

Zur VO Prüfung kommt eine Auswahl aus den folgenden Fragen.

Jegliche Antworten stammen vom tuwel-test. Es sind keine eigenen Lösungsversuche

1 Definition von Konvergenz inkludiert. (Work in progress bis 31.1.)

Welche der folgenden Eigenschaften einer Folge a_n sind äquivalent zu " a_n ist konvergent" (in \mathbb{R})?

Dazu können Eigenschaften der Form "Q l R r" abgefragt werden, wobei es folgende Möglichkeiten gibt:

Q	$(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall n > M), \checkmark$ $(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon \geq 0) (\exists M) (\forall n > M),$ $(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon \neq 0) (\exists M) (\forall n > M),$ $(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 1) (\exists M) (\forall n > M), \times$ $(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall n > M^2), \checkmark$ $(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall n > M + 1), \checkmark$ $(\exists a \in \mathbb{R}) (\exists M) (\forall \varepsilon > 0) (\forall n > M), \times$ $(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\exists n > M), \times$	fallabhängig, außer bei $(\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall n > M),$ was immer funktioniert hat
l	$ a_n - a , \checkmark$ $ a - a_n , \checkmark$ $a_n - a, \times$ $a - a_n, \checkmark$	
R	$<, \checkmark$ \leq, \checkmark $>, \times$	
r	ε, \checkmark $\varepsilon + 1, \checkmark$ $\varepsilon^2, \checkmark$ $\frac{\varepsilon}{2}, \checkmark$ $\sqrt{\varepsilon}, \checkmark$	

Ebenfalls gefragt werden können Cauchyfolgen-Varianten, d.h., "Q l R r" mit R und r wie oben, und:

Q	$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall n, m > M) \checkmark$ $(\forall \varepsilon > 0) (\forall M) (\exists n, m > M) \times$ $(\exists M) (\forall \varepsilon > 0) (\forall n, m > M) \times$
l	$ a_n - a_m , \checkmark$ $ a_m - a_n , \checkmark$ $a_n - a_m, \times$ $a_m - a_n, \checkmark$

Beispiel: Q sei $(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall n > M^2)$ und l sei $a_n - a$ und R sei $>$ und r sei ε^2 ; dann ergibt sich die Frage:

Ist folgende Aussage äquivalent zu " a_n ist konvergent:" $(\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists M) (\forall n > M^2) a_n - a > \varepsilon^2$.

Formal sind das also 660 “verschiedene” Fragen.

Hinweise: Das sollte alles offensichtlich sein; beachte allerdings folgende möglicherweise überraschende Kombinationen:

$$\dots (\forall \varepsilon \neq 0) \dots < \varepsilon^2$$

$$\dots (\forall n, m > M) \dots a_n - a_m < \varepsilon \text{ (ohne Betrag-Striche!)}$$

2 Logik

Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig (d.h. für beliebige mathematische Aussagen φ , ψ , für beliebige Menge A)

Zur Erinnerung: $\varphi \rightarrow \psi$ heißt “wenn dann” bzw “impliziert”; \leftrightarrow heißt “gdw”, \wedge heißt “und”, \vee “oder” und \neg “nicht”.

- (a) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \notin A)\varphi(x)$. ✗
- (b) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ gdw impliziert $(\exists x \in A)\neg\varphi(x)$. ✓
- (c) $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\forall x \notin A)\neg\varphi(x)$. ✗
- (d) $\varphi \rightarrow \psi$ impliziert $\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$. ✗
- (e) $\varphi \rightarrow \psi$ gdw impliziert $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$. ✓
- (f) $\varphi \leftrightarrow \psi$ gdw impliziert $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$. ✓

Und dieselben Fragen nochmals für “gdw” statt “impliziert”.

3 Ordnungen, Vollständigkeit

Welche der folgenden Aussagen gilt in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} :

- (a) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Minimum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- (b) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Maximum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- (c) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Minimum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- (d) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Maximum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- (e) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Infimum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- (f) Jede nicht-leere Teilmenge hat ein Supremum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- (g) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Infimum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- (h) Jede beschränkte nicht-leere Teilmenge hat ein Supremum. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

4 Wachstumsraten

Ordne die folgenden Folgen nach Ihrer Wachstumsrate (\ll), wobei $k > 2$ und $1 < \ell < 2$

$$\log(n) \ll \sqrt[k]{n} \ll \sqrt{n} \ll \sqrt[\ell]{n} \ll n \ll n \cdot \log(n) \ll n^\ell \ll n^2 \ll n^k \ll 2^n$$

- | | | |
|-------------------|-----------------|-----------|
| (a) $\log n$ | (e) n | (i) n^k |
| (b) $\sqrt[k]{n}$ | (f) $n \log(n)$ | (j) 2^n |
| (c) \sqrt{n} | (g) n^ℓ | |
| (d) $\sqrt[l]{n}$ | (h) n^2 | |

(Allenfalls gefragt in der Form: Gilt $\log(n) \ll n^k$ etc, das sind dann 56 "verschiedene" Fragen.)

5 Arithmetik mit Limiten

Wir setzen voraus dass die Folge a_n konvergiert und die dazugehörige Reihe konvergiert, und dasselbe für b_n . Was gilt dann allgemein:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ ✓
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ ✓
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert ✗
- (e) a_n hat einen Häufungspunkt
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ ✗
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ ✓

6 Konvergenzkriterien

Sei a_n eine Folge. Was gilt allgemein: (Alternierend heißt dass a_n abwechselnd ≥ 0 und ≤ 0 ist.)

- (a) Wenn a_n beschränkt ist, dann konvergiert a_n . ✗
- (b) Wenn a_n beschränkt ist, dann hat a_n einen Häufungspunkt. ✓
- (c) Wenn a_n beschränkt und monoton ist, dann konvergiert a_n . ✓
- (d) Wenn a_n beschränkt und monoton ist, dann hat a_n einen Häufungspunkt. ✓
- (e) Wenn a_n einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert a_n . ✗
- (f) Wenn a_n konvergiert, dann hat a_n einen Häufungspunkt. ✓
- (g) Wenn a_n genau einen Häufungspunkt hat, dann konvergiert a_n . ✗
- (h) Wenn a_n konvergiert, dann hat a_n genau einen Häufungspunkt. ✓

- (i) Wenn a_n konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✗
- (j) Wenn a_n eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✗
- (k) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert a_n . ✓
- (l) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist a_n eine Nullfolge. ✓
- (m) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✓
- (n) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ✗
- (o) Wenn a_n alternierend ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✗
- (p) Wenn a_n alternierend und eine Nullfolge ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✗
- (q) Wenn a_n alternierend ist und $|a_n|$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ✓

7 Mehr Konvergenz

Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Was gilt dann allgemein:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. ✗
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot a_n$ konvergiert. ✓
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot a_n$ konvergiert. ✗
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konvergiert. ✓
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert. ✗

8 Mengenschreibweise

Welche der Folgenden Aussagen gilt: Dabei bezeichnen wir hier mit (a, b) etc reelle Intervalle, und $\langle a, b \rangle$ das geordnete Paar.

- (a) $\langle 2, 3 \rangle = \langle 3, 2 \rangle$ ✗
- (b) $\{2, 3\} = \{3, 2\}$ ✓
- (c) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3)$ ✓
- (d) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3]$ ✗
- (e) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3)$ ✗
- (f) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$ ✗
- (g) $[1, 2) \cup [2, 3) = [1, 3] \setminus \{2\}$ ✗
- (h) $[1, 2) \cup (2, 3) = [1, 3) \setminus \{2\}$ ✓

9 Topologie metrischer Räume (dazu gibts alle Antworten in den Folien)

Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein in jedem metrischen Raum (X, d) :

- \emptyset ist offen.
- X ist offen. ✓
- Die Vereinigung offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigung endlich vieler offener Mengen ist offen.
- Die Vereinigung zweier offener Mengen ist offen.
- Der Schnitt offener Mengen ist offen. ✗
- Der Schnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. ✓
- Der Schnitt zweier offener Mengen ist offen. ✓
- Der Ball $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ ist offen. ✓
- $\{y \in X : d(x, y) > \varepsilon\}$ ist offen. ✓
- $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist offen. ✗
- $\{y \in X : d(x, y) \geq \varepsilon\}$ ist offen. ✗
- \emptyset ist abgeschlossen.
- X ist abgeschlossen. ✓
- Die Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✓
- Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✓
- Der Schnitt endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. ✓
- Der Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- Der Ball $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ ist abgeschlossen. ✗
- $\{y \in X : d(x, y) > \varepsilon\}$ ist abgeschlossen. ✗
- $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.
- $\{y \in X : d(x, y) \geq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

10 De Morgan Regeln

Seien A , B und C_i (für $i \in I$) Teilmengen von X : Welche der folgenden Aussagen gilt für alle solche Mengen:

- | | | |
|---|---|---|
| • $X \setminus \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) = \bigcap_{i \in I} C_i$ ✓ | • $X \setminus \bigcap_{i \in I} (X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} C_i$ ✗ | |
| • $X \setminus \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus C_i)$ | • $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ ✓ | |
| • $X \setminus \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) = \bigcup_{i \in I} C_i$ ✗ | • $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ ✗ | |
| • $\bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} C_i$ ✓ | • $X \setminus (A \cup B) = A \cap B$ | |
| • $X \setminus \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} (X \setminus C_i)$ ✗ | gleich | |
| • $X \setminus \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} C_i$ ✗ | | • $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = A \cap B$ ✓ |
| • $X \setminus \bigcap_{i \in I} (X \setminus C_i) = \bigcup_{i \in I} C_i$ ✓ | | • $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ ✗ |
| • $X \setminus \bigcap_{i \in I} (X \setminus C_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i)$ ✗ | • $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = A \cap B$ ✓ | |
| • $X \setminus \bigcap_{i \in I} (X \setminus C_i) = \bigcap_{i \in I} C_i$ ✗ | • $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$ ✓ | |
| • $\bigcap_{i \in I} (X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} C_i$ ✓ | • $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))$ ✗ | |
| • $X \setminus \bigcap_{i \in I} (X \setminus C_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} (X \setminus C_i)$ ✗ | • $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$ | |

11 Bild und Urbild

Sei $f : X \rightarrow Y$ und A, B Teilmengen von X und C, D von Y . Welche Aussagen gelten allgemein:

- | | |
|--|--|
| • $f'' A \cup f'' B = f''(A \cup B)$ ✓ | • $f'' A \cup f'' B \supseteq f''(A \cup B)$ ✓ |
| • $f'' A \cap f'' B = f''(A \cap B)$ ✗ | • $f'' A \cap f'' B \supseteq f''(A \cap B)$ ✓ |
| • $f''(A) \setminus f''(B) = f''(A \setminus B)$ ✗ | • $f''(A) \setminus f''(B) \supseteq f''(A \setminus B)$ ✗ |
| • $f'' A \cup f'' B \subseteq f''(A \cup B)$ ✓ | • $f^{-1} C \cup f^{-1} D = f^{-1}(C \cup D)$ ✓ |
| • $f'' A \cap f'' B \subseteq f''(A \cap B)$ ✗ | • $f^{-1} C \cap f^{-1} D = f^{-1}(C \cap D)$ ✓ |
| • $f''(A) \setminus f''(B) \subseteq f''(A \setminus B)$ ✓ | • $f^{-1} C \setminus f^{-1} D = f^{-1}(C \setminus D)$ ✓ |

12 Exponentiation und Logarithmus

Welche der folgenden Aussagen gilt für alle x, y in \mathbb{R} und a, b in $\mathbb{R}^{>0}$:

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|--|
| • $e^{(x^y)} = e^{x \cdot y}$ | • $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ | • $\ln_a(x) = \ln(x) \cdot \ln(a)$ ✗ |
| • $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$ ✓ | • $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ ✓ | • $\ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ ✓ |
| • $e^{x \cdot y} = e^x \cdot e^y$ ✗ | • $a^x = \ln(a) \cdot e^x$ | • $\ln_a(x) = \ln(x) + \ln(a)$ |
| • $e^{x \cdot y} = e^x + e^y$ ✗ | • $e^x = a^{x \cdot \ln(a)}$ ✗ | • $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ ✓ |

- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$ ✗
- $\ln(x)^r = \ln(r \cdot x)$
- $\ln(-x) = \frac{1}{\ln(x)}$ ✗
- $\ln(x + y) = \ln(x) + \ln(y)$ ✗
- $\ln(x)^r = \ln(r) \cdot \ln(x)$ ✗
- $\ln(-x) = -\ln(x)$ ✗
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ✓
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ ✓
- $\ln(x+y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$ ✗
- $e^{-n} = \sqrt[n]{e}$ ✗
- $\ln(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\ln(x)}$ ✗
- $\ln(x^r) = r \ln(x)$ ✓
- $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$

13 Beispiele für (Un)stetigkeit

An welchen Punkten ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig? An welchen $x \cdot f(x)$?

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	\mathbb{R}
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	\mathbb{R}
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
$f(x) = \begin{cases} 2022 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{sonst} \end{cases}$		\mathbb{R}
$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	\emptyset	
$f(x) = x $	\mathbb{R}	

14 Eigenschaften stetiger Funktionen

Welche der folgenden Aussagen gelten für alle stetigen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$:

- $f'' A$ ist ein Intervall $[c, d]$ mit $c \leq d$ in \mathbb{R} . ✗
- Wenn $A = [a, b]$, dann ist $f'' A$ ein Intervall $[c, d]$ mit $c \leq d$ in \mathbb{R} . ✓
- Wenn $A = [a, b]$, dann ist $f'' A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. ✓
- Wenn $A = (a, b)$, dann ist $f'' A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. ✗
- Wenn $x < y < z$ in \mathbb{R} und x, z in $f'' A$, dann ist $y \in f'' A$. ✗
- Wenn $A = [a, b]$ and $x < y < z$ in \mathbb{R} und x, z in $f'' A$, dann ist $y \in f'' A$. ✓
- Wenn $A = [a, b]$ und f injektiv, dann ist f streng monoton. ✓
- Wenn f injektiv, dann ist f streng monoton. ✗

15 Monotonie und Extrema

Welche der folgenden Aussagen gelten:

- Jede stetige Funktion ist differenzierbar. ✗
- Jede differenzierbare Funktion ist stetig. ✓
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f differenzierbar ist und bei x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist $f'(x_0) = 0$. ✓
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$, dann hat f bei x_0 ein lokales Extremum hat. ✗
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Wenn f' bei x_0 ein lokales Extremum hat, dann ist f bei x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = 0$. ✗
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton steigend. ✓
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ genau dann wenn f streng monoton steigend ist. ✗
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f streng monoton steigend ist, dann ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f monoton steigend. ✓
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ genau dann wenn f monoton steigend ist. ✓
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f monoton steigend ist, dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. ✓
- Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. ✗

16 Konkrete Funktionen

Sind die folgenden Funktionen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (mit dem natürlichen Definitionsbereich A) injektiv, surjektiv, bijektiv, stetig, differenzierbar?

- | | | |
|------------------------------|---------------------|----------------------------|
| • $\frac{1}{x}$ isbtd | • x^{-2023} isbtd | • $\ln(x)$ isbtd |
| • $\frac{1}{x^2}$ isbtd | • x^{-2022} isbtd | • $\ln(x^2)$ isbtd |
| • $\frac{1}{x^{2022}}$ isbtd | • x^{-2} isbtd | • $\ln(x)$ isbtd |
| • $\frac{1}{x^{2023}}$ isbtd | • x^{-1} isbtd | • $\ln(\frac{1}{x})$ isbtd |

- e^x isbtd
- $\frac{1}{e^x}$ isbtd
- $|x|$ isbtd
- \sqrt{x} isbtd
- $\sqrt[3]{x}$ isbtd
- $\sqrt[2022]{x}$ isbtd
- $\sqrt[2023]{x}$ isbtd
- $\sqrt{|x|}$ isbtd
- $\sqrt[3]{|x|}$ isbtd
- $\sqrt[2022]{|x|}$ isbtd
- $\sqrt[2023]{|x|}$ isbtd
- $x^{\frac{1}{2}}$ isbtd
- $x^{\frac{1}{3}}$ isbtd
- $x^{\frac{1}{2022}}$ isbtd
- $x^{\frac{1}{2023}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt{x}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[2022]{x}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[2023]{x}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[2022]{|x|}}$ isbtd
- $\frac{1}{\sqrt[2023]{|x|}}$ isbtd
- $\frac{1}{2023\sqrt{|x|}}$ isbtd
- $x^{-\frac{1}{2}}$ isbtd
- $x^{-\frac{1}{3}}$ isbtd
- $x^{-\frac{1}{2022}}$ isbtd
- $x^{-\frac{1}{2023}}$ isbtd
- $|x|^{-\frac{1}{2}}$ isbtd
- $|x|^{-\frac{1}{3}}$ isbtd
- $|x|^{-\frac{1}{2022}}$ isbtd
- $|x|^{-\frac{1}{2023}}$ isbtd
- $\sin(x)$ isbtd
- $\sin(\cos(\sin(\cos(\sin(x))))))$ isbtd
- $\sin(|x|)$ isbtd
- $\cos(|x|)$ isbtd

Hinweis: Differenzierbar heißt "auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar."
 $\frac{1}{x}$ ist z.B. differenzierbar (0 ist ja nicht im Definitionsbereich). Dagegen sind die Wurzeln $\sqrt[n]{x}$ nicht differenzierbar (sie sind bei 0 definiert, aber nicht differenzierbar. Bei $x \neq 0$ sind sie natürlich schon differenzierbar). Achtung: $\sin(|x|)$ und $\cos(|x|)$ sind überall (auch bei 0) stetig. Sind sie bei 0 auch differenzierbar?

(kann sein, dass Sachen teilweise falsch sind, da es leicht ist, sich in der zeile zu verschauen)

(stetigkeit wurde wegen 15.2 aus der differenzierbarkeit abgeleitet;
 bijektivität folgt aus injektivität und surjektivität (falls beide gelten);
 stetigkeit der Betragsfunktion folgt aus Aufgabe 13)

17 Limiten

Ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, oder undefiniert? (Wenn definiert, gib c an.) Dabei wird $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ angenommen für das natürliche A .

- | | | |
|---|---|--|
| • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ | • $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x^2}$ ○ | • $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(x)}$ ∞ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ undef. | • $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ ∞ | • $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ ∞ | • $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x^2}}$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x}$ | • $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$ ○ | • $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2}$ | • $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ ○ | • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x}$ |
| • $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x)}$ ○ |
| | • $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$ ○ | |

Achtung: Der Definitionsbereich von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{x^2}$ ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (und der von $\frac{\ln(x)}{x}$ etc nur $\mathbb{R}^{>0}$).

18 Partielle Ableitungen

Berechne $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, wobei $f(x, y)$ Summe und/oder Produkt und/oder Komposition ist aus: $x, y, \sin(x), \cos(x), e^x, \ln(x)$. Also z.B.

- (a) $f(x, y) = \sin(x) \cos(y) - x^2 y$ (c) $f(x, y) = e^{xy^2} + \sin(\cos(x + y))$
 (b) $f(x, y) = y^2 \sin(x) + y \cos(y)$

19 De l'Hospital (oder auch nicht)

Berechne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, wobei f und g aus den folgenden Funktionen gewählt sind:

- | | |
|-------------------|-----------------------|
| (a) $\cos(x) - 1$ | (i) $\sin(x) \cos(x)$ |
| (b) $1 - \sin(x)$ | (j) $\sin(x) e^x$ |
| (c) $x + \sin(x)$ | (k) $\cos(x) e^x$ |
| (d) $x - \sin(x)$ | (l) $\cos(x) + e^x$ |
| (e) $x + \cos(x)$ | (m) $e^x - \cos(x)$ |
| (f) $\cos(x) - x$ | (n) $x^2 + 2x$ |
| (g) $x \sin(x)$ | (o) $x^3 + x$ |
| (h) $x \cos(x)$ | (p) $x^3 + 1$ |

(q) $e^x - 1$

(s) $e^x + 1$

(r) $e^x - x - 1$

(t) xe^x

20 Konkav und Konvex 1

$f(x)$ ist strikt konvex wenn $f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$ für alle $\theta \in [0, 1]$, konvex wenn \leq gilt, analog für (strikt) konkav. Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein:

(a) Wenn f konkav ist, dann existiert f'' und $f''(x) \geq 0$ für alle x . ✗

(b) Wenn f konkav ist und f'' existiert, dann ist $f''(x) \geq 0$ für alle x . ✓

(c) Wenn f'' existiert und $f''(x) \geq 0$ für alle x , dann ist f konkav. ✓

(d) Wenn f strikt konkav ist, dann existiert f'' und $f''(x) > 0$ für alle x . ✗

(e) Wenn f strikt konkav ist und f'' existiert, dann ist $f''(x) > 0$ für alle x . ✗

(f) Wenn f'' existiert und $f''(x) > 0$ für alle x , dann ist f strikt konkav. ✓

Vorzeichen
sind im Tunnel-
test verkehrt
herum (< statt >)

21 Konkav und Konvex 2

Ist die Funktionen $f(x)$ auf ihrem natürlichen (oder dem explizit angegebenen) Definitionsbereich D strikt konvex, d.h. $f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$ für alle $\theta \in [0, 1]$, oder ist sie konvex aber nicht strikt konvex (dh es gilt zumindest noch \leq), oder ist sie strikt konkav, oder konkav aber nicht strikt konkav, oder weder noch? Dabei kann f eine der folgenden Funktionen g , oder $-g$, sein:

(a) 12

(l) $\frac{1}{x}^3$ auf $D = (-\infty, 0)$

(b) $2x$

(m) $\frac{1}{x}^4$ auf $D = (-\infty, 0)$

(c) x^2 /

(n) e^x skv

(d) x^3 /

(o) e^{-x} skv

(e) x^4 skv

(p) $\ln(x)$ skk

(f) $\frac{1}{x}$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$ skv

(q) $\sin(x)$

(g) $\frac{1}{x}^2$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$ skv

(r) $\sin(x)$ auf $D = [0, 2\pi]$ /

(h) $\frac{1}{x}^3$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$ skv

(s) $\sin(x)$ auf $D = [0, \pi]$

(i) $\frac{1}{x}^4$ auf $D = \mathbb{R}^{>0}$ skv

(t) $\sin(x)$ auf $D = [-\pi, \pi]$ /

(j) $\frac{1}{x}$ auf $D = (-\infty, 0)$ skk

(u) $\sin(x)$ auf $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(k) $\frac{1}{x}^2$ auf $D = (-\infty, 0)$

(v) $\cos(x)$

(w) $\cos(x)$ auf $D = [0, 2\pi]$ /

(skv = strikt kv, kv = konvex, / = weder noch, kk = konkav, skk = strikt kh)

(x) $\cos(x)$ auf $D = [0, \pi]$ ✓

(z) $\cos(x)$ auf $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ✓

(y) $\cos(x)$ auf $D = [-\pi, \pi]$ ✓

22 Taylorreihen

Berechne die ersten drei Terme (d.h., für x^0 bis x^2) der Taylorreihe (um 0) von

(a) $\sin(\pi \cos(x))$ $0, 0, \frac{\pi}{2}$

(g) $\cos(\sin(x))$ $1, 0, -\frac{1}{2}$

(b) $\cos(\pi \sin(x))$ $1, 0, -\frac{\pi^2}{2}$

(h) $\ln(1 + \sin(x))$ $0, 1, -\frac{1}{2}$

(c) $-\cos(\pi \cos(x))$

(i) $\ln(\cos(x))$ $0, 0, -\frac{1}{2}$

(d) $\sin(\sin(x))$ $0, 1, 0$

(j) $\ln(1 + \pi \sin(x))$ $0, \pi, -\frac{\pi}{2}$

(e) $\sin(\pi e^{-x})$

(k) $\sin(\ln(1+x))$ $0, 1, -\frac{1}{2}$

(f) $\cos(\pi e^x)$

(l) $\cos(\ln(1+x))$ $1, 0, -\frac{1}{2}$

23 Uneigentliche Integrale

Berechne: (Es ist auch $\pm\infty$ oder "undefiniert" möglich)

(a) $\int_0^\infty e^{-x} dx$

(f) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$

(k) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$

(b) $\int_0^\infty e^{-2x} dx$ $\frac{1}{2}$

(g) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ∞

(l) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 2

(c) $\int_0^\infty 2^{-x} dx$ $\frac{1}{\ln(2)}$

(h) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ ∞

(m) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ $\frac{3}{2}$

(d) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ∞

(i) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ ∞

(n) $\int_0^1 \ln(x) dx$

(e) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

(j) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$

(o) $\int_0^\infty \sin(x) dx$ undef.

24 Uneigentliche Integrale

Welche der folgenden Integrale sind endlich; sind ∞ , oder sind undefiniert? (Genauer Wert muss nicht berechnet werden.)

(a) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ endlich

(f) $\int_0^\infty x^4 dx$

(j) $\int_{-\infty}^\infty x^4 dx$ undef.

(b) $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$

(g) $\int_{-\infty}^\infty x dx$ undef.

(k) $\int_0^\infty \sqrt{x} \sin(x) dx$ undef.

(c) $\int_0^\infty x dx$ ∞

(h) $\int_{-\infty}^\infty x^2 dx$ undef.

(l) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$ endlich

(d) $\int_0^\infty x^2 dx$ ∞

(i) $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx$

(m) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\ln x} dx$

(e) $\int_0^\infty x^3 dx$ ∞

25 Anfangswertprobleme

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$?

- (a) $f(x) = 0$ ✓
- (b) $f(x) = 1$ ✗
- (c) $f(x) = x^2$ ✗
- (d) $f(x)$ is x^2 für $x \geq 0$ und $-x^2$ für $x < 0$ ✓
- (e) $f(x)$ is x^2 für $x > 1$ und $-x^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✗
- (f) $f(x)$ is $(x - 1)^2$ für $x > 1$ und $-(x + 1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✓
- (g) $f(x)$ is x^2 für $x > 0$ und $-(x + 1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✓

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(1) = 1$?

- (a) $f(x) = 0$ ✗
- (b) $f(x) = 1$ ✗
- (c) $f(x) = x^2$ ✗
- (d) $f(x)$ is x^2 für $x \geq 0$ und $-x^2$ für $x < 0$ ✓
- (e) $f(x)$ is x^2 für $x > 1$ und $-x^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✗
- (f) $f(x)$ is $(x - 1)^2$ für $x > 1$ und $-(x + 1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✗
- (g) $f(x)$ is x^2 für $x > 0$ und $-(x + 1)^2$ für $x < -1$ und 0 sonst. ✓

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $y' = \frac{3}{x}y + x^5$ ($x > 0$), $y(1) = 1$?

- (a) x^3 ✗
- (b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^6$ ✗
- (c) $x^3 + \frac{1}{3}x^6$ ✗
- (d) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^6$ ✓

Welche der gegebenen Funktionen $f(x)$ sind Lösungen des Anfangswertproblems $xy' + 2y = 4x^2$ ($x > 0$), $y(1) = 2$?

(a) $\frac{1}{x^2} + x^2$ ✓

(b) $\frac{1}{x} + x$ ✗

(c) $\frac{1}{x^3} + x^3$ ✗

(d) $\frac{2}{x^2} + x^2$ ✗

26 Länge konkreter Kurven

Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

(a) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$
 $\sqrt{5}$

(d) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 2t \end{pmatrix}$
 $\sqrt{8}$

(f) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2(1-x)^{\frac{3}{2}} \\ 2x^{\frac{3}{2}} \\ 6x \end{pmatrix}$
 $3\sqrt{5}$

(b) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ t \end{pmatrix}$
 $\sqrt{5}$

(e) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2t \end{pmatrix}$
 $\sqrt{8}$

(g) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$
 $\sqrt{6}$

(c) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2t \end{pmatrix}$

27 Volumen

Berechnen Sie $\iint_R f(x, y) dA$ für $R = [0, 1] \times [0, 1]$ und das folgende $f(x, y)$:

(a) $x^2y - xy^2$ 0

(e) $3x^2y^2 - x^2y$ $\frac{1}{6}$

(i) $x - y^2x$

(b) $x^2 + y^2$ $\frac{2}{3}$

(f) $x^2 - xy^2$ $\frac{1}{6}$

(j) $2x^2y^2 + \frac{1}{9}$ $\frac{1}{3}$

(c) $y^2 + 2xy^2$ $\frac{2}{3}$

(g) $x^2 - x^2y$ $\frac{1}{6}$

(k) $y^3x + \frac{1}{4}$

(d) $x^2 + 2x^2y$ $\frac{2}{3}$

(h) $x^2y + xy^2$ $\frac{1}{3}$

(l) $x^3 + y^3x$

