Algebra und Diskrete Mathematik

Panholzer Alois

4. Februar 2022

Inhaltsverzeichnis

Anmerkung des Erstellers: Dies ist eine manuell gestaltete LateX-Transkription der ADM VO-Prüfung des 4.Februar 2022. Eventuell könnten leichte Differenzen hinsichtlich der originalen Angabe vorkommen.

1 Beispiel [8 Punkte] - Vollständige Induktion

Man erläutere das Prinzip der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der folgenden Identität, welche für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gezeigt werden soll (wobei $k! = k \cdot (k-1)!$ für $k \geq 1$, und $0! = 1$ die Faktoriellen bezeichne):

$$1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \tfrac{(2k)!}{2^k \cdot (k-1)!} = \tfrac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

Achtung: $(2k)! = (2k) \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \dots 2 \cdot 1$ ist im Allgemeinen nicht dasselbe wie $2k! = 2 \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \dots 2 \cdot 1$.

2 Beispiel [8 Punkte] - Kombinatorik

Anmerkung: 8 Punkte = 2·Anzahl korrekter Formeln in Tabelle

Wir betrachten zunächst eine Menge $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und eine Menge $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ von Damen bzw. Herren mit $\mid X \mid = \mid Y \mid = n$ auf einer Tanzveranstaltung.

(a) Ein Paar gebildet aus einer Dame $x \in X$ und einem Herren $y \in Y$ wird für den Eröffnungstanz ausgewählt. Wie viele verschiedene Möglichkeiten, nennen wir die Anzahl A_n, gibt es dafür?

(b) Alle wollen gleichzeitig tanzen, also werden aus X und $Y n$ Tanzpaare bestehend aus je einer Dame und je einem Herren gebildet. Auf wie viele verschiedene Arten, nennen wir die Anzahl B_n, kann dies geschehen?

Hinweis zu (b): Man denke an eine "Damenwahl": die erste Dame x_1 wählt einen Herren; dafür hat sie ??? Möglichkeiten. Nun wählt die zweite Dame x_2 einen (noch nicht vergebenen) Herren; dafür bleiben ihr ??? Möglichkeiten, usw.

Nun betrachten wir eine Menge $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_{2n}\}$ von $2n$ Personen, welche sich zum Schachspielen trifft.

(c) Ein ungeordnetes Paar, also eine Menge von 2 Personen, wird aus M ausgewählt, um eine Weltmeisterpartie vorzustellen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten, nennen wir die Anzahl C_n, gibt es dafür?

(d) Alle wollen gleichzeitig Schachspielen, also werden n (ungeordnete) Paare von Personen aus M gebildet, das heißt, M wird in n zweielementige Teilmengen zerlegt. Auf wie viele verschiedene Arten, nennen wir die Anzahl D_n, kann dies geschehen?

Hinweis zu (d): man kann beispielsweise die Idee aus (b) auch hier verwenden: die erste Person m_1 wählt einen Schachpartner; dafür hat sie ??? Möglichkeiten. Nun wählt die nächste "freie" Person aus M (also die nächste Person "auf der Liste", die noch nicht im ersten Paar enthalten ist) einen Schachpartner; es bleiben ihr ??? Möglichkeiten, usw.

Gefundene Formeln in Tabelle eintragen, nur was hier eingefügt wurde, kann gewertet werden! Sie können aber selbstverständlich allenfalls notwendige Rechnungen/Nebenüberlegungen zur Beantwortung der Fragen auf der Rückseite des Blattes durchführen, diese bleiben aber für die Bewertung unberücksichtigt.

	Formel für allgemeines n
$A_n =$	
$B_n =$	
$C_n =$	
$D_n =$	

3 Aufgabe [8 Punkte] - Vektoren und Matrizen

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ a \end{pmatrix}, \text{ mit a} \in \mathbb{R}$$

(a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ sei die aus den beiden Spalten $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ bestehende Matrix:

$$A = (\vec{v_1}\vec{v_2}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Man bestimme den Rang $rg(A)$ der Matrix A und beantworte damit die Frage, ob die beiden Vektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ linear unabhängig oder linear abhängig sind.

(b) Man bestimme jenen Wert oder jene Werte für a im Vektor $\vec{w}$, sodass die drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}$ linear abhängig sind.

(c) Man wähle nun für a im Vektor $\vec{w}$ den in Aufgabe (b) bestimmten Wert (bzw. einen beliebigen der in (b) bestimmten Werte). Durch systematisches Lösen des folgenden linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{w}, \text{ mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

bestimme man Koeffizienten x_1 und x_2, sodass $x_1 \cdot \vec{v_1} + x_2 \cdot \vec{v_2} = \vec{w}$.

Anmerkung: Es ist wahlweise auch möglich, mit dem Lösen des LGS in (c) mit unbestimmtem Wert a zu beginnen und nach "Lösbarkeit" des LGS zu untersuchen und in Folge darauf aufbauend (a) und (b) zu beantworten.

4 Aufgabe [8 Punkte] - Theorie

(a) Man definiere den Begriff **Relation zwischen zwei Mengen A und B** sowie den Begriff **Funktion (= Abbildung) von A nach B**.

(b) Man definiere die Eigenschaften **injektiv** bzw. **surjektiv** für eine Abbildung f von A nach B.

(c) Seien $(V, +, K)$ und $(W, +, K)$ Vektorräume über einem Körper K. Man gebe die definierende Eigenschaft an, welche eine Abbildung $f : V \to W$ erfüllen muss, damit es sich um eine **lineare Abbildung** handelt.

(d) Seien $f : V \to V$ und $g : V \to V$ lineare Abbildungen eines Vektorraumes in sich. Man beweise dann, dass es sich bei der **Hintereinanderausführung der Abbildungen** (also der Verkettung oder Zusammensetzung):

$$g \circ f : V \to V, \qquad \vec{x} \mapsto (g \circ f)(\vec{x})$$

ebenfalls um eine lineare Abbildung handelt.

5 Aufgabe [8 Punkte] - Multiple Choice

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zu grundlegenden mathematischen Begriffen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antwroten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen).

Sie können allenfalls notwendige Rechnungen zur Beantwortung der Fragen z.B. auf der Rückseite des Blattes durchführen, es zählen aber ausschließlich die hier gekreuzten Antworten!

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind erfüllbar, aber nicht gültig?

◯$a \wedge \neg a$ ◯$a \wedge (a \vee b)$ $a \vee (a \to b)$

Seien A, B Teilmengen eines Universums E und bezeichne $'$ das Komplement bezüglich E.
Dann gilt: $(A \cup B)' =$

◯$(A \cap B)'$ ◯$A' \cap B'$ ◯ $A' \cup B'$

Welche der folgenden Identitäten für die Mächtigkeit von mengen gelten?
(Dabei bezeichne $\triangle$ die symmetrische Differenz von Mengen.)

◯$|A \triangle B| + |A \cap B = |A \cup B|$
◯$|A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = |A| + |B|$
◯$|A \cap B| + |A \cup B| = |A| + |B|$

Gegeben sei die Permutation $\pi = (1463)(25) \in S_6$ in Zyklendarstellung.
Welche der folgenden Ausdrücke sind Zyklendarstellung(en) von π^{-1}?

◯(1364)(25) ◯(14)(36)(25) ◯(1364)(52)

Wie lautet in $(\mathbb{Z}_6, +)$ die zu $\bar{4}$ additive inverse Restklasse?

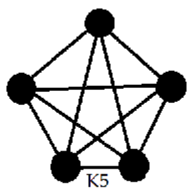
◯ $\bar{0}$ ◯ $\bar{1}$ ◯ $\bar{2}$ ◯ $\bar{3}$ ◯ $\bar{4}$ ◯ $\bar{5}$ ◯ Es gibt kein Inverses.

Wie lautet in $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ die zu $\bar{4}$ additive inverse Restklasse?

◯ $\bar{0}$ ◯ $\bar{1}$ ◯ $\bar{2}$ ◯ $\bar{3}$ ◯ $\bar{4}$ ◯ $\bar{5}$ ◯ Es gibt kein Inverses.

Wir betrachten den K_5, also den vollständigen Graphen mit 5 Knoten.
Welche der folgenden Sätze der Graphentheorie sind für diesen anwendbar?

◯ Handschlaglemma
◯ Eulersche Polyederformel
◯ Vierfarbensatz



Wir betrachten wiederum den vollständigen Graphen K_5.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

◯K_5 besitzt eine geschlossene Hamiltonsche Linie
◯K_5 besitzt eine geschlossene Eulersche Linie
◯K_5 besitzt einen spannenden Baum

6 Lösung(svorschläge)

6.1 Aufgabe 1 - Vollständige Induktion

Zu beweisen ist: $1+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{2^k\cdot(k-1)!}=\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}$, für alle $n\geq 1$

(i) Induktionsanfang $n=1$:

$$1+2\cdot\sum_{k=1}^{1}\frac{(2k)!}{2^k\cdot(k-1)!}=3=\frac{(2\cdot 1+1)!}{2^1\cdot 1!}=3$$

(ii) Induktionsvoraussetzung:

$$1+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{2^k\cdot(k-1)!}=\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}$$

(iii) Induktionsbehauptung:

$$1+2\cdot\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(2k)!}{2^k\cdot(k-1)!}=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

(iv) Induktionsschritt:

Möglichkeit 1: $1+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{2^k\cdot(k-1)!}+\frac{2\cdot(2n+2)!}{2^{n+1}n!}=\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}+\frac{2\cdot(2n+2)!}{2^{n+1}n!}$

$$=\frac{(2n+1)!\cdot 2}{2^{n+1}\cdot n!}+\frac{2\cdot(2n+2)!}{2^{n+1}n!}$$

$$=\frac{(2n+1)!\cdot 2\cdot(n+1)}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}+\frac{2\cdot(2n+2)!\cdot(n+1)}{2^{n+1}(n+1)!} \qquad |\text{Brüche angleichen}$$

$$=\frac{2\cdot(n+1)\cdot(2n+1)!+2\cdot(n+1)\cdot(2n+2)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n+2)\cdot(2n+1)!+(2n+2)\cdot(2n+2)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n+2)!+(2n+2)\cdot(2n+2)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!} \qquad |(2n+2)!\text{ herausheben}$$

$$=\frac{(2n+2)!\cdot(1+2n+2)}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n+2)!\cdot(2n+3)}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}$$

Äquivalent zur Induktionsbehauptung, unser Beweis ist abgeschlossen!

Möglichkeit 2: $1+2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{2^k\cdot(k-1)!}+\frac{2\cdot(2n+2)!}{2^{n+1}n!}=\frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}+\frac{2\cdot(2n+2)!}{2^{n+1}n!}$

$$\xrightarrow{IV}\quad \frac{(2n+1)!}{2^n\cdot n!}+\frac{2\cdot(2n+2)!}{2\cdot 2^n\cdot n!}=\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{2^n\cdot n!}=\frac{(2n+3)!}{2\cdot 2^n\cdot(n+1)!} \qquad |\cdot 2\cdot 2^n\cdot(n+1)!$$

$$\frac{((2n+1)!+(2n+2)!)\cdot 2^n\cdot(n+1)!}{2^n\cdot n!}=(2n+3)!$$

$$2\cdot(n+1)\cdot(2n+1)!+2\cdot(n+1)\cdot(2n+2)!=(2n+3)!$$
$$(2n+2)\cdot(2n+1)!+(2n+2)\cdot(2n+2)!=(2n+3)\cdot(2n+2)!$$
$$(2n+2)!+(2n+2)\cdot(2n+2)!=(2n+3)\cdot(2n+2)! \qquad |\div(2n+2)!$$
$$1+2n+2=2n+3$$
$$2n+3=2n+3$$

Wir haben eine wahre Aussage erhalten, der Beweis ist abgeschlossen!

6.2 Aufgabe 2 - Kombinatorik

	Formel für allgemeines n
$A_n =$	$n \cdot n = n^2$
$B_n =$	$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$
$C_n =$	$\begin{pmatrix} 2n \\ 2 \end{pmatrix}$
$D_n =$	$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \ldots \quad \rightarrow \quad \frac{2 \cdot (2n-1)!}{2^n \cdot (n-1)!}$

6.3 Aufgabe 3 - Vektoren und Matrizen

(a) Zu Überprüfen sind Rang und lineare Abhängigkeit. Sinnvoll ist hierbei, den Gauß-Algorithmus anzuwenden:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den Rang der Matrix kann man nun einfach durch die Stufenform ablesen: $rg(A) = 2$
Wie kann man nun eine lineare (Un-)Abhängigkeit überprüfen?
Wichtig: Zwei Vektoren sind linear unabhängig, wenn bei $\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} = 0$ für die beiden Koeffizienten λ_1 und λ_2 nur die triviale Lösung vorliegt, d.h. $\lambda_1, \lambda_2 = 0$
In unserer durch den Gauß-Algorithmus "vereinfachten Form" der Matrix lesen wir folgendes lineares Gleichungssystem ab:

$$x + 2y = 0$$
$$-y = 0$$

Konsequent können wir ablesen, dass $y = 0$ und durch Einsetzen $x = 0$. Es gilt also lediglich die triviale Lösung, und die beiden Vektoren sind linear abhängig.

(b) Nun müssen wir einen Wert a bestimmen, sodass die Spaltenvektoren einer quadratischen 3×3 Matrix linear abhängig sind. Der einfachste Weg, dies zu lösen, ist das Überprüfen der Determinante: **Wenn diese gleich 0 ist, so sind die Vektoren linear abhängig.** Folglich:
$det(A_1) = 9a - 5 + 12 - 9 - 2a + 30 = 0$
$7a + 28 = 0$
$a = -4$
Wenn also a = -4, dann sind die Vektoren linear abhängig.

(c) Wir wollen also ein $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ finden, wobei $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{w}$

Hierbei helfen wir uns mit dem Gauß-Algorithmus und der erweiterten Systemmatrix $A|$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 15 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir erhalten folgendes lineares Gleichungssystem:
$x_1 + 2x_2 = -4$
$-x_2 = 3$

Durch Lösen erhält man $x_1 = 2 \wedge x_2 = -3$. Folglich: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

6.4 Aufgabe 4 - Theorie

(a) Eine Relation zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts, also des Kreuzproduktes jener zweier Mengen:

$$R \subseteq A \times B$$

Eine Funktion von A nach B ordnet jedem Element a aus A genau ein Element b aus B zu:

$$f : A \rightarrow B, a \rightarrow b$$

(b) (1) Injektivität: Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist injektiv, wenn es zu jedem Element b aus B höchstens ein Element a aus A gibt. Dementsprechend gilt:

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$$

(2) Surjektivität: Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist surjektiv, wenn es zu jeden b aus B mindestens ein a aus A mit $f(a) = b$ gibt. Dementsprechend gilt:

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$$

(c) Folgende Eigenschaften sind für eine linare Abbildung geltend:

(i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(ii) $\varphi(x \cdot \lambda) = \lambda \cdot \varphi(x)$

(d) Nun seien also $f : V \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow V$ lineare Abbildungen eines Vektorraumes. Des Weiteren wollen wir beweisen, dass die Komposition, *Hintereinanderausführung der Abbildungen*, eine lineare Abbildung ist.
Prinzipiell ist die Kompositions zweier Abbildungen nichts anderes als:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Mit diesem Wissen gehen wir schlichtweg durch die einzelnen Bedingungen:

(i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
$f(g(x + y)) = f(g(x) + g(y)) = f(g(x)) + f(g(y))$

(ii) $\varphi(x \cdot \lambda) = \lambda \cdot \varphi(x)$
$f(g(x \cdot \lambda)) = f(g(x) \cdot \lambda = f(g(x)) \cdot \lambda$

Alle Bedingungen einer linearen Abbildung sind erfüllt.

6.5 Aufgabe 5 - Multiple Choice

Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind erfüllbar, aber nicht gültig?
$\bigcirc a \wedge \neg a$ $\otimes a \wedge (a \vee b)$ $\bigcirc a \vee (a \rightarrow b)$

Seien A, B Teilmengen eines Universums E und bezeichne $'$ das Komplement bezüglich E.
Dann gilt: $(A \cup B)' =$
$\bigcirc (A \cap B)'$ $\otimes A' \cap B'$ $\bigcirc A' \cup B'$

Welche der folgenden Identitäten für die Mächtigkeit von mengen gelten?
(Dabei bezeichne $\triangle$ die symmetrische Differenz von Mengen.)
$\otimes |A \triangle B| + |A \cap B = |A \cup B|$
$\bigcirc |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| = |A| + |B|$
$\otimes |A \cap B| + |A \cup B| = |A| + |B|$

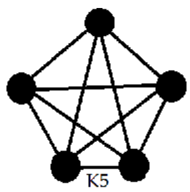
Gegeben sei die Permutation $\pi = (1463)(25) \in S_6$ in Zyklendarstellung.
Welche der folgenden Ausdrücke sind Zyklendarstellung(en) von π^{-1}?
$\otimes (1364)(25)$ $\bigcirc (14)(36)(25)$ $\otimes (1364)(52)$

Wie lautet in $(\mathbb{Z}_6, +)$ die zu $\bar{4}$ additive inverse Restklasse?
$\bigcirc\ \bar{0}$ $\bigcirc\ \bar{1}$ $\otimes\ \bar{2}$ $\bigcirc\ \bar{3}$ $\bigcirc\ \bar{4}$ $\bigcirc\ \bar{5}$ $\bigcirc$ Es gibt kein Inverses.

Wie lautet in $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ die zu $\bar{4}$ additive inverse Restklasse?
$\bigcirc\ \bar{0}$ $\bigcirc\ \bar{1}$ $\bigcirc\ \bar{2}$ $\bigcirc\ \bar{3}$ $\bigcirc\ \bar{4}$ $\bigcirc\ \bar{5}$ $\otimes$ Es gibt kein Inverses.

Wir betrachten den K_5, also den vollständigen Graphen mit 5 Knoten.
Welche der folgenden Sätze der Graphentheorie sind für diesen anwendbar?

$\otimes$ Handschlaglemma
$\bigcirc$ Eulersche Polyederformel
$\bigcirc$ Vierfarbensatz



Wir betrachten wiederum den vollständigen Graphen K_5.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
$\otimes K_5$ besitzt eine geschlossene Hamiltonsche Linie
$\otimes K_5$ besitzt eine geschlossene Eulersche Linie
$\otimes K_5$ besitzt einen spannenden Baum