

## Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2023

### Übungsblatt 1: Wiederholung, Mengen, Beweise

**Literatur:** Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 1

### Beispiele zu Mengen und Beweisen

#### Aufgabe 1-1 5P

Seien  $M$  und  $N$  Mengen. Man beweise die folgenden Mengenrechenregeln ( $\overline{M}$  bedeutet Komplement von  $M$ ):

(a)  $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

(b)  $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ .

#### Aufgabe 1-2 6P

Seien  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ , sowie  $A$ ,  $B$  und  $C$  Mengen. Beweisen Sie:

(a)  $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$ .

(b)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

#### Aufgabe 1-3 6P

Folgende Aussagen seien zu beweisen oder zu widerlegen:

(1)  $A_1(n)$ : Alle Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  sind gerade.

(2)  $A_2(n)$ : Für alle Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $\sum_{i=0}^n i = (n+1) * n/2$

(3)  $A_3(n)$ : Für alle  $n \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ ,  $n$  ist eine Primzahl.

(4)  $A_4(n)$ : Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$ , das durch 42 teilbar ist.

(5)  $A_5(n)$ : Die Aussagen  $A_n, n \in [1..4]$  sind alle nicht richtig.

Welche Ansätze sind für welche Aussagen sinnvoll? Geben Sie für jeden sinnvollen Ansatz eine Lösung bzw. Lösungsskizze an.

(a) "Ich suche ein  $n$ , für das die Aussage stimmt"

- (b) "Ich zähle alle  $n$  auf, für das die Aussage stimmt"
- (c) "Ich finde ein  $n$ , für das die Aussage nicht stimmt"
- (d) "Ich beweise die Aussage für ein  $n$  und alle folgenden (falls  $n$  ganzzahlig)"

**Aufgabe 1-4      10P**

Man beweise die folgenden Mengenrechenregeln für die Mengen  $M$  und  $N$ :

- (a)  $M \subset N \Rightarrow \overline{N} \subset \overline{M}$
- (b)  $M \setminus N = M \cap \overline{N}$ .

## Wiederholungsbeispiele zum Schulstoff

Im nachfolgenden Teil der Übung werden wichtige mathematische Rechentechniken und Grundlagen aus dem Schulstoff wiederholt, die auch für die Absolvierung des Kurses nötig sind.

### Aufgabe 1-5 5P

Die folgenden Beispiele sollten für Sie auch ohne Taschenrechner möglich sein.

- Berechnen Sie und stellen Sie das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch dar:

- $\frac{5}{6} + \frac{3}{10}$
- $\frac{4}{15} - \frac{1}{6}$
- $\frac{1}{7} : \frac{3}{2}$
- $\frac{2 - \frac{1}{3}}{\frac{3}{5} + 2}$

- Stellen Sie folgenden Term als Dezimalzahl dar:  $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-3}$

- Berechnen Sie:

- $\frac{10^3 \cdot 10^5}{10^6}$
- $\frac{10^4}{10^2 \cdot 10^7}$
- $10^2 \cdot (10^2)^3$
- $(10^4 * 10^{-2})^3$

- Berechnen Sie:

- $\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}$
- $\frac{3 + \sqrt{9+40}}{4}$

- Welche der folgenden Zahlen ist gleich groß wie  $\sqrt{20}$ ? Kreuzen Sie an:

10        $2 \cdot \sqrt{5}$         $5 \cdot \sqrt{2}$         $-\sqrt{20}$

- Es gilt  $a > 0$ . Welche der folgenden Terme sind zum Term  $\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2}$  äquivalent? Kreuzen Sie an:

$\frac{a}{2}$         $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$         $a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$         $a - \frac{a}{2}$         $a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

### Aufgabe 1-6 5P

Für die quadratische Funktion  $f$  gilt:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 5$$

Rechnen Sie nach, dass  $f(-2 + x) = f(-2 - x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, also  $f$  symmetrisch zur senkrechten Gerade  $x = -2$  ist.

### Aufgabe 1-7 5P

An welcher Stelle  $x$  nimmt  $f(x) = 3 \cdot (x - 5)^2 - 1$  den kleinsten Funktionswert an?

**Aufgabe 1-8 5P**

Gegeben ist ein Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- Berechnen Sie die Länge  $|\vec{a}|$  von  $\vec{a}$ .
- Berechnen Sie den Einheitsvektor  $\vec{a}_0$  von  $\vec{a}$ .
- Berechnen Sie den Vektor  $3 \cdot \vec{a}$  und seine Länge.
- Berechnen Sie jenen Vektor  $\vec{b}$  mit Länge 4 und gleicher Richtung (und Orientierung) wie  $\vec{a}$ .

**Aufgabe 1-9 5P**

Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x - 5 \cdot y &= 2 \\ -4 \cdot x + 3 \cdot y &= -10 \end{aligned}$$

## Weitere Wiederholungsbeispiele für selbständiges Üben

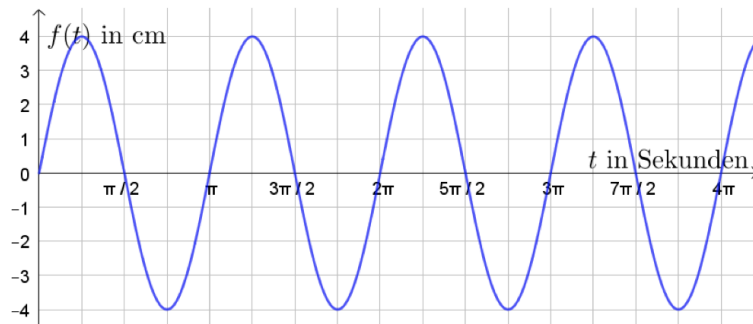
Die folgenden Beispiele sind nicht Teil der PUE, die Beispiele sollten Ihnen aber aus der Schule bekannt sein. Wir empfehlen Ihnen, sich wieder mit diesen Inhalten vertraut machen. Die Lösungsblätter dazu werden nach den PUE-Einheiten hochgeladen, damit Sie Ihre Lösungen kontrollieren können.

### Aufgabe 1-10

Das Kapital auf einem Sparbuch wächst exponentiell. Zu Beginn ( $n = 0$ ) befinden sich 420 Euro auf dem Sparbuch. Pro Jahr wächst das Kapital um 1,2 Prozent.  $K(n)$  ist das Kapital nach  $n$  Jahren. Geben Sie die Formel für  $K(n)$  an!

### Aufgabe 1-11

Der Graph einer Funktion  $f$  mit  $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$  ist dargestellt ( $t$  in Sekunden,  $f(t)$  in cm). Bestimmen Sie  $a$  (in cm) und  $b$  (in rad/s).



### Aufgabe 1-12

Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Median und die Standardabweichung  $s$  der gegebenen Zahlenliste: (1, 3, 3, 5)

### Aufgabe 1-13

Für das arithmetische Mittel einer Datenreihe  $x_1, x_2, \dots, x_{24}$  gilt:  $\bar{x} = 115$ . Die Standardabweichung der Datenreihe ist  $s_x = 12$ . Die Werte einer zweiten Datenreihe  $y_1, y_2, \dots, y_{24}$  entstehen, indem man zu den Werten der ersten Datenreihe jeweils 8 addiert, also  $y_1 = x_1 + 8, y_2 = x_2 + 8$  usw. Geben Sie den Mittelwert  $\bar{y}$  und die Standardabweichung  $s_y$  der zweiten Datenreihe an!

### Aufgabe 1-14

Ermitteln Sie die ersten 6 Folgenglieder der rekursiv gegebenen Folge:  $a_{n+1} = a_n \cdot n$  mit  $a_1 = 1$

### Aufgabe 1-15

Gegeben ist die arithmetische Folge (1; 2; 3; 4; ...). Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich groß wie die Summe der ersten 42 Folgenglieder? Kreuzen Sie an.

- $\frac{40 \cdot 41}{2}$       $\frac{41 \cdot 42}{2}$       $\frac{42 \cdot 43}{2}$       $\frac{43 \cdot 44}{2}$       $\frac{44 \cdot 45}{2}$

### Aufgabe 1-16

Lukas hat 3 verschiedene Hosen, 5 verschiedene Hemden und 4 verschiedene Pullover im Kleiderschrank. Wie viele Outfits bestehend aus einer Hose, einem Hemd und einem Pullover kann er anziehen?

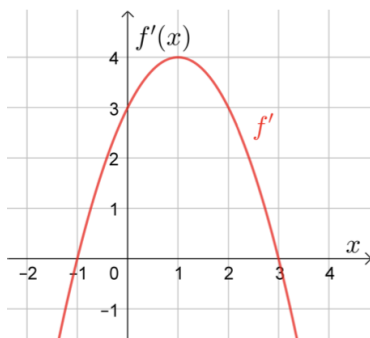
### Aufgabe 1-17

Verwenden Sie Ableitungsregeln, um die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktionen zu ermitteln:

- $2 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3$
- $3 \cdot \sin(x) + 5$
- $4 + 0,2 \cdot e^x$
- $\frac{\ln(x)}{2}$
- $4 \cdot \sin(2 \cdot x + 5)$

### Aufgabe 1-18

Der Graph einer quadratischen Ableitungsfunktion  $f'$  ist dargestellt. Ermitteln Sie das Monotonieverhalten und das Krümmungsverhalten von  $f$ .



### Aufgabe 1-19

Die kubische Polynomfunktion  $f$  mit  $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 - 6 \cdot x + 10$  hat im Punkt  $T = (1|5)$  ein lokales Minimum. Berechnen Sie die Koeffizienten  $a$  und  $b$ .

### Aufgabe 1-20

Ermitteln Sie eine Gleichung jener Funktion  $f$ , die  $f''(x) = 12 \cdot x - 8$ ,  $f'(2) = 11$  und  $f(1) = 0$  erfüllt.