinab. Bei $t = 0$ wird sie in der Höhe H losgelassen. Sie besitzt dann nur die potentielle Energie

$$E_p(0) = m \cdot g \cdot H.$$

Zu einem späteren Zeitpunkt t hat sich diese auf $m \cdot g \cdot h$ reduziert; dafür hat die Kugel nun Translations- und Rotationsenergie gewonnen. Der Energieerhaltungssatz (8.16) lautet daher jetzt:

$$E(0) = E(t)$$

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Die Kugel soll rollen, ohne zu gleiten; also sind Bahn- und Winkelgeschwindigkeit gemäß $v = \omega r$ miteinander verknüpft. Damit könnte man also aus dem Energieerhaltungssatz die Geschwindigkeit der Kugel zu jedem Zeitpunkt und natürlich auch am Endpunkt der Bahn ausrechnen.

Die rollende Kugel wurde hier als Beispiel für die Anwendung des Energieerhaltungssatzes angeführt. Man sollte sich aber klarmachen, unter welchen Bedingungen man ihn wirklich anwenden darf. Wie steht es mit der Reibung? – Dieses Problem werden wir nach der ausführlichen Besprechung des Trägheitsmoments noch einmal aufgreifen.

8.3 Drehimpuls: Momentenstoß und Drehimpulssatz

Bei einer Translationsbewegung wird einem zunächst ruhenden Körper durch einen Kraftstoß $\vec{S}_F = \int \vec{F}\,dt$ ein Bahnimpuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ übermittelt. Der bisher schon mehrfach erprobten Analogie zwischen Translation und Rotation entsprechend muß man nun für Drehbewegungen formulieren:

Durch einen Momentenstoß wird einem ruhenden Körper ein Drehimpuls übermittelt.

$$\textit{Momentenstoß} \longrightarrow \textit{Drehimpuls}$$

$$\vec{S}_M = \int \vec{M}\,dt \longrightarrow \vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \qquad (8.17)$$

Einheit: N m s

Hier wurde also konsequent (aber formal) die Substitution $\vec{F} \leftrightarrow \vec{M}$, $\vec{S}_F \leftrightarrow \vec{S}_M$, $\vec{v} \leftrightarrow \vec{\omega}$ und $m \leftrightarrow J$ vorgenommen. Das Symbol L bezeichnet den Drehimpuls, der in N m s gemessen wird und in einfachen Fällen ein Vektor in Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist. Im folgenden Kapitel wird erläutert werden, daß das Trägheitsmoment i. allg. nicht ein einfacher skalarer Faktor in der Definitionsgleichung $\vec{L} = J\vec{\omega}$ des Drehimpulses ist, sondern einen Tensor darstellt; $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ brauchen dann nicht mehr parallel zu sein.

Fig. 8.4a verdeutlicht nochmal den einfachen Sachverhalt: Der um die Achse A drehbare Körper K erhält durch einen Momentenstoß $\vec{S}_M$ eine Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und damit einen Drehimpuls $\vec{L}$. Das ist der Inhalt des dritten fundamentalen Satzes der Mechanik, des Drehimpulssatzes, den

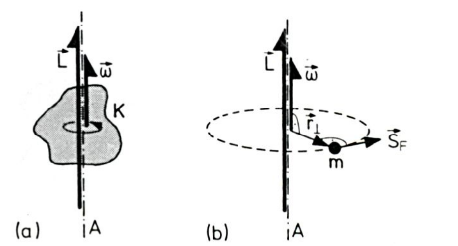

Fig. 8.4: Veranschaulichung des Drehimpulssatzes.
(a): Ein Körper K besitzt mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auch einen Drehimpuls $\vec{L}$.
(b): Ein punktförmiger Körper m, der an eine Achse A gebunden ist erhält einen Stoß und damit eine Winkelgeschwindigkeit und einen Drehimpuls.

man auch wieder in integraler oder in differentieller Form angeben kann.

> *Drehimpuls- oder Drallsatz:*
>
> *Durch Momentenstöße werden Drehimpulse übertragen.*
>
> $$\vec{S}_M = \int \vec{M}_a \, dt = \Delta \vec{L} \qquad (8.1$$
>
> oder differentiell:
>
> *An einem Körper angreifende Drehmomente haben zeitliche Drehimpulsänderungen zur Folge.*
>
> $$\vec{M}_a = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} \qquad (8.1$$

Dies läßt sich natürlich sofort zum Drehimpulserhaltungssatz weiterführe

> *Ist ein System gegen die Einwirkung äußerer Drehmomente abgeschlossen, kann sich sein Drehimpuls nicht ändern.*
>
> $$\text{Bei} \quad \vec{M}_a = 0 \quad \text{ist} \quad \dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{d.h.} \quad \vec{L} = const. \qquad (8.$$

Speziell bei der Rotationsbewegung eines Massenpunktes (!) um eine vorg gebene Achse A, von der er den Abstand $r_\perp$ hat, kann man diese Beziehung weiter zerlegen (Fig. 8.4b). Der Momentenstoß $\vec{S}_M$ läßt sich auf einen Kra stoß $\vec{S}_F$ bei vorgegebenem Abstandsvektor $\vec{r}_\perp$ zurückführen. Der Vektor ist tangential zur Bahnkurve und damit senkrecht zu $\vec{r}_\perp$ gerichtet.

$$\vec{S}_M = \int \vec{M} \, dt = \vec{r}_\perp \times \int \vec{F} \, dt = \vec{r}_\perp \times \vec{S}_F. \qquad (8.$$

Der Kraftstoß seinerseits bedingt einen Bahnimpuls $\vec{S}_F = \Delta\vec{p} = \vec{p}$, we der Körper zu Beginn ruhte. Mit $\vec{S}_M = \Delta\vec{L} = \vec{L}$ kann man deshalb d Drehimpuls $\vec{L}$ zerlegen in

$$\vec{L} = \vec{r}_\perp \times \vec{p}, \qquad (8.$$

also ein Vektorprodukt aus Abstandsvektor und Bahnimpuls; $\vec{r}_\perp$ und $\vec{p}$ lieg in der Rotationsebene, $\vec{L}$ liegt parallel zur Drehachse. Wenn sichergest ist, daß alle Vektoren senkrecht aufeinander stehen, vereinfacht sich (8. zu

$$L = r_\perp \cdot p = r_\perp \cdot mv = mr_\perp^2 \omega = J \cdot \omega.$$

$J = mr_\perp^2$ ist das Trägheitsmoment des Massenpunktes bezüglich der Dr achse.

8.4 Bahndrehimpuls und Eigendrehimpuls

Es könnte nun der Eindruck entstehen, ein (im einfachsten Fall punktförmiger) Körper müsse sich auf einem Kreis bewegen, um dann bezüglich dessen Mittelpunkt einen Drehimpuls zu besitzen. Das ist aber nicht der Fall. Angenommen, Sie beobachten vom Straßenrand aus ein Auto, das auf einer geraden Straße z. B. mit konstanter Geschwindigkeit dahinfährt. Um das Auto stets genau im Blickfeld zu haben, müssen Sie den Kopf drehen.

Das ist schematisch in Fig. 8.5 skizziert. Bezüglich Ihres Standpunktes besitzt das Auto nach Gl. (8.22) einen *Bahndrehimpuls*

$$\vec{L}_B = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{8.23}$$

wenn $\vec{p}$ seinen Bahnimpuls und $\vec{r}$ seinen Ortsvektor (genauer: Ortsvektor des Schwerpunkts) angibt. Dieser Drehimpuls ist konstant, $L_B = r_\perp \cdot p$, und in die Zeichenebene hinein gerichtet. Dieses Beispiel zeigt, daß bei der Angabe des Drehimpulses stets der Bezugspunkt bzw. die Bezugsdrehachse angegeben werden muß.

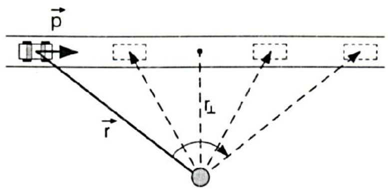

Fig. 8.5: Jemand beobachtet ein Auto, das auf einer geraden Straße dahinfährt (Draufsicht).

Der *Eigendrehimpuls* $\vec{L}_E$ eines Körpers ist dagegen stets auf eine Achse durch seinen Schwerpunkt bezogen. Er ist durch das Trägheitsmoment J_S bezüglich dieser Achse und durch die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gegeben:

$$\vec{L}_E = J_S \cdot \vec{\omega}. \tag{8.24}$$

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_O$ eines Körpers bezüglich eines Punktes O setzt sich additiv aus Bahn- und Eigendrehimpuls zusammen:

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Gesamtdrehimpuls} = \text{Bahndrehimpuls} + \text{Eigendrehimpuls}\\ \vec{L}_O = \vec{L}_B + \vec{L}_E\end{gathered}} \tag{8.25}$$

Beweis: Betrachten Sie einen Körper (oder ein System von Teilchen), der sich einerseits um seinen Schwerpunkt S dreht und sich dabei noch auf einer Bahn bewegt. Der Koordinatenursprung sei O; der Ortsvektor des Körperschwerpunkts sei $\vec{R}$ (Fig. 8.6). Der Körper wird in Massenelemente Δm_i zerlegt, denen jeweils ein Ortsvektor $\vec{r}_i$ und eine Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_i$ zukommen. Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_O$ bezüglich O ist dann

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i \qquad \text{oder} \qquad \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm. \tag{8.26}$$

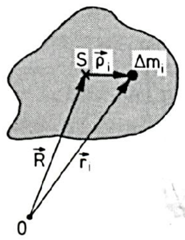

Fig. 8.6: Den Drehimpuls eines sich beliebig bewegenden Körpers bezüglich eines Punktes O kann man in den Bahndrehimpuls des Schwerpunktes bzgl. O und den Eigendrehimpuls bzgl. einer Achse durch den Schwerpunkt zerlegen.

Bezeichnet man mit $\vec{\rho}_i$ den Ortsvektor des Massenelements Δm_i bezüglich des Schwerpunkts S, dann kann man zerlegen:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i.$$

Damit kann aber auch der Gesamtdrehimpuls zerlegt werden:

$$\vec{L}_O = \sum_i (\vec{R} + \vec{\rho}_i) \times \Delta m_i \vec{v}_i = \vec{R} \times \underbrace{\sum \Delta m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}} + \underbrace{\sum (\vec{\rho}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i)}_{\vec{L}_E}. \tag{8.27}$$

man auch wieder in integraler oder in differentieller Form angeben kann.

Drehimpuls- oder Drallsatz:

Durch Momentenstöße werden Drehimpulse übertragen.

$$\vec{S}_M = \int \vec{M}_a \, \mathrm{d}t = \Delta \vec{L} \tag{8.18}$$

oder differentiell:

An einem Körper angreifende Drehmomente haben zeitliche Drehimpulsänderungen zur Folge.

$$\vec{M}_a = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{L}} \tag{8.19}$$

Dies läßt sich natürlich sofort zum Drehimpulserhaltungssatz weiterführen.

Ist ein System gegen die Einwirkung äußerer Drehmomente abgeschlossen, kann sich sein Drehimpuls nicht ändern.

$$\text{Bei} \quad \vec{M}_a = 0 \quad \text{ist} \quad \dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \vec{L} = const. \tag{8.20}$$

Speziell bei der Rotationsbewegung eines Massenpunktes (!) um eine vorgegebene Achse A, von der er den Abstand $r_\perp$ hat, kann man diese Beziehungen weiter zerlegen (Fig. 8.4b). Der Momentenstoß $\vec{S}_M$ läßt sich auf einen Kraftstoß $\vec{S}_F$ bei vorgegebenem Abstandsvektor $\vec{r}_\perp$ zurückführen. Der Vektor $\vec{S}_F$ ist tangential zur Bahnkurve und damit senkrecht zu $\vec{r}_\perp$ gerichtet.

$$\vec{S}_M = \int \vec{M} \, \mathrm{d}t = \vec{r}_\perp \times \int \vec{F} \, \mathrm{d}t = \vec{r}_\perp \times \vec{S}_F. \tag{8.21}$$

Der Kraftstoß seinerseits bedingt einen Bahnimpuls $\vec{S}_F = \Delta\vec{p} = \vec{p}$, wenn der Körper zu Beginn ruhte. Mit $\vec{S}_M = \Delta\vec{L} = \vec{L}$ kann man deshalb den Drehimpuls $\vec{L}$ zerlegen in

$$\vec{L} = \vec{r}_\perp \times \vec{p}, \tag{8.22}$$

also ein Vektorprodukt aus Abstandsvektor und Bahnimpuls; $\vec{r}_\perp$ und $\vec{p}$ liegen in der Rotationsebene, $\vec{L}$ liegt parallel zur Drehachse. Wenn sichergestellt ist, daß alle Vektoren senkrecht aufeinander stehen, vereinfacht sich (8.22) zu

$$L = r_\perp \cdot p = r_\perp \cdot mv = mr_\perp^2 \omega = J \cdot \omega.$$

$J = mr_\perp^2$ ist das Trägheitsmoment des Massenpunktes bezüglich der Drehachse.

8.4 Bahndrehimpuls und Eigendrehimpuls

Es könnte nun der Eindruck entstehen, ein (im einfachsten Fall punktförmiger) Körper müsse sich auf einem Kreis bewegen, um dann bezüglich dessen Mittelpunkt einen Drehimpuls zu besitzen. Das ist aber nicht der Fall. Angenommen, Sie beobachten vom Straßenrand aus ein Auto, das auf einer geraden Straße z. B. mit konstanter Geschwindigkeit dahinfährt. Um das Auto stets genau im Blickfeld zu haben, müssen Sie den Kopf drehen.

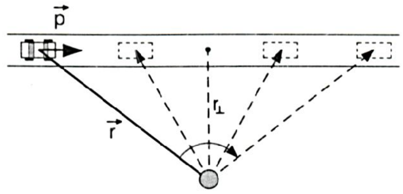

Fig. 8.5: Jemand beobachtet ein Auto, das auf einer geraden Straße dahinfährt (Draufsicht).

Das ist schematisch in Fig. 8.5 skizziert. Bezüglich Ihres Standpunktes besitzt das Auto nach Gl. (8.22) einen *Bahndrehimpuls*

$$\vec{L}_B = \vec{r} \times \vec{p}, \tag{8.23}$$

wenn $\vec{p}$ seinen Bahnimpuls und $\vec{r}$ seinen Ortsvektor (genauer: Ortsvektor des Schwerpunkts) angibt. Dieser Drehimpuls ist konstant, $L_B = r_\perp \cdot p$, und in die Zeichenebene hinein gerichtet. Dieses Beispiel zeigt, daß bei der Angabe des Drehimpulses stets der Bezugspunkt bzw. die Bezugsdrehachse angegeben werden muß.

Der *Eigendrehimpuls* $\vec{L}_E$ eines Körpers ist dagegen stets auf eine Achse durch seinen Schwerpunkt bezogen. Er ist durch das Trägheitsmoment J_S bezüglich dieser Achse und durch die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ gegeben:

$$\vec{L}_E = J_S \cdot \vec{\omega}. \tag{8.24}$$

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_O$ eines Körpers bezüglich eines Punktes O setzt sich additiv aus Bahn- und Eigendrehimpuls zusammen:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Gesamtdrehimpuls} = \text{Bahndrehimpuls} + \text{Eigendrehimpuls}\\ \vec{L}_O = \vec{L}_B + \vec{L}_E\end{array}} \tag{8.25}$$

Beweis: Betrachten Sie einen Körper (oder ein System von Teilchen), der sich einerseits um seinen Schwerpunkt S dreht und sich dabei noch auf einer Bahn bewegt. Der Koordinatenursprung sei O; der Ortsvektor des Körperschwerpunkts sei $\vec{R}$ (Fig. 8.6). Der Körper wird in Massenelemente Δm_i zerlegt, denen jeweils ein Ortsvektor $\vec{r}_i$ und eine Bahngeschwindigkeit $\vec{v}_i$ zukommen. Der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_O$ bezüglich O ist dann

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i \qquad \text{oder} \qquad \int \vec{r} \times \vec{v}\, \mathrm{d}m. \tag{8.26}$$

Bezeichnet man mit $\vec{\rho}_i$ den Ortsvektor des Massenelements Δm_i bezüglich des Schwerpunkts S, dann kann man zerlegen:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\rho}_i.$$

Damit kann aber auch der Gesamtdrehimpuls zerlegt werden:

$$\vec{L}_O = \sum_i (\vec{R} + \vec{\rho}_i) \times \Delta m_i \vec{v}_i = \vec{R} \times \underbrace{\sum \Delta m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}} + \underbrace{\sum (\vec{\rho}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i)}_{\vec{L}_E}. \tag{8.27}$$

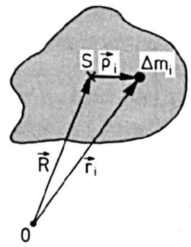

Fig. 8.6: Den Drehimpuls eines sich beliebig bewegenden Körpers bezüglich eines Punktes O kann man in den Bahndrehimpuls des Schwerpunktes bzgl. O und den Eigendrehimpuls bzgl. einer Achse durch den Schwerpunkt zerlegen.

$\vec{P} = \sum \Delta m_i \vec{v}_i$ ist der Bahnimpuls des Gesamtkörpers, also sein Schwerpunktsimpuls, der zweite Term ist der Drehimpuls bezüglich des Schwerpunkts, also der Eigendrehimpuls. Das wäre sofort klar, wenn in der Klammer der rechten Summe statt der Absolutgeschwindigkeit des i-ten Massenelements bzgl. O, die nun $\vec{v}_i = \vec{v}_i(O)$ genannt werden soll, diejenige bzgl. des Schwerpunkts stehen würde, die $\vec{v}_i(S)$ heißen soll. Wenn nun $\vec{v}_S$ die Geschwindigkeit des Schwerpunkts selbst ist, kann man in jedem Fall schreiben:

$$\vec{v}_i(O) = \vec{v}_i(S) + \vec{v}_S .$$

Damit läßt sich die zweite Summe in Gl. (8.27) umformen:

$$\begin{aligned} \sum \vec{\rho}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i(O) &= \sum \vec{\rho}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i(S) + \sum \vec{\rho}_i \times \Delta m_i \vec{v}_S \\ &= \vec{L}_E + \underbrace{\left(\sum \vec{\rho}_i \Delta m_i\right)}_{=0} \times \vec{v}_S . \end{aligned}$$

Der zweite Term verschwindet, denn der Klammerausdruck stellt den Ortsvektor des Schwerpunkts (genauer $M \cdot \rho_S$) im Schwerpunktsystem selbst dar – und der ist natürlich gleich null. Der erste Term ist der Drehimpuls des Körpers bzgl. einer Achse durch den Schwerpunkt, also sein Eigendrehimpuls. Man kann also wirklich wie oben behauptet zusammenfassen:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_B + \vec{L}_E . \tag{8.28}$$

Nun muß man nur noch nachweisen, daß der angegebene Ausdruck für $\vec{L}_E$ sich ganz allgemein in die Form $J_S \vec{\omega}$ umschreiben läßt. Das soll im nächsten Kapitel geschehen, in dem wir uns ausführlicher mit der neuen Größe „Trägheitsmoment" auseinandersetzen wollen.

8.5 Drehschemelexperimente zum Drehimpuls

(a) Experiment zur Drehimpulserhaltung

Ein Experimentator sitzt auf einem reibungsfrei gelagerten Drehschemel und hält zwei schwere Hanteln an den ausgestreckten Armen. Er rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1. Durch Anziehen der Arme kann er seine Winkelgeschwindigkeit auf ω_2 erhöhen; sein Drehimpuls ändert sich dabei jedoch nicht, denn er ist von der Außenwelt abgekoppelt, es gibt kein äußeres Drehmoment. Vielmehr verringert sich das Trägheitsmoment des Systems Mann + Hanteln entsprechend von J_1 auf $J_2 < J_1$, so daß stets $L_1 = J_1\omega_1 = J_2\omega_2 = L_2$ gilt.

(b) Experiment zur Drehimpulsänderung und Drehimpulsumverteilung

Dem nicht-rotierenden Experimentator auf dem Drehschemel wird ein rotierendes Rad, also ein Drehimpuls übergeben. Dieser möge zunächst vertikal gerichtet sein. Das System Rad + Experimentator + Drehschemel besitzt diesen Drehimpuls nun und kann ihn mit Hilfe innerer Drehmomente auch nicht mehr loswerden. Angenommen der Experimentator bremst das Rad mit der Hand ab. Als unvermeidliche Folge davon beginnt er, sich selbst auf dem Schemel zu drehen: Der Drehimpuls bleibt erhalten (Fig. 8.7a).

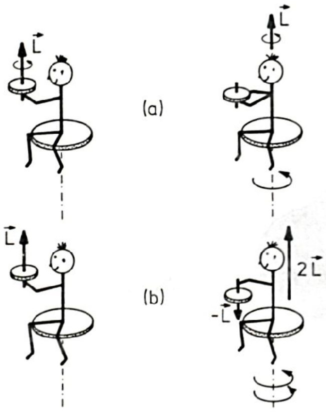

Fig. 8.7: Drehschemel-Experimente zur Drehimpulserhaltung.
(a) Der Experimentator auf einem Drehschemel bremst ein Rad mit einem Drehimpuls $\vec{L}$ ab und gerät dadurch selbst in Rotation.
(b) Durch die Umkehrung des Rad-Drehimpulses $\vec{L} \to -\vec{L}$ erhält der Experimentator auf seinem Drehschemel selbst einen Drehimpuls $2\vec{L}$.

Oder aber der Experimentator versucht, unter Aufwendung eines Drehmoments die Achse des Rades so herumzudrehen, daß dessen Drehimpuls in die entgegengesetzte Richtung, z. B. nach unten zeigt (Fig. 8.7b). Auch in diesem Fall erhält er einen Drall auf seinem Schemel, der so groß ist, daß die vektorielle Summe der beiden jetzt vorhandenen Drehimpulse (Rad + Schemel) dem Anfangswert gleich ist.

Diese Drehschemel-Experimente demonstrieren, daß man es beim Drehimpuls $\vec{L}$ mit einer neuen physikalischen Größe von grundlegender Bedeutung zu tun hat, die keineswegs immer in ein Vektorprodukt aus Ortsvektor $\vec{r}$ und Bahnimpuls $\vec{p}$ zerlegbar ist. Wie beim Drehmoment sei auch hier an die Treibachse eines Motors erinnert: Sie überträgt Drehimpuls, aber keinen Impuls. Die Zerlegung gelingt nur für den Bahndrehimpuls.

Der Drehimpuls besitzt eine fundamentale Bedeutung, fundamentaler als die Masse zum Beispiel. Dies zeigt sich u. a. darin, daß die Grundbausteine der Materie (Protonen, Neutronen, Elektronen etc.) einen Eigendrehimpuls besitzen, der quantisiert ist. Der kleinste Drehimpuls bei atomaren Systemen hat die Größe

$$\frac{1}{2}\hbar = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi},$$

wobei $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J s das Plancksche Wirkungsquantum bedeutet.