

Alle als “schwierig” oder mit “Computer” gekennzeichneten Übungsbeispiele sind freiwillige Bonusaufgaben.

Version: 12. Oktober 2022

Achtung: Dieses Dokument wird laufend erweitert, aber möglicherweise auch geändert! Nur diejenigen Übungsaufgaben die schon konkret aufgegeben wurden sind stabil; andere Aufgaben können sich noch ändern.

Elementare Logik

1 (1P) Aussagenlogik

In der Mathematik verwendet man oft folgende Symbole: \rightarrow für Implikation (wenn... dann); \wedge für “und”, \vee für “oder” und \neg für “nicht”. In der (etwas schammigeren) Alltagssprache werden diese Begriffe manchmal anders verwendet als in der Mathematik.

Im folgenden wird jeweils ein Satz zuerst informell und dann mit den gerade erwähnten Symbolen aufgeschrieben. Geben Sie an ob der Satz wahr ist oder nicht. (Dabei steht A und B für irgendwelche beliebigen mathematischen Aussagen.)

- | | |
|--|--|
| (a) Wenn $1 + 2 = 5$, dann ist $1 + 3 = 6$.
$1 + 2 = 5 \rightarrow 1 + 3 = 6$ | (f) Wenn $A \rightarrow B$ impliziert, dann impliziert $B \rightarrow A$.
$(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ |
| (b) Wenn $1 + 2 = 5$, dann ist $1 + 3 = 7$.
$1 + 2 = 5 \rightarrow 1 + 3 = 7$ | (g) Wenn $A \rightarrow B$ impliziert, und A gilt, dann gilt B .
$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$ |
| (c) A gilt oder A gilt nicht.
$A \vee \neg A$ | (h) Wenn $A \rightarrow B$ impliziert, dann impliziert (nicht B) (nicht A).
$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ |
| (d) $1 + 1 = 1$ oder $1 + 1 = 2$.
$1 + 1 = 1 \vee 1 + 1 = 2$ | |
| (e) $1 + 1 = 2$ oder $1 + 1 = 2$.
$1 + 1 = 2 \vee 1 + 1 = 2$ | |

2 (1P) Quantoren

In der Mathematik wird das Zeichen \forall für “für alle” verwendet, und \exists für “es gibt”. Welche der Folgenden Aussagen gilt in \mathbb{R} , den reellen Zahlen:

- | | |
|--|---|
| (a) Für jedes x gib es ein größeres z .
$(\forall x) (\exists z) x < z$ | (c) Für alle $x < z$ gibt es ein y dazwischen, d.h. $x < y < z$.
$(\forall x) (\forall z) (x < z \rightarrow (\exists y) x < y < z)$
Wir schreiben das auch einfach
$(\forall x < z) (\exists y) x < y < z$ |
| (b) Es gibt ein größtes z .
$(\exists z) (\forall x) x \leq z$ | (d) $(\exists y) (\forall x < z) x < y < z$ |

Winkelfunktionen und periodische Funktionen

Sie sollten bereits wissen:

- (i) $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
- (ii) $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$
- (iii) $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- (iv) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- (v) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

3 (1P) Sinus und Cosinus

Zeige Mithilfe von (i)–(v):

- (a) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
- (b) $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- (c) $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

4 (schwierig, 1P) Phasenverschiebung

Zeige Mithilfe von (i)–(v): $\sin(x) + \sin(x + c) = 2\cos(\frac{c}{2})\sin(x + \frac{c}{2})$.

(Hinweis: Bei einem möglichen Rechenweg wird verwendet: $\cos(c) = \cos(2\frac{c}{2})$ und $\sin(c) = \sin(2\frac{c}{2})$.)

5 (schwierig, 1P) Schwebung

Zeige Mithilfe von (i)–(v): $\sin(f_1x) + \sin(f_2x) = 2\cos(\frac{f_1 - f_2}{2}x)\sin(\frac{f_1 + f_2}{2}x)$.

6 (2P) Periodische Funktionen

Eine Funktion heißt periodisch, wenn:

$$(\exists p > 0) (\forall x \in \mathbb{R}) f(x + p) = f(x).$$

So ein p nennt man (eine) Periode der Funktion f .

Zum Beispiel ist $\sin(x)$ periodisch, mit Periode 2π .

- (a) Warum steht in der Definition $p > 0$? Was passiert wenn man beliebiges p zulässt.
- (b) Ändert sich der Begriff wenn man die Quantoren vertauscht? Nennen wir f “babig” wenn $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists p > 0) f(x + p) = f(x)$. Ist babig zu sein dasselbe wie periodisch? Stärker? Schwächer? Gib eine Funktion an die babig ist aber nicht periodisch.

- (c) Beweise: Wenn eine Funktion periodisch ist, dann gibt es mehrere verschiedene Perioden.
- (d) $\sin(x)$ hat eine kleinste Periode. Welche?
- (e) Nicht jede periodische Funktion hat eine kleinste Periode. Gib ein Beispiel für so eine Funktion an.
- (f) Gib eine Funktion mit Periode 17 an.
- (g) Gib eine Funktion an deren minimale Periode 17 ist.

7 (schwierig, 1P) Nochmals periodische Funktionen

In der vorigen Aufgabe haben Sie eine Funktion gefunden die periodisch ist aber keine kleinste Periode hat. Finde eine weitere solche Funktion. (Hinweis: Eine Möglichkeit: Fallunterscheidung ob rational oder nicht.)

Computereinsatz (Bonusbeispiele)

8 (Computer, 1P) Floats und Runden

Geben Sie in ihrer Lieblings-Programmiersprache die folgenden Zahlen ein, und sehen Sie nach ob das Ergebnis exakt ist. Was lässt sich daraus ableiten?

- (a) $(1./3.) * 3.$
- (b) $1./3. + 1./2. - 5./6.$
- (c) $1./2. + 1./4. - 3./4.$
- (d) $1./3. + 1./6. - 3./6.$
- (e) $0.1/0.2$

9 (Computer, 1P) Funktionen plotten

Plotten Sie $\sin(x)$ in jupyter (mit numpy und pyplot). Sie können zB so beginnen:

```
%matplotlib notebook
import ipywidgets
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Üben Sie dabei die wichtigste Informatik-Fertigkeit:

google → stackexchange → cut&paste

Zahlen

10 (1P) Bruchrechnen

Schreibe als Bruch:

(a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} =$

(c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} =$

(e) $\frac{2}{3} / \frac{4}{5} =$

(b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

(d) $\frac{2}{\frac{2}{3}} =$

11 (1P) Kürzen von Brüchen

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ heißt gekürzt, wenn es keinen gemeinsamen Teiler (abgesehen von 1, wenn Sie 1 als Teiler bezeichnen) von a und b gibt. So ist zum Beispiel $\frac{12}{9}$ nicht gekürzt, weil 3 Teiler von sowohl 12 als auch 9 ist. Kürzen liefert dann $\frac{4}{3}$.

Kürzen Sie die folgenden Brüche:

(a) $-\frac{6}{8} =$

(b) $\frac{15}{45} =$

(c) $\frac{11}{99} =$

12 (1P) Dezimal zu Bruch

Schreibe die folgende periodische Dezimalzahl als Bruch: $0,24\overline{747}$.

(Hinweis: Führe den Beweis aus der VO durch dass periodische Dezimalzahlen in \mathbb{Q} sind.)

13 (1P) Vollständige Induktion (oder eben nicht)

In \mathbb{N} gilt die "vollständige Induktion": Wenn $\varphi(0)$ gilt, und für alle $n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)$ gilt, dann gilt $\varphi(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. (Intuitiv: $\varphi(0)$ gilt; $\varphi(0) \rightarrow \varphi(1)$ gilt als Instanz $m = 0$ der Voraussetzung, und daher gilt $\varphi(1)$. Analog für $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, etc.)

Zeige: In \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} gilt die vollständige Induktion nicht. (D.h.: Finde einen Satz $\varphi(x)$ so dass im jeweiligen Zahlenbereich gilt: $\varphi(0)$ und $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)$ für jedes x ; aber es gibt ein y mit $\neg\varphi(y)$.)

Abzählbarkeit

14 (1P) Teilmengen

Zeige: Wenn A abzählbar, und $B \subseteq A$, dann ist B abzählbar.

15 (1P) Teilmengen

Zeige: Wenn A abzählbar und unendlich ist, dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die A aufzählt und in der jedes Element von A genau einmal vorkommt.

Folgen

16 (1P) Konvergenz

Welche der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert; wenn sie konvergiert: wogegen? Wenn nicht: geht sie gegen ∞ oder $-\infty$?

Zur Erinnerung: $-1^0 = 1$, $-1^1 = -1$, $-1^2 = 1$, $-1^3 = -1$, ...

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|---------------------------------|
| (a) $a_n := n$ | (c) $a_n := (-1)^n$ | (e) $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$ |
| (b) $a_n := \frac{1}{n}$ | (d) $a_n := (-1)^n n$ | (f) $a_n := \log(n)$ |

17 (1P) Eindeutigkeit des Limes

Zeige: Es gibt höchstens einen Limes einer Folge. D.h.: Wenn b_1 die Definition erfüllt Limes zu sein für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und b_2 ebenfalls, dann gilt $b_1 = b_2$.

18 (1P) Konvergenz monotoner Folgen

Zeige: Wenn die Folge $\bar{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, und eine obere Schranke hat, dann ist das Supremum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Limes von \bar{a} .

19 (1P) Limes von Quotienten von Polynomen

Konvergiert die Folge a_n ; wenn ja wogegen, wenn nein geht sie gegen unendlich oder minus unendlich oder weder noch?

- | | | |
|---|--------------------------------------|---|
| (a) $a_n = \frac{7n^3+4}{3n^3+4n^2-5n+8}$ | (b) $a_n = \frac{7n^3+4}{4n^2-5n+8}$ | (c) $a_n = \frac{7n^2+4}{3n^3+4n^2-5n+8}$ |
|---|--------------------------------------|---|

20 (1P) Addition von Limiten

Zeige: Wenn a_n den Limes a hat, und b_n den Limes b , dann hat die Folge der Summen, $a_n + b_n$, den Limes $a + b$.

21 (schwierig, 1P) Division von Limiten

(Nicht wirklich schwierig, aber lästiger als das vorherige Beispiel.)

Zeige: Wenn a_n den Limes a hat, und b_n den Limes b , und alle b_n sowie b ungleich 0 sind, dann hat die Folge der Quotienten, $\frac{a_n}{b_n}$, den Limes $\frac{a}{b}$.

22 (1P) Wachstumsraten

Welche der Folgen $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, welche konvergiert gegen ∞ ?

(D.h.: Wann wächst a_n schneller als b_n ?)

Als log können Sie ihren Lieblingslogarithmus verwenden, z.B. \log_2 oder \log_{10} oder \ln , das macht keinen Unterschied.

(a) $a_n := n^5, b_n := n^2$

(d) $a_n := \sqrt{n}, b_n := n$

(b) $a_n := \log(n), b_n := n$

(e) $a_n := \sqrt{n}, b_n := \log(n)$

(c) $a_n := n^{10}, b_n := 2^n$

(f) $a_n := 2^{-n}, b_n := \frac{1}{n}$

23 (1P) Häufungspunkte

Welche Häufungspunkte haben die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$? (Bei (f) können Sie ruhig raten, eine genauere Argumentation ist etwas schwieriger.)

(a) $a_n := n$

(c) $a_n := (-1)^n$

(e) $a_n := (-1)^n \frac{1}{n}$

(b) $a_n := \frac{1}{n}$

(d) $a_n := (-1)^n n$

(f) $a_n := \sin(n)$

24 (1P) Häufungspunkte und Beschränkung

(a) Geben Sie eine nach oben beschränkte Folge an, die keinen Häufungspunkt (in \mathbb{R}) hat.

(b) Geben Sie eine beschränkte Folge mit Folgengliedern in \mathbb{Q} an, die keinen Häufungspunkt in \mathbb{Q} hat.

25 (1P) Abgeschlossenheit der Häufungspunkte

Sei \bar{a} eine Folge und $r \in \mathbb{R}$. Zeige: Wenn beliebig nahe Punkte zu r Häufungspunkte sind, dann ist auch r Häufungspunkt.

D.h. Wenn $(\forall \epsilon > 0) (\exists s \in \mathbb{R}) (|s - r| < \epsilon \ \& \ s \text{ H.P.})$, dann r H.P.

26 (1P) Häufungspunkte

Gibt es eine Folge deren Häufungspunkte genau die angegebene Menge ist?

Sie müssen keine konkrete Folgen angeben, nur argumentieren dass es eine gibt oder dass es eben keine gibt.

Hinweis1: Verwende dass sowohl \mathbb{Z} als auch \mathbb{Q} abzählbar sind, und zwar so dass jedes Element unendlich oft vorkommt.

Hinweis2: Voriges Beispiel.

- (a) \mathbb{Z} (c) \mathbb{R} $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.
(b) \mathbb{Q} (d) $[0, 1]$ (das Intervall

Computereinsatz (Bonusbeispiele)**27 (Computer, 1P) Folgen plotten**

Plotten Sie (mit Punkten, optional linien dazwischen) die ersten 20 Elemente der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- (a) $a_n = n$ (b) $a_n = \frac{1}{n}$ (c) $a_n = 2^n$

28 (Computer, 1P) Rekursive Folge in numpy

Erzeuge die ersten 30 Elemente der Fibonacci-Folge ($a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$) und plotte sie.