(1) [8 Punkte] Man zeige durch vollständige Induktion, dass $9^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar ist.

(2) [$8 = 2$(a)+3(b)+3(c) Punkte] Im folgenden betrachten wir Wörter endlicher Länge, gebildet aus den Buchstaben a, b und c.

(a) Sei x_n die Anzahl aller solcher Wörter der Länge n. Wie groß ist x_n, für $n \in \mathbf{N}$?

(b) Sei y_n die Anzahl solcher Wörter der Länge n, in denen je zwei aufeinanderfolgende Buchstaben verschieden sind (d.h., die keine Teilwörter aa, bb oder cc enthalten). Wie groß ist y_n, für $n \geq 1$?
Hinweis: Man überlege sich, wie viele Möglichkeiten es für den 1. Buchstaben, dann den 2. Buchstaben, dann den 3. Buchstaben, etc. eines solchen Wortes gibt.

(c) Sei z_n die Anzahl solcher Wörter der Länge n, die keine zwei aufeinanderfolgende a und keine zwei aufeinanderfolgende b enthalten (d.h., die keine Teilwörter aa oder bb enthalten). Es läßt sich leicht zeigen, dass z_n die folgende Differenzengleichung erfüllt (braucht hier aber nicht nachgewiesen werden):

$$z_n = 2z_{n-1} + z_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad z_0 = 1, \quad z_1 = 3.$$

Man löse diese Differenzengleichung und ermittle so eine allgemeine Formel für z_n, $n \in \mathbb{N}$.

(3) [$8 = 4$(a)+4(b) Punkte] Gegeben sind die folgenden drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ w \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ w \\ w \end{pmatrix}, \quad \text{mit } w \in \mathbb{R}.$$

(a) Man bestimme alle Werte $w \in \mathbb{R}$ für welche die drei Vektoren linear abhängig sind.

(b) Für jeden dieser in Aufgabe (a) gefundenen Werte w gebe man eine **nicht-triviale Linearkombination** der drei Vektoren an, welche den Nullvektor liefert, d.h. man finde Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$, sodass

$$\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{z} = \vec{0}.$$

Anmerkung: Es wird verlangt, dass die Aufgaben mit den in der Vorlesung kennengelernten Methoden der Linearen Algebra systematisch gelöst werden und nicht durch "Herumprobieren"!

(4) [$8 = 3$(a)+2(b)+3(c) Punkte]

(a) Man formuliere die "Euler'sche Polyederformel" für planare Graphen. Die verwendete Notation muss unbedingt definiert werden!

(b) Man gebe das sogenannte "Handschlaglemma" für einfache ungerichtete Graphen an.

(c) Man formuliere für gerichtete Graphen den Satz, welcher charakterisiert, wann diese eine geschlossene Euler'sche Linie besitzen.

(5) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema "Relationen und Funktionen" (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen):

Wie ist eine Relation R zwischen den Mengen A und B formal definiert?
○ $R \subseteq A \cup B$ ○ $R \in A \times B$ $R \subseteq A \times B$ ○ $R \in A \setminus B$

Welche Eigenschaften muss eine Äquivalenzrelation besitzen?
○ transitiv ○ assoziativ ○ reflexiv ○ symmetrisch ○ antisymmetrisch

Jede Partition einer Menge A entspricht einer:
○ Kongurenzrelation ○ Halbordnungsrelation ○ Äquivalenzrelation

Der Graph $G(R)$ einer binären Relation R ist wie folgt gegeben:
Welche Eigenschaften besitzt diese Relation ?

○ reflexiv ○ antisymmetrisch ○ transitiv ○ symmetrisch

Eine Funktion $f : A \to A$, welche formal ja über eine binäre Relation $R = R_f$ definiert ist, erfüllt immer:
○ $((x_1Ry) \wedge (x_2Ry)) \Rightarrow x_1 = x_2$
$((xRy_1) \wedge (xRy_2)) \Rightarrow y_1 = y_2$
○ $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

Die Identische Relation (= Gleichheitsrelation) auf einer Menge A ist bekanntermaßen definiert mittels: $xRy \iff x = y$, für $x, y \in A$. Die Identische Relation ist immer eine:
○ Äquivalenzrelation ○ Halbordnungsrelation

Wie viele bijektive Abbildungen $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt es ?
○ n^n ○ 2^n ○ n^2 ○ $n!$

Sei $f : A \to B$ eine invertierbare Funktion, d.h., die Umkehrabbildung f^{-1} existiert.
Welche Eigenschaft(en) besitzt f dann sicherlich ?
○ f injektiv ○ f surjektiv