107.A04

2023 W

Fragenausarbeitung

1. State and prove Bayes' theorem (Satz von Bayes)

Satz von Bayes:

$$\mathbb{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_j)\cdot \mathbb{P}(A \mid B_j)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i)\cdot \mathbb{P}(A \mid B_i)}$$

$\sum_i \mathbb{P}(B_i)\cdot \mathbb{P}(A \mid B_i) = \mathbb{P}(A)$ lt. Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Beweis Satz d. totalen Wahrsch.:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\Big) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i)\cdot \frac{\mathbb{P}(B_i)}{\mathbb{P}(B_i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\cdot \underbrace{\frac{\mathbb{P}(A\cap B_i)}{\mathbb{P}(B_i)}}_{\text{bed. Wahrsch.}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\cdot \mathbb{P}(A \mid B_i)
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis Satz von Bayes:

$$\mathbb{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_j \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{\mathbb{P}(B_j \cap A)}{\mathbb{P}(B_j)}\cdot \mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_j)\cdot \mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)}$$

wobei:

- bedingte Wahrsch.: $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
- Satz d. vollständ. Wslk.: $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_i)\cdot \mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(A)$

$\square$

2. define the distribution function (Verteilungsfunktion) of a random variable X (or: of a d-dimensional random vector (X_1,…,X_d)) and state its main properties (Grills Skriptum, Abschnitt 2.3). Compute the distribution function of X if X has one of the classical distributions

Verteilungsfunktion: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\boxed{F_X(x) := \mathbb{P}(X \le x)}$$

d-dimensional: $\boxed{F_X(x) = F_{(X_1,\dots,X_d)}(x_1,\dots,x_d) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_d \le x_d)}$

Eigenschaften:

1) $0 \le F(x) \le 1 \quad \forall x$
2) F ist monoton steigend
3) F ist rechtsstetig
4) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
5) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Anm.:

$\mathbb{P}(X \le a) = F_X(a)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X < a) = F_X(a-0)$

$\mathbb{P}(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b-0) - F_X(a)$

$\mathbb{P}(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a-0)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(a \le X < b) = F_X(b-0) - F_X(a-0)$

$\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a-0)$

3. Explain the difference between discrete, continuous and “mixed” random variables. Explain what is the density (Dichtefunktion) of a continuous random variable and of a random vector. Give the density of an Exp(lambda), Gaussian, or other classical example. Abschnitt 2.3

- Diskrete ZV: Die Verteilungsfunktion hat Sprungstellen & ist dazwischen konstant.
- Stetige ZV: Die Verteilungsfunktion besitzt keine Sprungstellen, sondern ist stetig.
- gemischte ZV: Die Verteilungsfunktion hat Sprungstellen & ist dazwischen stetig, aber nicht überall konstant.

Dichtefunktion:

- bei stetiger Verteilung mit Verteilungsfkt.: F_X: $f_X = \frac{\partial F_X(x)}{\partial X}$ ... Dichte

$$\boxed{F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(u)\, du}$$

mehrdim.: $F_X(y) = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_d} f_X(u_1, \dots, u_d)\, du_1 \dots du_d$

Fkt $p(x)$ ist genau dann eine Wslk-funktion, wenn gilt:

$p(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ und $\sum_x p(x) = 1$ $\qquad$ f. diskrete ZV

Fkt f_X ist genau dann eine Dichtefunktion, wenn gilt:

$f_X \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ und $\int f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d = 1$ $\qquad$ f. stetige ZV

4. Explain in formulas the meaning of the following statement: the random variables X_1, …,X_n are independent. Abschnitt 2.3

Unabhängigkeit von ZV:

- Ereignisse sind unabhängig, wenn gilt: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

stetige ZV: $X = (X_1, \dots, X_n)$ sind unabhängig, wenn:

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(y_1,\dots,y_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(y_i)$$

diskrete ZV: $p_{(X_1,\dots,X_n)}(y_1,\dots,y_n) = \mathbb{P}(X_1 = y_1, \dots, X_n = y_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(y_i)$

5. given two random variables X,Y, be able to define what is the density of X conditioned to Y=y, and to compute it in explicit examples. Abschnitt 2.3

Bedingte Verteilung: $\mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$

Bedingte Dichte: X, Y stetig verteilt mit Dichte $f_{X,Y}$.

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Bedingte Wahrsch. als Integral der bedingten Dichte:

$$\mathbb{P}(X \le a \mid Y = y) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x \mid Y = y)\, dx$$

6. be able to state the Transformationssatz fur Dichten (Abschnitt 2.4) and to apply it, for instance to compute the density of X+Y, X/Y when X and Y are independent

Transformationssatz für Dichten:

$X = (X_1, \dots, X_n)$ stetig verteilt mit Dichte f_X.

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektiv

$g(X) = Y$ ist dann ebenfalls stetig verteilt mit Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{\left|\frac{\partial g}{\partial x}(g^{-1}(y))\right|} & \text{wenn } y \in g(\mathbb{R}^n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \det\left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{n \times n}\right)$$

bei $g(X,Y) = g_1(X,Y), g_2(X,Y)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Sei X, Y unabhängig mit Dichte f_X & f_Y Dann ist die Dichte von $X+Y$:

$$f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

$\Leftarrow$ Faltungsintegral

bei diskrete ZV: f durch p ersetzen

Dichte $\to$ W'lk-mass

& statt $\int_{-\infty}^{\infty}$: $\sum_x$

von $Z = \frac{X}{Y}$:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, f_X(zx)\, |y|\, dy$$

7. define the expectation value/variance of a random variable X (either continuous, discrete or mixed), and the covariance between X and Y. Give (better: prove) the main properties of expected value and variance. Compute the expectation value/variance/etc in classical examples of distributions (Abschnitt 2.5)

Erwartungswert $\mathbb{E}$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \to \mathbb{E}(X)$$

Def.: diskret: $\mathbb{E}(X) = \sum_x x \cdot p_X(x)$

stetig: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$

gemischt: $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\, p_X(x) + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\, dx$

Eigenschaften:

1) Linearität. $\mathbb{E}(aX + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$
2) Additivität: $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
3) Monotonie: $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$
4) wenn X, Y unabhängig: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Varianz $\mathbb{V}$:

Def.: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$ ← Maß für Streuung

oder: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ (lt. Steinerschen Verschiebungssatz für $a=0$) bzw. Definition ausmultipliziert

Steinerscher Verschiebungssatz:

für beliebigeges $a \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}((X-a)^2) = \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X) - a)^2$

Eigenschaften Varianz:

1) $\mathbb{V}(X) \geq 0$
2) $\mathbb{V}(X) = 0$ genau dann, wenn $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$
3) $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \cdot \mathbb{V}(X)$
4) $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$, wenn X, Y unabhängig.

$\mathbb{E}(X)$ ... Lageparameter: gibt an, wie groß Werte sind, die X annimmt.

$\mathbb{V}(X)$ ... Streuungsparameter: gibt Abweichungen der einzelnen Werte zueinander an.

* $\mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow X$ ist zentriert
* $\mathbb{E}(X^2) = 1 \Rightarrow X$ ist normiert
* $\mathbb{E}(X) = 0$ & $\mathbb{V}(X) = 1 \Rightarrow X$ ist standartisiert
* $\tilde{X} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}} \Rightarrow X$ zentriert & normiert

$\downarrow$

$\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ ... Standardabweichung

Covarianz Cov:

$$Cov(X,Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$Cov(X,Y)$ ...
- > 0: positiv korreliert
- < 0: negativ korreliert
- $= 0$: unkorreliert

Eigenschaften:
1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
2) $Cov(X,X) = \mathbb{V}(X)$
3) $Cov(aX + bY, Z) = a \cdot Cov(X,Z) + b \cdot Cov(Y,Z)$
4) $Cov(X,Y) = 0$, wenn X,Y unabhängig

Korrelationskoeffizient: $corr(X,Y) = \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$

Satz: $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2 \cdot Cov(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$

Beweis: Def für $\mathbb{V}(X+Y)$ mit $\mathbb{E}$ einsetzen & ausmultiplizieren

8. state and prove Cauchy-Schwarz and/or Markov and/or Chebyshev's inequality. (Abschnitt 2.5)

Cauchy - Schwarz Ungleichung :

Wenn $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ & $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$: $\mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$

Gleichheit, wenn $\exists a > 0$, dass gilt : $aX = Y$

Beweis :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{X}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)}} - \frac{Y}{\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}}\right)^2\right] \geq 0$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{X^2}{\mathbb{E}(X^2)} - 2 \cdot \frac{XY}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}} + \frac{Y^2}{\mathbb{E}(Y^2)}\right] = \underbrace{\frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X^2)}}_{1} - 2 \cdot \frac{\mathbb{E}(XY)}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}} + \underbrace{\frac{\mathbb{E}(Y^2)}{\mathbb{E}(Y^2)}}_{1} \geq 0$$

$$2 \geq 2 \cdot \frac{\mathbb{E}(XY)}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}} \qquad \Big| : 2$$

$$1 \geq \frac{\mathbb{E}(XY)}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{E}(XY) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

$\square$

Markov - Ungleichung :

Sei $X \geq 0$ & $\lambda > 0$. Dann gilt : $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}(X)$

Beweis : Def. $\mathbb{E}(X)$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{x} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$

daraus folgt : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x < \lambda} x \cdot \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \geq \lambda} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{x \geq \lambda} x \cdot \mathbb{P}(X = x) \geq \sum_{x \geq \lambda} \lambda \cdot \mathbb{P}(X = x) \geq \lambda \cdot \mathbb{P}(X \geq \lambda)$$

Anm.: $\sum_{x \geq \lambda} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \geq \lambda)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) \geq \lambda \cdot \mathbb{P}(X \geq \lambda) \qquad \Big| : \lambda$$

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \mathbb{E}(X)$$

$\square$

Chebychev - Ungleichung

(Spezialfall d. Markov-Ungleichung)

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2}$$

Beweis: $Y = (X-\mathbb{E}(X))^2$

$$\mathbb{P}(X-\mathbb{E}(X) \geq \lambda) = \mathbb{P}(Y \geq \lambda^2)$$

Einsetzen in Markov-Ungleichung:

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda^2) \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot \mathbb{E}(Y) \qquad \text{mit } \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{V}(X)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot \mathbb{V}(X)$$

$\square$

9. Define the moment generating function of a random variable (r.v.) (in the discrete and in the continouous case) and give its main properties. Compute it for a given classical example (abschnitt 2.6)

Momente: zB $\mathbb{E}(X)$; $\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{V}(X)$; $\mathbb{E}(X^n)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

- $\mathbb{E}(X^n)$ ... n-te Moment $(= M_n(X))$
- $E((X-E(X))^n)$ ... n-te zentrale Moment $(= m_n(X))$

Momenterzeugende Funktion: $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$

- diskret: $M_X(t) = \sum_x e^{xt} \cdot p_X(x)$
- stetig: $M_X(t) = \int_0^\infty e^{xt} \cdot f_X(x)\, dx$

n-tes Moment: $\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0} = M_n(X) = \mathbb{E}(X^n)$

Eigenschaften:

1) X, Y unabhängig. $\Rightarrow$ $M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$

2) Für $Y = aX + B$; $a, b \in \mathbb{R}$: $M_Y(t) = e^{bt} \cdot M_X(at)$

3) Wenn $m_k = E(X^k)$ endlich, dann ist $\varphi_X(t)$ (charakteristische Funktion) k-mal diff. bar

und $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \cdot m_k$

4) Wenn $M_X(t) = M_Y(t)$ & endlich $\Rightarrow$ X & Y haben gleiche Verteilung

10. State and prove (using Chebyshev) the weak law of large numbers. State the central limit theorem.

Schwaches Gesetz der großen Zahlen:

- $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sei Folge von iid. ZV
- $\mathbb{E}(X_n) = \mu$
- $\mathbb{V}(X_n) = \sigma^2 < \infty$
- $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Dann: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Beweis:

Chebychev-Ungleichung: $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$

Betrachte $Y = \frac{1}{n} \cdot \sum_i^n X_i$; $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i\right) = \underset{\text{unabhängig}}{\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)} = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

einsetzen in Chebychev:

$$\mathbb{P}(|Y - \mu| \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot \lambda^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad \square$$

Zentraler Grenzwertsatz:

- $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sei Folge von iid ZV
- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$

$\Longrightarrow$

Dann ist S_n näherungsweise normalverteilt mit Mittel $n \cdot \mu$ & $\mathbb{V}(S_n) = n \cdot \sigma^2$, also es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

11. Define a MC in discrete time, the transition matrix P and its main properties. Express the n-step transition matrix and the expectation E_x f(X_n) in terms of P (where f is some function from the state space to R). Abschnitt 3.3.1

Markovketten in diskreter Zeit:

$X = (X_i)_{i \geq 0}$ ... Zustand zum Zeitpunkt i mit $X_0, \dots, X_n \in S$ .. Zustandsraum

und $\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$

d.h. Zukunft ist unabhängig von Vergangenheit $\Rightarrow$ MK ist gedächtnislos

$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ... Übergangswahrscheinlichkeiten einer MK

homogene MK: $p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{n+t} = j \mid X_n = i)$ ... t-stufige Übergangswslk.

Übergangsmatrix: $p_{a,b} = \mathbb{P}(X_1 = b \mid X_0 = a) \qquad a, b \in S$

$$P = \begin{pmatrix} p_{a_1,b_1} & p_{a_1,b_2} & \dots & p_{a_1,b_k} \\ p_{a_2,b_1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{a_k,b_1} & & & p_{a_k,b_k} \end{pmatrix}$$

n-stufige Übergangsmatrix: $\mathbb{P}(X_n = b \mid X_0 = a) = p_{a,b}^{(n)}$

Erwartungswert: $f \in \mathbb{R}^{|S|}, \quad |S| < \infty$

$$\mathbb{E}(f(X_n) \mid X_0 = i) = (P^n \cdot f)(i) = \sum_{j \in S} P^n(i,j) \cdot f(j)$$

für $n = 1$: $\mathbb{E}(f(X_n) \mid X_0 = i) = (P \cdot f)(i) = \sum_{j \in S} p(i,j) \cdot f(j)$

$p(i,j) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$

Eigenschaften: 1) Zeilensummen ergeben 1: $\sum_j p_{ij} = 1$

2) Alle Einträge nicht-negativ: $\forall \, p_{ij} \geq 0$

12. Define what is the class decomposition of a MC, and be able to apply it to concrete examples. Define what are class properties and give the main examples of them. Abschnitt 3.3.1

Klassenzerlegung:

- Zustände i & j kommunizieren, wenn: $i \rightleftarrows j$ $\Rightarrow$ Äquivalenzrelation, d.h. Zustandsraum wird in Äquivalenzklassen zerlegt, die wir Klassen nennen.

- $i \to j$ „j folgt i":

  $i, j \in S$, $\exists n \geq 0$, sodass es möglich ist in n-Schritten von i nach j zu gehen mit pos Wslk.

- Eine Eigenschaft heißt Klasseneigenschaft, wenn sie für alle Zustände oder keinen gilt.

- $i \in S$ ist absorbierend, wenn $p_{ij} = 1$

  $\Rightarrow$ absorbierende Klassen kommunizieren nur mit sich selbst.

- Irreduzible MK: eine MK, die nur eine Klasse besitzt

Klasseneigenschaften:

eine Klasse ist ...

... offen: es existiert ein Element außerhalb der Klasse, von diesem kein Pfad zurück in die Klasse führt. sonst:

... abgeschlossen

Periode eines Zustands:

- $d(i) = ggT\{t \geq 0 : p_{ij}(t) > 0\}$

  $\Rightarrow \exists$ ein Pfad der Länge n von i nach j

- $d(i) = 1 \implies$ Zustand i ist aperiodisch, sonst periodisch

  (Anm.: Zustände mit Schleife sind aperiodisch)

13. Be able to define recurrence/transience and positive/null recurrence, and to decide transience/recurrence of a state x in simple examples. Define what is a stationary distribution and explain the relation with positive recurrence and with average return time tau_i. Abschnitt 3.3.2

Rekurrenz: Zustand $i \in S$ rekurrent, wenn ein Zustand fast sicher ∞-oft besucht wird. Sonst transient.
Gilt diese Eigenschaft $\forall i \in S$, dann gilt:
MK ist rekurrent (transient)

positiv rekurrent: $\mathbb{E}_i(\tau_i) < \infty$
sonst: nullrekurrent

Stationäre Verteilung:

$(\pi_i, i \in \Omega_x)$ heißt stationäre Verteilung, wenn:

- $\pi_i \geq 0$
- $\sum_i \pi_i = 1$
- $\sum_i \pi_i \cdot p_{ij} = \pi_j$

Aus der Existenz der stationären Verteilung folgt die positive Rekurrenz:
$\mathbb{E}_i(\tau_i) < \infty$

Anm.: Jede irreduzible, endliche MK ist positiv rekurrent: $\sum_i \pi_i = 1$
Nullrekurrenz kann nur auftreten, wenn Klasse ∞-viele Zustände hat.

15. MC in continuous time: define what is the infinitesimal generator Q (Q-matrix). Be able to explain how, given Q, one can define the continuous-time MC using the "jump matrix" P, the "embedded discrete Markov chain Y" (also called "jump chain") and the iid exponential random variables.

Markovketten in stetiger Zeit:

Algorithmus:

gegeben:
- Übergangsmatrix P
- ν_i; $i \in S$ ... Startverteilung auf S
- $\lambda_i > 0$; $i \in S$ .. Sprungraten

1) Start in X_0 mit Startverteilung ν
2) Falls $X_0 = i$, warte Zeit $T \sim \exp(\lambda_i)$ & springe in nächsten Zustand j mit Wslk p_{ij}.
3) Wiederhole 2 ausgehend von Zustand X_T

Markov-Eigenschaft: Für MK $(X_t, t \in \mathbb{N})$ in stetiger Zeit gilt $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le t_1 \le \ldots \le t_n < \infty$ und $i_1, \ldots, i_n \in S$:

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \quad \Leftarrow \text{ Gedächtnislosigkeit}$$

Q-Matrix (Generator):

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i p_{ij} & \text{für } i \neq j \\ \lambda_i (p_{ij} - 1) & \text{für } i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Diagonale enthält negative, Rest positive Einträge.

MK X_t bzw. Erzeuger Q heißt konservativ, wenn

$\forall i \in S$: $\quad q_{ij} > -\infty$

$$\sum_j q_{ij} = 0 \quad \leftarrow \text{ Zeilensumme}$$

Eingebettete MK mit "jump-matrix" bzw. Übergangsmatrix P:

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} & \text{wenn } q_{ii} < 0,\ i \neq j \\ 1 & \text{wenn } q_{ii} = 0,\ i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

16. Give the relation between Q and the transition matrix P_t of the continuous-time MC. Be able to compute P_t in simple examples. ~~Explain what is the phenomenon of "explosion"~~

$$\mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i) = (e^{Qt})_{i,j}$$

Wenn Q diagonalisierbar, also: $Q = MDM^{-1}$

dann ist $\boxed{P(t) = e^{Qt}} = MDM^{-1} = M \cdot \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_d} \end{pmatrix} \cdot M^{-1}$

$\uparrow$

Übergangsmatrix

17. Define what is an estimator (Schatzer) and what it means that it is consistent and unbiased (erwartungstreu). Be able to explain how to find estimator of the parameters of a concrete distribution using the method of moments and the Maximum likelihood method. Be able to prove that “Momentschatzer” are consistent, using the law of large numbers.

Stichprobe: Folge von unabhängigen ZV mit Verteilung
Statistik T ist eine ZV, die aus Stichprobe berechnet werden kann:

$$\boxed{T = (X_1, \dots, X_n)}$$

Schätzer $(\hat{\theta}_n)$ ist Folge von Statistiken $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n)$

Eigenschaften von Schätzern $\hat{\theta}_n$:

- erwartungstreu:

  wenn $\forall \theta \in \Theta$: $\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) = \theta$

  + effizient, wenn $\hat{\theta}_n$ die kleinstmögliche Varianz unter allen erwartungstreuen Schätzern hat:

    $\Rightarrow \mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n) \leq \mathbb{V}_\theta(\tilde{\theta}_n) \quad \forall \theta$

    oder: $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{V}_\theta(\hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = 0$

- konsistent:

  $$\lim_{n \to \infty} \hat{\theta}_n(X_1, \dots, X_n) = \theta$$

Momentenmethode:

Sei θ ein einzelner reeller Parameter. Dann können wir $\mathbb{E}(X)$ als Fkt von θ darstellen:

$$\mathbb{E}_\theta(X) = m(\theta)$$

Umkehrfkt.: $m^{-1}(\bar{X}_n) = \hat{\theta}_n$ ... stark konsistenter Schätzer = Momentenschätzer

Maximum-Likelihood Methode:

1) Aufstellen d. Likelihood-Funktion:

diskret: $L(X_1, ..., X_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(X_i)$

stetig: $L(X_1, ..., X_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i)$

2) Berechne ML-Schätzer, der $L(X_1, ..., X_n; \theta)$ maximiert:

$$\hat{\theta}_n(X_1, ..., X_n) = \operatorname{argmax} L_n(X_1, ..., X_n; \theta)$$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} L_n = 0$ $\Leftarrow$ ableiten, nullsetzen & nach θ umformen

Oft ist die Log-Likelihood-Funkion leichter abzuleiten:

$$l_n = \log(L_n(X_1, ..., X_n; \theta))$$

(gleiches Maximum, weil Log streng monoton wachsend)