Einführungsthemen

Samstag, 20. Jänner 2024 14:45

Vollständige Induktion:

$P(n) \mid \underbrace{P(0)}_{\text{Induktionsanfang}} \wedge \underbrace{(\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1))}_{\text{Induktionsschritt}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: P(n)$

Beweis irrationale Zahl:

Bsp.: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$

$m^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow 2 \mid m^2$

m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade

↯, da m soweit kürzbar wie möglich

Polarkoordinatendarstellung:

$z = [|z|, \arg(z)] = [r, \varphi]$

Rechnen:

$[r \cdot s, \varphi + \psi] = [|z_1| \cdot |z_2|, \arg(\varphi) + \arg(\psi)]$

Primfaktorzerlegung:

$a \geq 1: a = 2^{\nu_2(a)} \cdot 3^{\nu_3(a)} \cdot 5^{\nu_5(a)} \cdots = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(a)}$

$\nu_p(a)$ ... wie oft pelP in Primf.zerl. vorkommt

Restklassen:

$\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} : a \in \mathbb{Z}\} = \overbrace{\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}}^{m \text{ Restklassen}}$

Additive/Multiplikative inverse Restklassen

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}$, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ $\quad$ ($\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{a} + \bar{a}^{-1} = \bar{0}$)

wann vorhanden? $\Rightarrow ggT(a, m) = 1$

Euklidischer Algorithmus:

$ggT(59, 11)$:

$59 = 11 \cdot 5 + 4$

$11 = 4 \cdot 2 + 3$

$4 = 3 \cdot 1 + 1$

$3 = \boxed{1} \cdot 3 + 0$

↓

$ggT(59, 11) = 1$

Kleiner Satz von Fermat:

$a^{(m)} \equiv 1 \bmod m$

$\rightarrow$ # invertierbaren Restklassen

a & m teilerfremd

Kongruenzen:

Rechnen:

•) $c \equiv a \bmod m$, $b \equiv d \bmod m$

$\Rightarrow a \overset{+}{-} b \equiv c \overset{+}{-} d \bmod m$

Beweis: $m \mid [(c-a) \pm (d-b)] = m \mid [(c \pm d) - (a \pm b)]$ ✓

(analog $\odot / \oslash$)

•) $\cancel{c} \cdot a \equiv \cancel{c} \cdot b \bmod m$

$\Downarrow$ Voraus.: $ggT(c, m) = 1$

$a \equiv b \bmod m$

Relationen:

$R \subseteq \underbrace{A \times B}_{\text{Relation zw. A und B}} = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

$A = B: R \subseteq A^2$ binäre Rel. auf A

$aRb :\Leftrightarrow (a,b) \in R$

Äquivalenzrelation auf A: $R \subseteq A^2$

•) R reflexiv: $\forall a \in R: aRa$

•) R symmetrisch: $\forall a, b \in R: aRb \Rightarrow bRa$

•) R transitiv: $\forall a, b, c \in R (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

Partition von A (=Zerlegung):

$(A_i)_{i \in I}$: •) $A_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$

•) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

•) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

S.: (A, R) ÄR auf A. Äquivalenzklassen in A bzgl. R bilden Partition:

$\{K(a) : a \in A\}$ bildet Part.

S.: $(A_i)_{i \in I}$ Partition von A

$\Rightarrow \tilde{K}(a)$ Menge A_j, sodass $a \in A_j$

$aRb :\Leftrightarrow \tilde{K}(a) = \tilde{K}(b) \rightarrow R$ ÄR auf A

• $K(a) \neq 0$

• $\bigcup_{a \in A} K(a) = A$

• $K(a) \cap K(b) = \emptyset$

alle A_i sind innerhalb A_i in Relation

Halbordnungen:

bin. Rel. auf A:

- R reflexiv
- R antisymmetrisch: $\forall a, b \in R: (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$
- R transitiv
- R "Ordnungsrel.", falls je 2 El. vergleichbar

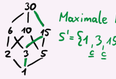
Bsp.: $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$

falls $\forall a, b \in A$: $aRb \vee bRa \Rightarrow$ Totalordnung

$(a \leq b \vee b \leq a)$

Hasse-Diagramm:

Bsp.: $T_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



Maximale Kette

$S' = \{1, 3, 15, 30\}$

$\leq \leq \leq$

Hausdorff'sches Maximalitätsprinzip:

$(H, \leq)$ HO; $S \subseteq H$; $(S, \leq)$ (TO) S Kette

$\Rightarrow \exists S' \subseteq H: S' \supseteq S$, sodass

$(S', \leq)$ maximale Kette

äquivalent zu Auswahlaxiom:

f: Auswahlaxiom*

$f: P(M) \setminus \emptyset \to M$

$A \in P(M) \setminus \emptyset$

$A \subseteq M$, $M \neq 0$

$f(A) \in A$, $f: A \to a$, $a \in A$

* man wählt ein Element aus dem Sack aus (kann ∞ groß sein)

Wohlordnungen:

$(H, \leq)$ TO

mit Eig.: jede nichtlere Teilmenge $S \neq 0$ besitzt Minimum

Bsp.: $(\mathbb{N}, \leq)$ TO

$\cancel{(\mathbb{Z}, \leq)}$ $\rightarrow$ kein Minimum

Lexikographische Ordnung:

$(m_1, n_1) < (m_2, n_2)$

$:\Leftrightarrow m_1 < m_2$ (nat. Ord.) oder

$m_1 = m_2 \wedge n_1 < n_2$ (nat. Ord.)

(äquivalent zu Auswahlaxiom)

Wohlordnungsprinzip:

Jede nichtleere Menge lässt sich "wohlordnen"

Transfinite Induktion

$(H, \leq)$ WO $\quad P(x)$ – gewisse Eig.

$\forall x \in H (\forall y < x: P(y) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \forall x \in H: P(x)$

Bsp.: * (Erweiterung von vollst. Induktion)

Funktionen/Abbildungen:

Tupel: (A, B, R_f)

A: Def.menge, B: Zielmenge, R_f: spez. Rel. zw. A und B

$f: A \to B$

•) injektiv: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

•) surjektiv: $\forall b \in B \, \exists a \in A: f(a) = b$

•) bijektiv: inj. & surj. $\rightarrow$ es ex. Umkehrfunktion

$g: B \to C$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

f & g inj./surj./bij. $\rightarrow g \circ f$ inj./surj./bij.

$f^{-1}: B \to A$ $\quad \forall a \in A, \forall b \in B$

$(f^{-1} \circ f)(a) = a$ $(= id_A)$ $\quad (f \circ f^{-1})(b) = b$ $(= id_B)$

$id_A: A \to A$, $id_A(a) = a$, $\forall a \in A$

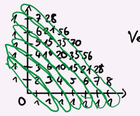
*

Rekursion $f(m,n) = f(m-1, n) + f(m, n-1)$, $m, n \geq 1$,

$(m \in \mathbb{N})$ $\quad f(m,n) = 1$, falls $m = 0$ oder $n = 0$

$\mathbb{N}^2$

$(\mathbb{N}^2, \leq)$ Wohlordnung



Vermutung: $f(m,n) = \binom{m+n}{n}$

$f(2,2)$ $\binom{2+2}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ ✓

$\left(0 \leq k \leq n: \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\right)$

I.S.: $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

I.V.: $(\tilde{m}, \tilde{n}) < (m,n)$: $P(\tilde{m}, \tilde{n})$, d.h. $f(\tilde{m}, \tilde{n}) = \binom{\tilde{m}+\tilde{n}}{\tilde{n}}$

I.B.: $P(m,n)$, d.h.: $f(m,n) = \binom{m+n}{n}$

• Fallunterscheid.:

• $m = 0$ $\quad P(0,n)$: $f(0,n) \overset{Def}{=} 1$

$\binom{0+n}{n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ ✓

• $n = 0$ $\quad P(m,0)$: $f(m,0) \overset{Def}{=} 1$

$\binom{m+0}{0} = \binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot m!} = 1$ ✓

• $m, n \geq 1$: I.V.: $f(m-1, n) = \binom{m-1+n}{n}$

$f(m, n-1) = \binom{m+n-1}{n-1}$

$f(m,n) \overset{Def}{=} f(m-1, n) + f(m, n-1) \overset{IV.}{=}$

$\binom{m-1+n}{n} + \binom{m+n-1}{n-1} =$

$\frac{(m-1+n)!}{n! \cdot (m-1)!} + \frac{(m+n-1)!}{(n-1)! \cdot m!} = \frac{(m+n-1)!}{n! \cdot m!}(m+n) = \frac{(m+n)!}{n! \cdot m!} = \binom{m+n}{n}$ ✓

Kombinatorik

Samstag, 20. Jänner 2024 14:45

Kombinatorik (7.11.- 14.11. / S.50-61)

Abzählende Kombinatorik:

"Regeln":

- Summenregel:
  $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$
- Produktregel:
  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- Gleichheitsregel:
  $\varphi: A \to B$ bijektiv
  $\Rightarrow |A| = |B|$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
$(0 \leq k \leq n)$

Anordnungsprobleme:

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $|A| = n$, $(x_1, \dots, x_k)$, $x_i \in A$

- "Variation mit Wiederholung" (ohne Einschränkung)

$|A^k| = |A| \cdot |A| \cdots |A| = n^k$

Bsp.: Toto $\{1, 2, X\}$ $|A| = 3$

$k = 12$ #Tototips $= 3^{12}$

- "Variation ohne Wiederholung" (mit Einschränkung)

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Bsp.: # Wörter Länge 4

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{26!}{22!}$

- Permutation einer Menge

$\#\text{Perm} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

- Permutation einer Multimenge

$A = \{a_1, \dots, a_1, a_2, \dots, a_2, \dots, a_n, \dots, a_n\}$
$= \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}\}$

$\#\text{Perm} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_n!}$

Bsp.: $A = \{B_1, B_2, W_1, W_2, W_3, S\}$

$\Rightarrow \frac{(2+3+1)!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$

Auswahlprobleme:

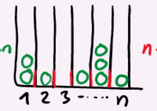
- "Kombination ohne Wdhg." (aus einer Teilmenge/Teilmultimenge)

$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

Bsp.: "6 aus 45"

- "Kombination mit Wdhg." (aus einer Teilmultimenge)

$\frac{(k+n-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \binom{k+n-1}{k}$



$\sum_{i=1}^{n} k_i = K$ → Komposition von K

00101101000010 → 01-Folge

Komp

$\hat{A} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}\}$

Schubfachprinzip:

n Objekte, k Schubladen, $n > k$

$\Rightarrow$ es gibt eine Schublade, die mind. $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ Objekte enthält
↳ aufgerundet

Partitionen (nochmals):

einer n-el. Menge in K nichtleere Teilmengen

Rekursionsformel: $M = \{1, 2, \dots, n+1\}$

$S_{n+1,K} = \underbrace{S_{n,K-1}}_{} + \underbrace{K \cdot S_{n,K}}_{}$ $S_{n,K}$ ... Stirlingszahlen 2. Art

2 Fälle

$\{n+1\}$ bildet Menge der Partition

$\{n+1\}$ in anderer Teilmenge
$\Rightarrow$ übrige El. $1, \dots, n$ bildet Part. in K Teilmengen

$S_{n,n} = 1$ $(n \geq 0)$ $S_{n,0} = 0$ $(n \geq 1)$

(Formel: $S_{n,K} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{K} (-1)^{k+j} \cdot \binom{K}{j} \cdot j^n$)

Bell-Zahlen:

$B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,K}$

Rekursionsformel: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot B_k$, $n \geq 0$, $B_0 = 1$

→ # d. Partitionen aus n-el. Menge

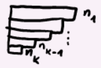
Bsp.: • $B_3 = 5$ (Part. aus $\{1, 2, 3\}$)

- Zahlpartitionen:

Darst. n als Summe pos. nat. Zahlen

$P(n)$ ... Partitionsfkt, $P(n,k)$ ... # Zahlpart. von n in k pos. Summen

o.B.d.A.: $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq n_k$



Ferrers-Diagramm

$1+1+1+1 = 4$
$1+1+2 = 4$
$1+3 = 4$
$2+2 = 4$
$4 = 4$

$n_k = 1$ $\Rightarrow$ # Mögl. $P(n-1, k-1)$

$n_k > 1$ $\Rightarrow$ # Mögl. $P(n-k, k)$

$\Rightarrow P(n,k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$, $0 \leq k \leq n$

Binomischer Lehrsatz:

Rekursionsformel: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Pascal'sches Dreieck:

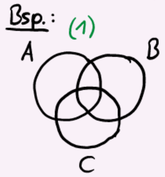
n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Inklusions-Exklusions-Prinzip:

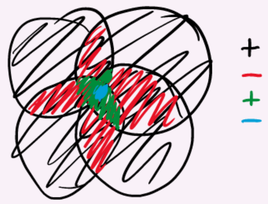
(Siebformel)

$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$

Bsp.: (1)



$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$
$+ |A \cap B \cap C|$



(2) # Zahlen aus $\{1, \dots, 100\}$, die durch 2, 3 od. 5 teilbar sind

$|A| = \lfloor \frac{100}{2} \rfloor = 50$, $|B| = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$, $|C| = \lfloor \frac{100}{5} \rfloor = 20$

(selbes Prinzip) $\Rightarrow$ 74

Eulersche φ-Funktion

$\varphi(m) = |\{1 \leq k \leq m : ggT(k,m) = 1\}|$

$m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ ... Primfaktorzerlegung

(Umformungen) $= \varphi(m) = m \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_i})$

Bei Primzahlen leicht ersichtlich: $\varphi(p^k) = p^k \cdot (1 - \frac{1}{p})$

Bsp. $\varphi(5) = 5 \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 4$

Graphentheorie

Donnerstag, 11. Jänner 2024 15:27

Graphentheorie (14.11.-/23.11. /S.59-80?):

Graph: $G=(V,E)$

Knoten, Kante ($e \in E$)

gerichtet: $e=(x,y)$, $x,y \in V$ (geordnetes Paar)

ungerichtet: $e=\{x,y\}$, $x,y \in V$ (Menge)

Bsp.:

Bsp.: (=xy)

Handschlaglemma: $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$ $\quad \sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$

Graph schlicht/einfach
→ keine Schlinge, Mehrfachkante

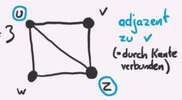
$\Gamma(x)$ = Nachbarn von x ($\Gamma^-(x)$ = Vorgänger, $\Gamma^+(x)$ = Nachfolger)

$d(x) = |\Gamma(x)|$ = # Nachbarn von x

$d^-(x)$ = Hingrad

$d^+(x)$ = Weggrad

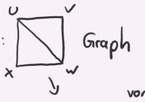
Bsp.: $d(v)=2$, $d(u)=3$



adjazent zu v (= durch Kante verbunden)

weitere Begriffe:

G:



Graph

Teilgraph (V',E')

von Knoten $\{y,w,x\}$ induzierte Teilgraph (alle Knoten werden miteinander verbunden)

K_4:

Knoten einfügen

Unterteilungsgraph von K_4

Kantenfolge: (KF)

$e_0 \neq e_n$ offene KF

$e_0 = e_n$ geschl. KF

($e \in E$)

Kantenzug: (KF, keine Kante doppelt) & jeder Knoten nur 1x

	ungerichtet	gerichtet
offen	Weg	Bahn
geschl.	Kreis	Zyklus

wenn KF ex.
→ es ex. Weg

$A^2 = A \cdot A$ (= 2 Kanten)

A^2 → zeigt # d. KF mit Länge 2 von v_i nach v_j

A^k → -"- Länge k -"-

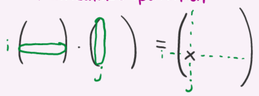
Erreichbarkeit best.:

$C = A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + A^{\min(|V|-1,E)}$

→ $c_{ij}=0$ → v_j von v_i nicht erreichbar

$c_{ij} \neq 0$ → v_j von v_i erreichbar

Matrizenmultiplikation



Adjazenzmatrix: $G=(V,E)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|V|=n$

$V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $A=(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

(G ohne Mehrfachk.) $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \boxed{a_{ij}} & \\ & & \end{pmatrix}$ $\quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i,v_j) \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

(G auf Mehrfachk.) - es gibt K-Kanten von v_i nach v_j

$v_i \to v_j$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \sum_{j=1}^{n} = a_{ij} = d^+(v_i) \text{ (hier: } v_2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} = a_{ij} = d^-(v_j) \text{ (hier: } v_4)$$

Zusammenhang

schwach

stark

Satz von Menger:

max # kantendisj. Wegen von u nach v
=
min # Kanten, die entfernt werden müssen, sodass u und v separiert

Baum: (kein Kreis)

Bsp.:

Wald (besteht aus Bäumen)

$G=(V,E)$

$|V(G)| = 1 + |E(G)|$

$\alpha_0(G) = |V|$

$\alpha_1(G) = |E|$

Wurzelbaum

Wald, der aus K-Bäumen besteht: $\alpha_0(W) = \alpha_1(W) + K$

DAG (directed acyclic graph):

Bsp.:

$d^+=0$

→ $\exists v \in V$ mit $d^+(v)=0$

Eulersche & Hamiltonsche Linie:

E.L.: KF, wo jede Kante genau 1x benutzt

	ungerichtet	gerichtet	
→ bes. geschl. E.L.:	•) $d(v) \equiv 0 \bmod 2$ •) G zus.	•) $d^+(v) = d^-(v)$ •) G schwach zus. (Bew. in Vorlesung)	→ $\forall v \in V$
→ bes. offene E.L.:	•) $d(v) \equiv 0 \bmod 2$ •) $d(v_1) \equiv d(v_2) \equiv 1 \bmod 2$ •) G zus.	•) $d^+(v) = d^-(v)$ •) $d^+(v) = d^-(v)+1$, → Startpunkt; $d^-(v) = d^+(v)+1$ → Endpunkt •) G schwach zus.	→ $\forall v \in V \setminus \{v_1, v_2\}$

zus. ... zusammenhängend

H.L.: KF, wo jeder Knoten genau 1x benutzt (außer AK = EK) (Anfangsknoten, Endknoten)

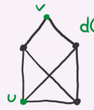
Satz von Ore: $G(V,E)$ einf. ung.,

wo gilt: $uv \notin E(G)$ (2 Knoten)

→ $d(u) + d(v) \ge |V(G)| (=: n)$

⇒ $\exists$ eine geschl. H.L.

(wenn nicht erfüllt ⇏ ¬ H.L.)



$d(u) + d(v) \ge |V|$

$3 + 2 \ge 5$ ✓

Planare Graphen: (kreuzungsfrei) zusätzlich $\alpha_2(G)$ = # der Gebiete

Linien kreuzen sich nicht (außer bei Knoten)

Eulersche Polyederformel: G zus. planar

(good to know:) stereographische Projektion: 3dim. Objekt auf Ebene projezieren

→ $\alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G) = 2$ (Beweis in Vorlesung)

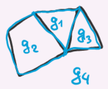
Erweitert: G planar, K Zusammenhangskompon.

→ $\alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G) = K+1$

Bsp.:

$K=3$

$\alpha_0(G)=9$, $\alpha_1(G)=9$, $\alpha_2(G)=4$ ⇒ $9-9+4=3+1$ ✓



$\sum_{g \text{ Gebiet}}$ # Kanten, die g berenden $= 2 \cdot |E|$

NICHT-Planare Graphen:

Bsp.: K_5:

$K_{3,3}$:

Satz von Kuratovski:

Graph planar, wenn kein Teilgraph von K_5 oder $K_{3,3}$

Vierfarbensatz:

min # Gebiete, um benachbarte unterschiedlich einzufärben : 4

Netzwerke: (kantenbewertete Graphen)

Bewertungsfkt.: $w: E \to \mathbb{R}$

$e \in E$, $w(e)$... Wert (= Gewicht, Länge, Kapazität) der Kante e

$G=(V,E)$ zus. einf. ung.:

•) spannender Baum $T=(V',E')$ von G ist Baum mit $V=V'$ (& $E' \subseteq E$)

$G=(V,E)$ einf. ung.:

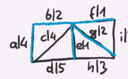
•) spannender Wald bzw. Gerüst $W=(V',E')$ von G ist Wald mit $V=V'$ (& $E' \subseteq E$) & Zus.komp. wie urspr. Graph

Gewicht eines Gerüstes: $w(W) = \sum_{e \in W} w(e)$

Kruskal Algorithmus:

- Kanten nach Gewicht aufsteigend sortieren

Bsp.:



el1, fl1, bl2, gl2, ~~il2~~, ~~bl3~~, al4, ~~cl4~~, ~~gl4~~

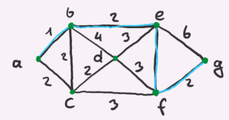
→ solange kein Kreis

→ kleinstes Gewicht

Dijkstra Algorithmus:

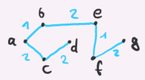
- kürzeste Weg/Bahn zw. Knoten / von Startknoten zum Rest

$d(v,w)$ ... Länge des kürzesten Weges von v nach w



Initial.

	a	b	c	d	e	f	g	ausgew. Knoten	Vorgänger Knoten
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	a	—
1		1	2	∞	∞	∞	∞	b	a
			2	5	3	∞	∞	c	a
				∞	∞	5	∞	e	b
				4	3	4	9	d	c
						4	9	f	e
							6	g	f



Entfernungsbaum

□... endgültig bewertet

O... Weg wäre länger als vorher gefundener Weg = ert bleibt stehen

—... Weg kein Nachbar, aber wurde vorher schon gefunden => hinschreiben

Algebraische Strukturen

Donnerstag, 11. Jänner 2024 20:57

Algebraische Strukturen (23.11.-5.12. / S.80-96)

(Menge, Operationen)

mittlere Menge A ($\neq \emptyset$)

- binäre Operation $\circ$: $A \times A \to A$

Bsp.: $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, ...
$(\mathbb{Z}_m,+)$, $(\mathbb{Z}_m,\cdot)$
$(P(M),\cap)$, $(P(M),\cup)$

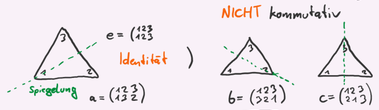
$(A,\circ)$: binäre alg. Struktur (= Gruppoid)

(i) assotiativ → Halbgruppe
(ii) Existenz eines neutr. El. → Monoid
(iii) Existenz von inv. El. → Gruppe
(iv) kommutativ → abelsche Gruppe

Gruppe:

Bsp.: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ $(S_n,\circ)$ symm. Gruppe (Hintereinanderschl. von Abb.)
$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$
$(P(M),\triangle)$ sym. diff.
Menge aller Permutationen auf $\{1,\dots,n\}$
$(\mathbb{R}^{n\times n},+)$ → $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$(S_3,\circ)$ $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $a=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$,
$f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$
$f=f^1=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=g$ $g^{-1}=f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$
$a\circ b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=f$, $b\circ a=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=g$
NICHT kommutativ



Drehung: $\circlearrowleft\triangle\circlearrowright$ → $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

Operationstafel:

$\circ$	e	a	b	c	f	g
e	e	a	b	c	f	g
a	a	e	f	g		
b	b	g	e	f		
c	c	f	g	e		
f	f				g	
g	g				e	f

$a\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=b$

Permutationen:
$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&7&6&4&3&1&2\end{pmatrix}$ $\pi\in S_7$
$\pi=(1\,5\,3\,6)(2\,7)(4)$ → Zyklendarstellung

Vorzeichen von Permutation:
$\operatorname{sgn}(\pi)=\prod_{1\le i\le j\le n}\frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}$ ("signum") $=$ # "Fehlstellungen"

$\boxed{a\circ x=b}$ $\boxed{y\circ a=b}$
→ $a^{-1}\circ(a\circ x)=a^{-1}\circ b$
$(a^{-1}\circ a)\circ x=a^{-1}\circ b$
→ $x=a^{-1}\circ b$ $y=b\circ a^{-1}$

Untergruppe einer Gruppe:

$(G,\circ)$, $(U,\circ)$, $U\subseteq G$:

- $U\neq\emptyset$
- $\circ: U\times U\to U$ (Abgeschlossenheit)
- $a\in U\to a^{-1}\in U$

(• assoz.
• ex. eines neutr. El.)

Bsp.:

$(P(M),\triangle)$ $M=\{a,b\}$

$\triangle$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$

triviale Untergruppe: $(\{e\},\circ)$, $(G,\circ)$ (1, 4)

weitere UG: $U_1=\{\emptyset,\{a\}\}$, $U_2=\{\emptyset,\{b\}\}$, $U_3=\{\emptyset,\{a,b\}\}$ (2)

Ordnung: $\operatorname{ord}(G)=|G|$ (# El.)

Linksnebenklasse: $a\circ U=\{a\circ u \mid u\in U\}$
Rechtsnebenklasse: $U\circ a=\{u\circ a \mid u\in U\}$

(# Nebenklassen · # El. v. U = # El. v. G)
$\operatorname{ord}(U)\mid\operatorname{ord}(G)$
Satz von Lagrange

zyklische UG:

Was ist kleinste Gruppe mit $a\in G$?

1) $a^k\neq a^l$, $k\neq l$
$U=\{a^n, n\in\mathbb{Z}\}$ → keine Wdh. d. El.
⇒ $(U,\circ)$ Kopie von $(\mathbb{Z},+)$

2) $a^k=a^l$, $k\neq l$ $(k<l, n=l-k)$ aus n El. → Wdh. d. El.
⇒ $\operatorname{ord}_a(a)=\min\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}: a^n=e\}$

Bsp.: $f=\langle(123)\rangle=\{(123),(132),(1)(2)(3)\}$
f f^2 $f^3=e$

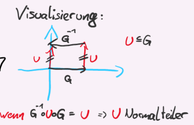
* $\operatorname{ord}_a(a)=\operatorname{ord}(\langle a\rangle)$
es gilt: $a^{\operatorname{ord}(a)}=e$
(a^n (n, bis Wdh. auftritt) = neutr. El.)

zyklisch, wenn: $\exists a\in G: \langle a\rangle=G$

Bsp.: $(\mathbb{Z}_m,+)$: $\langle\bar1\rangle=\{\bar1,\bar2,\bar3,\bar0\}=G$ ✓
$\langle\bar2\rangle=\{\bar2,\bar0\}\neq G$ ✗

Kleiner Satz v Fermat: $a^{|G|}=e$

Visualisierung:



wenn $G^{-1}\circ U\circ G=U$ ⇒ U Normalteiler

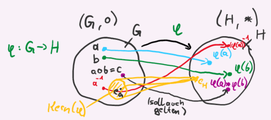
Normalteiler: $a\circ N=N\circ a$
LNK RNK

rechnen mit Nebenklassen:

Vor.: abelsche Gruppe G: (U UG)
$(a\circ U)\circ(b\circ U):=(a\circ b)\circ U$ – wohldef.

Faktorgruppe: $(G/N,\circ)$ $(N\subseteq G, a\in G)$
Bsp.: $N=\{e,f,g\}$ Menge aller Nebenklassen LNK
$a\circ N=\{a\circ e, a\circ f, a\circ g\}=\{a,b,c\}$ ✓
$N\circ a=\{e\circ a, f\circ a, g\circ a\}=\{a,c,b\}$ RNK
endl. Gruppe
$(|G/N|=\frac{|G|}{|N|}=|G:N|)$

Strukturverträgliche Abb.:



Homomorphismus:

$\varphi(a\circ b)=\varphi(a)*\varphi(b)$

Bsp.: $(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$
$\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\varphi(n)=i^n$
$\varphi(n+m)=i^{n+m}$ $\varphi(n)\cdot\varphi(m)=i^n\cdot i^m=i^{n+m}$

$(\mathbb{Z}_3,+)$, $G=\{e,f,g\}$ ($\to$ Drehungen von vorhin)
φ: $e\mapsto\bar0$, $f\mapsto\bar1$, $g\mapsto\bar2$ isomorph: φ Homomorphie + φ bijektiv

Kern von φ:

$\varphi(G)=\{a\in G: \varphi(a)=e_H\}$ $(=\varphi^{-1}(e_H))$

- (1) Normalteiler von G $(\operatorname{Ker}(\varphi)\overset{(1)}{\trianglelefteq}G)$
→ $c^{-1}\circ a\circ c\in\operatorname{Ker}(\varphi)$, $\forall a\in\operatorname{Ker}(\varphi)$ → LNK = RNK ✓
- $\operatorname{Ker}(\varphi)\leq G$ ($\leq$ Untergruppe)

→ – $\operatorname{Ker}(\varphi)\neq\emptyset$, da $e_G\in\operatorname{Ker}(\varphi)$
– $a,b\in\operatorname{Ker}(\varphi)\Rightarrow a\circ b\in\operatorname{Ker}(\varphi)$ $\varphi(a)*\varphi(b)=e_H$
– $\varphi(a^{-1})=(\varphi(a))^{-1}$

Bild von G:

$\{\varphi(a)\mid a\in G\}$

- $\varphi(G)\leq H$ ($=$ Untergruppe)

Bsp.: $(\mathbb{Z},+)\xrightarrow{\varphi}(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $\varphi(n)=i^n$ $(n\in\mathbb{Z})$
$e_H=1\to\operatorname{Ker}(\varphi)=4\cdot\mathbb{Z}$
Faktorgruppe: $\mathbb{Z}/4\cdot\mathbb{Z}$
$(\varphi(\mathbb{Z}),\cdot)\cong(\mathbb{Z}_4,+)$ isomorph

Homomorphiesatz: $\varphi: G\to H$ Homomorph.
$\psi: G/\operatorname{Ker}(\varphi)\to\varphi(G)$ ("psi")
$a\circ\operatorname{Ker}(\varphi)\overset{\psi}{\longmapsto}\varphi(a)$

→ Isomorphismus: $G/\operatorname{Ker}(\varphi)\cong\varphi(G)$

- ψ wohldef.?:
$a\circ\operatorname{Ker}(\varphi)=b\circ\operatorname{Ker}(\varphi)\overset{?}{\Rightarrow}\varphi(a)=\varphi(b)$
$a\circ u_1=a\circ u_2$ $u_1,u_2\in\operatorname{Ker}(\varphi)$
→ Homomorphismus anw. → $\varphi(a)=\varphi(b)$ ✓
- ψ surj.?: $\varphi(a)\in\varphi(G)$: $\psi(a\circ\operatorname{Ker}(\varphi))\overset{\text{per Def.}}{=}\varphi(a)$ ✓
- ψ inj.?: $\varphi(a)=\varphi(b)\Rightarrow\varphi(a)*(\varphi(b))^{-1}=e_H$
$a\circ\operatorname{Ker}(\varphi)=b\circ\operatorname{Ker}(\varphi)$ ✓ $\varphi(a\circ b^{-1})$ $\in\operatorname{Ker}(\varphi)$
- Homomorphie erfüllt?: (wird nicht abgefragt zu beweisen)

$\psi((a\circ\operatorname{Ker}(\varphi))\circ(b\circ\operatorname{Ker}(\varphi)))=\psi(a\circ\operatorname{Ker}(\varphi))*\psi(b\circ\operatorname{Ker}(\varphi))$
$(a\circ b)\circ\operatorname{Ker}(\varphi)=\varphi(a\circ b)$ $=\varphi(a)$ $\varphi(b)$ ✓

Symmetrie: $(S_n,\circ)$, $\pi\in S_n$

Gruppe

$\operatorname{sgn}(\pi)=\prod_{1\le i\le j\le n}\frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}$ $(=(-1)^{\#\text{Fehlstände}})$

$\operatorname{sgn}: S_n\to\{1,-1\}$ ("sigma")
Homomorphismus
$\operatorname{sgn}(\pi\circ\sigma)=\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(\sigma)$

φ = sgn $\operatorname{Ker}(\varphi)=\{\pi\in S_n: \operatorname{sgn}(\pi)=1\}$ "geraden Permutationen" → bilden selbst Untergruppe $(A_n,\circ)$ (alternierende Gruppe)

Ringe, Körper:

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$: $(\mathbb{Z},+)$ dominante Gruppe
$(\mathbb{Z},\cdot)$ (mind.) Halbgruppe

Ring: $(R,+,\cdot)$

(i) $(R,+)$ kom. Gr.
(ii) $(R,\cdot)$ Halbgr.
(iii) distr. bzgl. +

Bsp.: $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$
$(\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot)$

- falls komm. ⇒ komm. Ring
- falls
  - neutr. El. bes. (neutr. El. bzgl. Multiplikation)
    → 1-El. ⇒ Ring mit 1-Element
  - neutr. El. bzgl. 0: "0-Element" (neutr. El. bzgl. Addition)

Polynome mit Koeff. in R:

$a(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\dots+a_n\cdot x^n$ $n\in\mathbb{N}, a_i\in R$ → Polynom
$R[x]=\{a(x)=a_0+\dots+a_n x^n, n\in\mathbb{N}, a_i\in R\}$

$(R[x],+,\cdot)$: $a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$, $b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ → für endlich viele Koeff. $a_n\neq0$

(R[[x]]) formale Potenzreihe

$a(x)\cdot b(x)=a_0\cdot b_0+(a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0)x+(a_0\cdot b_2+a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_0)\cdot x^2+\dots$
$=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot b_{n-k})\cdot x^n$

Kürzungsregel:
$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\cancel{c}\cdot a=\cancel{c}\cdot b$, $c\neq0$
$a=b$
(Ausnahmen: $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$: $\bar2\cdot\bar2=\bar2\cdot\bar0$, $\bar2\neq\bar0$)

Nullteiler: $a,b\in R$, $a\neq0$, $b\neq0$
falls $a\cdot b=0$ → a,b Nullteiler

Integritätsring: Ring, wo kein Nullteiler ex.

$(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$: im allg. kein Integritätsring, keine Primzahl

$(R,+,\cdot)$: $R^*=\{a\in R: \text{es ex. } a^{-1}\in R\}$
Menge der "Einheiten"
Bsp.: $\mathbb{Z}^*=\{1,-1\}$, $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

$(R^*,\cdot)$ komm. Gr. $a\in R^*\Rightarrow a^{-1}\in R^*$ $((a^{-1})^{-1}=a)$
$a,b\in R^*\Rightarrow a^{-1}b^{-1}\in R^*$
$\Rightarrow(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$ $(=a^{-1}\cdot b^{-1})$

Körper:

- komm. Ring
- 1-El. $\neq0$
- $\forall a\in R\setminus\{0\}: a^{-1}\in R$

Bsp.: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$
$(\mathbb{C},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ endlicher Körper, $p\in P$
$\mathbb{Z}_m$: invertierbar, wenn $ggT(k,m)=1$

- Jeder Körper ist Integritätsring:
arg. $a\neq0$ $a\cdot b=0$ $|a^{-1}$
$\Rightarrow b=a^{-1}\cdot0=0$
⇒ Integritätsring ✓

- Jeder endliche Integritätsring ist ein Körper:
$a\in R\to a^{-1}\in R$: zu zeigen
$R=\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$
$a\in R$, $a\neq0$
$a\cdot R=\{a\cdot r_1,a\cdot r_2,\dots,a\cdot r_n\}$
es gilt $a\cdot r_i\neq a\cdot r_j$, $i\neq j$
arg.: $a\cdot r_i=a\cdot r_j$
$\Rightarrow|a\cdot R|=|R|$
$r_i=r_j$, $a\cdot R\in R=\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$
es kommen wieder alle El. hinaus

S.: es ex. nur endl. Körper für best. Mächtigkeiten
$q=p^n$ $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p\in P$

Konstruktion endl. Körper mit $q=p^n$ El.:

→ betr. Polynome $\mathbb{Z}_p[x]$ $p\in P$
& modulo eines irreduziblen Polynoms $m(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$ rechnen
⇒ wie wählt man $m(x)$?

$m(x)=a(x)\cdot b(x)$ ⇒ grad $a(x)=0\vee$ grad $b(x)=0$
es gilt: $0<$ grad $a(x)$, grad $b(x)<$ grad $m(x)$

Bsp.: $m(x)=2x^2+4$
$\underbrace{2\cdot(x^2+2)}_{\text{Grad dieselbe wie } m(x)}\mid 2\cdot(x+\sqrt{2}i)\cdot(x-\sqrt{2}i)$
in $\mathbb{R}$ irreduzibel, in $\mathbb{C}$ NICHT irreduzibel

allg. Beschreibung:

K Körper ⇒ Polynomring über K: $K[x]$ (Integritätsring)

$a(x)\neq0$ $a(x)=(a_k\cdot x^k+\dots)$ $m(x)\in K[x]$
$b(x)\neq0$ $b(x)=(b_l\cdot x^l+\dots)$ grad $m(x)\geq1$
⇒ $a(x)\cdot b(x)=\underbrace{a_k\cdot b_l\cdot x^{k+l}}_{\neq0}+\dots$

- in $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z},+)$ Gruppe
→ $m\cdot\mathbb{Z}$ Untergruppe → Normalteiler
Nebenklasse: $\bar a=a+m\cdot\mathbb{Z}$ $=\{a+m\cdot\mathbb{Z}, a\in\mathbb{Z}\}$
Faktorgruppe: $\mathbb{Z}/m\cdot\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_m$ (Menge aller Nebenklassen)
"mod" ←

- in $K[x]$: $(K[x],+)$ Gruppe
→ $m(x)\cdot K[x]=\{m(x)\cdot a(x), a(x)\in K[x]\}$
Normalteiler
$\overline{a(x)}=a(x)+m(x)\cdot K[x]$

$K[x]/m(x)\cdot K[x]$ → Faktorring
wenn $m(x)$ irreduzibel über K ⇒ Körper

(Modulo-rechnen:
- in $\mathbb{Z}$: „Division mit Rest"
- in $K[x]$: „Polynomdiv. mit Rest":

Bsp.: $K=\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2[x]$
(1) $m(x)=x^2+\bar1$ → kein Körper → $m(x)$ reduzibel
(2) $x^2+x+\bar1$ → Körper)

Verbände, Boolesche Algebra:

Strukturen mit 2 bin. Operationen, die keine Ringe sind

Bsp.: $(B=\{0,1\},\wedge,\vee)$, $(P(M),\cap,\cup)$, (T_m,ggT,kgV)

$B^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n): x_i\in B=\{0,1\}\}: (B^n,\wedge,\vee)$

Eigenschaften:

- $(A,\wedge)$
- $(A,\vee)$ komm. Halbgruppe
- Verschmelzungsgesetz

⇒ Verband

Halbordnungen: $(M,\leq)$

Bsp.: $T_{20}=\{1,2,4,5,10,20\}$

Hasse-Diagramm

Infinium $c=\inf(a,b)$:⟺ (i) $c\leq a\wedge c\leq b$
$c\in A$ „Größte untere Schranke" (ii) $\forall d\in A$ mit $d\leq a\wedge d\leq b$ ⇒ $d\leq c$

Supremum $\bar c=(a,b)$:⟺ (i) $a\leq\bar c\wedge b\leq\bar c$
$\bar c\in A$ „Kleinste obere Schranke" (ii) $\forall d\in A$ mit $a\leq d\wedge b\leq d$ ⇒ $\bar c\leq d$

S.: Verband $(A,\wedge,\vee)$ ⇒ bin. Rel. $(A,\leq)$
$a\leq b:\Leftrightarrow a\wedge b=a$
⇒ dann gilt: $(A,\leq)$ HO, wo je 2 El. a,b ein
Infinum $\inf(a,b)=a\wedge b$
Supremum $\sup(a,b)=a\vee b$

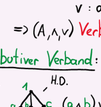
Bsp.:

kein Verband

S.: $HO(A,\leq)$, wo je 2 El. a,b ein $\inf(a,b)$ & $\sup(a,b)$ bes.
⇒ bin. Op. $\wedge: a\wedge b:=\inf(a,b)$
$\vee: a\vee b:=\sup(a,b)$
⇒ $(A,\wedge,\vee)$ Verband

distributiver Verband:

Bsp.:



$\vee$: ↑
$\wedge$: ↓

$(a\wedge b)\vee c=c$
$(a\vee c)\wedge(b\vee c)\neq$ → kein distr. Verband
$\wedge 1$ $\wedge 1=1$

Boolesche Algebra:

$(A,\wedge,\vee)$ distr. Verband:

- $(A,\wedge)$ bes. neutr. El. 1
  $(A,\vee)$ bes. neutr. El. 0
- Komplement für jedes $a\in A$ gibt es $a'\in A$ (Komplement von a) mit d. Eig.: $a\wedge a'=0$, $a\vee a'=1$
- Regeln trivial (→ V05.12.)

endl. Boolesche Algebra:

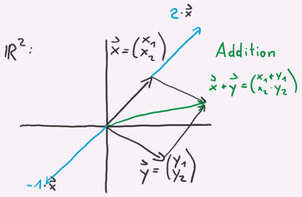
jede endl. B.A. isomorph zu $(B^n,\wedge,\vee)$
$M=\{m_1,m_2,\dots,m_n\}$
$\{m_2,m_3,m_5\}\Rightarrow2^n$
$\Updownarrow$
$(0,1,1,0,1,0,\dots)$

Vektorräume

Freitag, 12. Jänner 2024 20:55

Vektorräume (7.12.-15.12./S.101-125)

$\mathbb{R}^2$:



Addition

$\vec{x}+\vec{y}=\binom{x_1+y_1}{x_2+y_2}$

Skalarmultiplikation

Körper: $K^n=\{\vec{x}=\binom{x_1}{\vdots}{x_n} \mid x_i\in K\}$ ... Vektorraum über K

alg. Struktur: $(V,+,K)$

- $(V,+)$ ... komm. Gruppe
- Skalarmult.
- Verträglichkeitsgesetze:
  - $\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$

  ⋮

Polynome über Körper K

$(K_{[x]},+,K)$ ... Vektorraum

$a(x)=\sum_{n=0} a_n\cdot x^n$, $b(x)=\sum_{n=0} b_n\cdot x^n$

$\Rightarrow a(x)+b(x)=\sum_{n=0}(a_n+b_n)\cdot x^n$

$\lambda\cdot a(x)=\sum_{n=0}(\lambda\cdot a_n)\cdot x^n$

$V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ - Menge aller reellen Fkt.

$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$

$(\lambda\cdot f)(x):=\lambda\cdot f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$U=\{\vec{x}: x_1+x_2=0\}$:

$(x_1+x_2)=1$ Nebenraum

$x_2=1-x_1$

$\vec{x}\in U$, $\vec{y}\in U$ $\vec{z}=\binom{z_1}{z_2}$

$\Rightarrow \vec{x}+\vec{y}\in U$

$x_1+x_2=0$

$y_1+y_2=0$

$\Rightarrow \underbrace{(x_1+y_1)}_{z_1}+\underbrace{(x_2+y_2)}_{z_2}=0$

$\underbrace{(U,+,\mathbb{R})}$ ... bildet selbst Vektorraum

Unterraum von V, $U\leq V$ (Teilraum)

Unterraumkriterien: V Vektorraum

- $U\neq\emptyset$
- $\vec{x}+\vec{y}\in U$, $\forall\vec{x},\vec{y}\in U$ (Abgeschl. bzgl.+)
- $\lambda\cdot\vec{x}\in U$, $\forall\lambda\in K, \forall\vec{x}\in U$ (Abgeschl. bzgl.·)

$\Rightarrow U\leq V$

Bsp. $\mathbb{R}^3$:

$(\mathbb{R}^3,+,\mathbb{R})$: $x_1+2x_2+3x_3=0$ Ebene in $\mathbb{R}$

$W=\{\vec{x}=\binom{x_1}{x_2}{x_3} : x_1+2x_2+3x_3=0\}$

Unterraum von $V=\mathbb{R}^3$

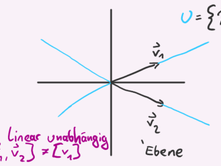
Nebenraum: $V=\mathbb{R}^3$

$\vec{a}+W$, $a\in V$

Ortsvektor, Richtungsvektor

$\vec{x}=\binom{x_1}{x_2}{x_3}=\binom{0}{1}+x_1\cdot\binom{1}{-1}=\underbrace{\binom{0}{1}\cdot\lambda\cdot\binom{1}{-1}}_{\text{Parameterdarstellung}}$ $\lambda\in\mathbb{R}$

$U=\{\lambda\cdot\vec{v} : \lambda\in K\}$ bildet Vektorraum

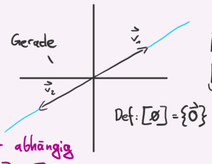


$\vec{v}_1, \vec{v}_2$

$\underbrace{\lambda_1\cdot\vec{v}_1=\lambda_2\cdot\vec{v}_2}_{\text{Linearkombination von } v_1 \,\&\, v_2}$

Linear unabhängig $[\vec{v}_1,\vec{v}_2]\neq[v_1]$

Ebene



$[v_1,v_2]=\{\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\lambda_2\cdot\vec{v}_2\}$

$[v_1,\dots,v_k]=\{\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k\}$

= Lineare Hülle von $\vec{v}_1\dots\vec{v}_k$

Def: $[\emptyset]=\{\vec{0}\}$

linear abhängig

$[\vec{v}_1,\vec{v}_2]=[v_1]$

$\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\in V$:

- Linearkombination: Koeffizienten

  $\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\lambda_2\cdot\vec{v}_2+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k\in V$, $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in K$

- triviale Lin.komb., falls $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_k=0$

  $\Rightarrow$ nulltrivial (sonst nicht-trivial)

$M\neq\emptyset$, $M\subseteq V$:

$[M]$ ... Lineare Hülle von M

$\Rightarrow$ Menge aller Lin.komb. von (endl. vielen) Vektoren aus M

Def.: $[\emptyset]=\{\vec{0}\}$

$[M]$ ... kleinster Unterraum von V, der alle Vektoren aus M enthüllt

- Lineare Unabhängigkeit (Basis):

(1) Vektor $\{\vec{x}_1\dots\vec{x}_k\}$ Lin. unabh., falls:

$\forall\vec{v}\in M: \vec{v}\notin[M\setminus\{\vec{v}\}]$

(2) - // - Lin. abh., falls:

$\exists\vec{v}\in M: \vec{v}\in[M\setminus\{\vec{v}\}]$

Bsp.: $\vec{a}=\binom{2}{-1}$, $\vec{b}=\binom{1}{-2}$, $\vec{c}=\binom{0}{-3}$

$\to$ Lin. abh., da $\vec{a}-2\cdot\vec{b}=\vec{c}$

$0=\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$ - nichttriviale Lin.komb., die $\vec{0}$ erzeugt

ang.: $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ lin. abhängig

d.h.: $\exists j$: $\vec{v}_j=\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\dots+\lambda_{j-1}\cdot\vec{v}_{j-1}+\lambda_{j+1}\cdot\vec{v}_{j+1}+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k$

$\Rightarrow \underbrace{\vec{0}=\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\dots\overset{(-1)}{\ominus}\vec{v}_j+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k}_{\text{nichttriv. Linearkomb., die } \vec{0}\text{-Vektoren erzeugt}}$

ang.: nichttriv. L.K., die $\vec{0}$-V. erzeugt

$\vec{0}=\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\dots+\underbrace{(\lambda_j)}_{\neq 0}\cdot\vec{v}_j+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k$

$\Rightarrow \vec{v}_j=-\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\cdot\vec{v}_1-\dots-\frac{\lambda_k}{\lambda_j}\cdot\vec{v}_k$

$\Rightarrow$ Lin. Abh.

S_1: $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k$ genau dann lin. unabh., wenn mittlere LK. gibt, die $\vec{0}$ erzeugt

$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0) \Rightarrow \lambda_1\vec{x}_1+\dots+\lambda_k\vec{x}_k=\vec{0}$

- // - lin. abh., falls

$\lambda_1\vec{x}_1+\dots+\lambda_k\vec{x}_k=\vec{0} \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_k=0$

Lineares Gleichungssystem:

Bsp.:

$$\boxed{\begin{aligned} 2\cdot\lambda_1+1\cdot\lambda_2+0\cdot\lambda_3&=0\\ 1\cdot\lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3&=0\\ -\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3&=0\end{aligned}}$$

$\to$ Gibt es Lösungen außer $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

(Hier: ✓) $\Rightarrow$ Lin. abh.

$(K^n,+,K)$: $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, ..., $\vec{e}_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ kanonische Basis

Lin. unabh.

Halbdiagonalform, Stufenform:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}\neq 0\\ \ast\\ \ast\\ \ast\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\ \neq 0\\ \ast\\ \ast\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \boxed{\neq 0}\end{pmatrix}$

$\lambda_1\cdot\vec{a}+\lambda_2\cdot\vec{b}+\lambda_3\cdot\vec{c}=\vec{0}$ $\begin{pmatrix}\neq 0 & 0 & 0\\ \ast & \neq 0 & 0\\ \ast & \ast & \neq 0\end{pmatrix}$

betr. lin. unabh. Vekt.

$\vec{x}\in[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k] \Rightarrow \exists\lambda_1,\dots,\lambda_k$: $\vec{x}=\lambda_1\cdot\vec{v}_1+\lambda_2\cdot\vec{v}_2+\dots+\lambda_k\cdot\vec{v}_k$

$\Downarrow$

Darstellung eindeutig

ang.: $\exists\mu_1,\dots,\mu_k$: $\vec{x}=\mu_1\cdot\vec{v}_1+\mu_2\cdot\vec{v}_2+\dots+\mu_k\cdot\vec{v}_k$

$: \vec{0}=\underbrace{(\lambda_1-\mu_1)}_{=0}\cdot\vec{v}_1+\underbrace{(\lambda_2-\mu_2)}_{=0}\cdot\vec{v}_2+\dots+\underbrace{(\lambda_k-\mu_k)}_{=0}\cdot\vec{v}_k$

$\Rightarrow \lambda_1=\mu_1\wedge\lambda_2=\mu_2\wedge\dots\wedge\lambda_k=\mu_k$

$B\subseteq V$ heißt Basis von V, falls gilt:

- B lin. unabh.
- $[B]=V$ (B ist Erzeugungssystem von V)

falls $|B|$ endl. $\Rightarrow$ endl. Basis

Bsp.:

$\mathbb{R}^2$: $B=\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\}$

Austauschlemma:

$M=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$, $\vec{a}=\mu_1\vec{v}_1+\dots+\mu_j\vec{v}_j+\dots+\mu_n\cdot\vec{v}_n$

und $M'=(M\setminus\{\vec{v}_j\})\cup\{\vec{a}\}=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_a,\dots,\vec{v}_n\}$

dann gilt:

- $[M']=[M]$
- M' lin. unabh. ($\Leftrightarrow$ M lin. unabh.)

Bsp.: $B'=\{\vec{c}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$

$\vec{c}_2=\lambda_1\vec{c}_1+\lambda_2\vec{b}_2\dots+\lambda_n\cdot\vec{b}_n$

$\Rightarrow B''=\{\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{b}_3,\dots,\vec{b}_n\}$ $\to$ Iteration

⋮

$\Rightarrow \vec{B}=\{\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_k,\vec{b}_{k+1},\dots,\vec{b}_n\}$

ang.: $k>n$ $\to$ ↯, da $k+1\in[B]$

ang.: C selbst Basis $\Rightarrow n=k$ ersetzbar

Dimension von V:

$\dim V=|B|$

Basen von V

Koordinatenabbildung:

$B=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$ $\Phi_B: V\to K^n$ "phi" $\to$ Abb. einer Lin.komb. in 1.dim. Array

$\vec{x}=\lambda_1\vec{b}_1+\dots+\lambda_n\vec{b}_n$: $\Phi_B(\vec{x})=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$

Φ_B ... bijektiv

$\Phi_B(\vec{x}+\vec{y})=\Phi_B(\vec{x})+\Phi_B(\vec{y})$

$\Phi_B(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda\cdot\Phi_B(\vec{x})$

Welche Matrizen haben inverse?:

$\exists B$: $A\cdot B=I_n$ Einheitsmatrix

Bsp.: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ $\to A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A ist invertierbar/regulär

$A\cdot\vec{x}$: $A\in K^{n\times n}=\{\vec{a}_1\,\vec{a}_2\dots\vec{a}_n\}$, $\vec{x}\in K^n=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$A\cdot\vec{x}=x_1\cdot\vec{a}_1+x_2\cdot\vec{a}_2+\dots+x_n\cdot\vec{a}_n$

Koeff. = Koord. von x

$A=(\vec{a}_1\dots\vec{a}_n)$... $\Leftrightarrow$ Spalten von A...

$A=\begin{pmatrix}\tilde{a}_1\\\vdots\\\tilde{a}_n\end{pmatrix}$... $\Leftrightarrow$ Zeilen von A...

... invertierbar ... bilden Basis

$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ "transponiert"

! $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

Spaltenrang (von A):

=Dimension der Lin. Hülle d. Spalte von A

$rg(A)=\dim[\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n]$

Zeilenrang (von A):

=Dimension der Lin. Hülle d. Zeilen von A

$rg(A^T)$

$\to rg(A)=rg(A^T)$

elem. Zeilen/Spaltenumf.:

- Mult. mit $\lambda\neq 0$
- Vertauschen
- Addieren von vielfachen zu anderer Zeile/Spalte

Elementarmatrizen:

$\to$ elem. Umf. auf Einheitsmatrix

$\Rightarrow$ Inversenbildung

$\begin{pmatrix}A\\\hline I_n\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Spalten-umf.}}\begin{pmatrix}I_n\\\hline A^{-1}\end{pmatrix}$

oder

$(A\mid I_n)\xrightarrow[\text{Zeilen-umf.}]{}(I_n\mid A^{-1})$

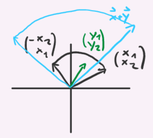
$A=\begin{matrix}1&2\\3&4\end{matrix}$ $I_n=\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$ $\to$ $\begin{matrix}1&0\\3&-2\\\hline 1&-2\\0&1\end{matrix}$ $\to$ $\begin{matrix}1&0\\0&-2\\\hline -2&-2\\1{,}5&1\end{matrix}$ $\to$ $\begin{matrix}1&0\\0&1\\\hline -2&1\\1{,}5&-0{,}5\end{matrix}$

$\cdot -2$

$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\1{,}5&-0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Lin. Abb.:

Bsp.: $(\mathbb{R}^2,+,\mathbb{R})$:



Drehung um 90°

$f(\vec{x}): \binom{x_1}{x_2}\mapsto\binom{-x_2}{x_1}$

$f(\vec{x}+\vec{y})=f(\vec{x})+f(\vec{y})$

$f(\lambda\cdot\vec{x})=\lambda\cdot f(\vec{x})$

Fortsetzungssatz:

$(V,+,K)$, $\dim V=n$

Voraus.: $(W,+,K)$, $f: V\to W$

Basis $B=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_n\}$ von V

$\Rightarrow \vec{x}\in V \Rightarrow f(\vec{x})$ eindeutig durch Bilder d. Basisvekt. bestimmt

Bsp.: $\vec{x}=\overset{\text{Koeff.}}{x_1}\cdot\vec{b}_1+\dots+x_n\cdot\vec{b}_n$

$f(\vec{x})=f(x_1\cdot\vec{b}_1+\dots+x_n\cdot\vec{b}_n)=f(x_1\cdot\vec{b}_1)+\dots+f(x_n\cdot\vec{b}_n)$

$=x_1\cdot\underbrace{f(\vec{b}_1)}_{\text{Bild d. Basis}}+\dots+x_n\cdot f(\vec{b}_n)$

$\left(\begin{array}{l}V=K^n,\ W=K^m\\ \text{Lin.Abb.}: f: V\to W\\ f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}\in K^{n\times m}\end{array}\right)$

$A\cdot\vec{x}=x_1\cdot\vec{a}_1+\dots+x_n\cdot\vec{a}_n$

$f(\vec{x})=x_1\cdot\underbrace{f(\vec{e}_1)}_{A\cdot\vec{e}_1}+\dots+x_n\cdot\underbrace{f(\vec{e}_n)}_{A\cdot\vec{e}_n}$ 1.kan. Basisvekt. $\binom{1}{0}$ $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$

A ... Abbildungsmatrix bzgl. kanonischer Basis

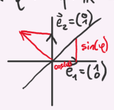
$f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}|&|&&|\\ f(\vec{e}_1)&f(\vec{e}_2)&\dots&f(\vec{e}_n)\\ |&|&&|\end{pmatrix}$

g, f lin. Abb.:

$\begin{matrix}g\circ f\\ \updownarrow\quad\updownarrow\\ B\cdot A\end{matrix}$ $\Rightarrow (g\circ f)(\vec{x})=B\cdot A\cdot\vec{x}$

entspr. Abb.matrix

Drehung um φ: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

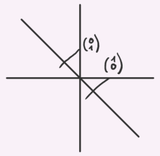


$f(\vec{x})=A\cdot\vec{x}$

$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$

$f(\vec{x})=\binom{x_1}{x_2}=A\cdot\vec{x}$

Projektion auf 2. Mediane:



$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Koordinatenwechsel in Vektorraum:

$B=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$, $\Phi_B: V\to K^n$

$C=\{\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_n\}$, $\Phi_C: V\to K^n$

$T_{BC}=\Phi_C\circ\Phi_B^{-1}$ T_{BC} ... Transformationsmatrix

$f(\vec{x})=T_{BC}\cdot\vec{x}$ $=\Phi_B^{-1}\cdot\binom{0}{0}$

$\Rightarrow T_{BC}=(\Phi_C\cdot\underbrace{\Phi_B^{-1}(\vec{e}_1)}_{\vec{b}_1},\dots,\Phi_C\cdot\underbrace{\Phi_B^{-1}(\vec{e}_n)}_{\vec{b}_n})$

Überlegung:

$x_1\cdot\vec{b}_1+\dots+x_n\cdot\vec{b}_n\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$\overset{?}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $\vec{b}_1$

$\Downarrow$

$T_{BC}=(\Phi_C(\vec{b}_1)\dots\Phi_C(\vec{b}_n))$

S. wenn Koordinaten von kan. Basis von B&C gegeben:

$\Phi_{BC}=T_{E,C}\cdot T_{B,E}$

$\to$ aber nur $T_{B,E}$ & $T_{C,E}$ gegeben

$\Rightarrow T_{E,C}=T_{C,E}^{-1}$

Bsp.:

$\Phi_{B,C}=T_{E,C}\circ T_{B,E}$ $E=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$

$\mathbb{R}^2$: $B=\{\binom{1}{2},\binom{2}{1}\}$

$C=\{\binom{1}{1},\binom{1}{-1}\}$ Koord. bzgl. E

$(\vec{x})=\binom{2}{1}$ Koord. bzgl. Basis B

$T_{B,E}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ $T_{B,C}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$T_{C,E}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$T_{e,c}=T_{C,E}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&2\\0&1&-1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$ $=T_{E,C}$

$T_{B,C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

Lineare Gleichungssysteme

Samstag, 13. Jänner 2024 14:59

Lineare Gleichungssysteme (19.12.–9.1. / S. 125–143)

LGS: in n Unbestimmte $x_1, \dots, x_n$ über Körper K, d.h. Koeff. aus K:

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 \quad \dots \quad + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 \quad \dots \quad + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

A //

$A \in K^{m\times n}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$

wenn $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ → homogen (sonst inhomogen)

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ $\quad (A|\vec{b}) = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}_{\text{erweiterte Systemmatrix}}$

Bsp.: $f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Bestimmung von $\ker(f)$:

$\ker f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ ($\vec{0}$: $\vec{e}$)

$\Rightarrow A\cdot\vec{x} = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 1x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{LGS}$$

$x_3 = t$: $x_2 = -t$, $x_1 = 2t$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\ker f = \{t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

Satz von Kronecker-Capelle:

LGS lösbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|\vec{b})$

Bsp.: in $\mathbb{R}$: (Ziel) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & -2 & 1 \end{array}\right)$ (A, $\vec{b}$) $\xrightarrow{\text{Umf.}}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\operatorname{rg} A = 2 \neq \operatorname{rg}(A|\vec{b}) = 3$

$\Rightarrow$ ↯

allg. Lösung von LGS:

$f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$ $\quad$ Lin. Abb. $f: K^n \to K^m$

$\to \exists \vec{x}_0 : A\cdot\vec{x}_0 = \vec{b}$ (eine Lösung (wenn vorhanden)) $\quad f(\vec{x}_0) = \vec{b}$, $f(\vec{0}) = \vec{0}$

$f(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$

$\vec{x} - \vec{x}_0 \in \ker f$

$\vec{x} \in \vec{x}_0 + \ker f$

$\Rightarrow L = \{\vec{x} : A\cdot\vec{x} = \vec{b}\} = \underbrace{\vec{x}_0 + \ker f}_{\text{Nebenraum (zu } \ker f)}$

$\ker f = \{\vec{x} \in K^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ → alle Lsg. von homogenen LGS

es gibt s Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \ker f$, sodass: lin. unabh.

$\ker f = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n] = \{t_1\vec{x}_1 + \dots + t_n\vec{x}_n\}$

$\Rightarrow$ die Lin. Hülle erzeugt jeden beliebigen Vektor, der eine Lösung des LGS ist

$\Rightarrow L = \underbrace{\{\vec{x}_0 + t_1\vec{x}_1 + \dots + t_s\vec{x}_s \mid t_1, \dots, t_s \in K\}}_{\text{Parameterdarstellung}}$

$f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$, $A \in K^{m\times n}$, $f: K^m \to K^n$ Lin. Abb.:

- wenn f surjektiv: $\operatorname{rg} A = m$
- wenn f injektiv: $\operatorname{rg} A = n$
- wenn $\vec{b} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ LGS immer lösbar, da $\vec{0}$ immer Lsg. ist

bete. $A \in K^{n\times n}$ quadr. Matrix

- wenn $\operatorname{rg} A = n$ (= Spalten lin. unab.)

$\Rightarrow A\cdot f(\vec{x}) = \vec{b}$ für alle $\vec{b}$ genau eine Lösung

(invertierbar $\Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{b}$)

Lösungen von LGS:

$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A' \end{array}\right|\vec{b}) = (I_n\, A'|\vec{b})$ → (optimalerweise) in diese Form bringen

$x_m + a_{m,m+1}\cdot x_{m+1} + a_{m,m+2}\cdot x_{m+2} + \dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m$

$x_m = b_m - a_{m,m+1}\cdot x_{m+1} - a_{m,m+2}\cdot x_{m+2} - \dots - a_{mn}\cdot x_n$

$x_i = b_i - a_{i,m+1}\cdot x_{m+1} - \dots - a_{in}\cdot x_n$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix} -\vec{a}_{m+1} \\ \vdots \\ -\vec{a}_{m+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + t_{n-m}\cdot\begin{pmatrix} -\vec{a}_n \\ \vdots \\ -\vec{a}_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix} -\vec{a}_{m+1} \\ \vec{e}_1 \end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix} -\vec{a}_{m+2} \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} + \dots + t_{n-m}\cdot\begin{pmatrix} -\vec{a}_n \\ \vec{e}_{n-m} \end{pmatrix}$

Gaußsche Eliminationsverfahren:

was darf man mit LGS "machen", ohne Änderung der Lösung

$(A|\vec{b}) \hat{=} A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ $\quad$ mult. mit Elementarmatrix (invertierbar)

$\Leftrightarrow S\cdot A\cdot\vec{x} = S\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow$ elem. Zeilenumf.

↳ zus. Spaltenvert.

$(A|\vec{b}) \to (A^*|\vec{b}^*)$

Fall 1: r Zeilen, m Spalten, a_{11}, $\neq 0$, a_{rr}

$(\operatorname{rg}) r < (\operatorname{rg}) m$

$\Rightarrow$ LGS unlösbar

Fall 2: a_{11}, $\neq 0$, a_{rr}

$r = n$

$\Rightarrow$ LGS endl. lösbar

Fall 3: a_{11}, $\neq 0$, a_{rr}

$r < n$

$\Rightarrow$ LGS NICHT endl. lösbar (mehrdeutige Lsg.)

Determinanten:

Berechnen:

- $n = 1$: $A = (a_{11})$ $\quad \pi\cdot(1)$

$\to \det A = a_{11}$

- $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ → (π_2) 1. Spalte 2. El., 2. Spalte 1. El.

$\to \det A = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$

- $n = 3$ $\quad$ Regel von Sarrus:

$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$

$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - \dots$

Dreiecksmatrix:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\dots\cdot a_{nn}$

Eigenschaften:

- $\det A = \det(A^T)$ → (Zeilen & Spalten getauscht)
- $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$ (falls invertierbar)

- "Wirkung":
  - A'... Spalte/Zeile $\cdot\lambda$

$\Rightarrow \det A' = \det A$ ↯ nachdenken

  - A'... Spalte/Zeile $\cdot\lambda \neq 0$

$\Rightarrow \det A' = \lambda\cdot\det A$

  - A'... Spalten/Zeilen vertauscht

$\Rightarrow \det A' = -\det A$

Kofaktor:

$A = (\vec{a}_1\vec{a}_2 \dots \vec{a}_i \dots \vec{a}_n)$ oder $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 1 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad$ auf 0 durch $\to +\lambda\cdot\vec{e}_i$ löschen

$A' = (\vec{a}_1\vec{a}_2 \dots \vec{e}_i \dots \vec{a}_n)$

Kofaktor $A_{ij} = \det A'$ $\quad = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$\hat{A}$... Matrix der Kofaktoren aus A

$\hat{A} = (A_{ij})_{1\le i,j\le n}$

D_{ij}... det von Matrix ohne i-te Zeile & j-te Spalte

$\Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$

Laplacesche Entwicklungssatz:

(Zeilen)

$\det A = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \dots + a_{in}\cdot A_{in}$

$\Rightarrow a_{i1}\cdot(-1)^{i+j}\cdot D_{i1} + a_{i2}\cdot(-1)^{i+j}\cdot D_{i2} + \dots + a_{in}\cdot(-1)^{i+j}\cdot D_{in}$

nach Spalten gleich:

$(a_{1j}\cdot A_{1j} + \dots + a_{nj}\cdot A_{nj})$

Bsp.: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Aussagen von Determinanten

$\det A = 0$:
- Spalten & Zeilen lin. abh.
- $\operatorname{rg} A < n$
- singulär (nicht invertierbar)

$\det A \neq 0$: invertierbar $\Rightarrow A\cdot\frac{\hat{A}^T}{\det A} = I_n$ (T → transponiert (Z. und S. getauscht))

↳ $= A^{-1}$

Eigenwerte & Eigenvektoren:

Lin. Abb. $f: V \to V$

Skalar $\lambda \in K$ Eigenwert, wenn:

$\exists \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}: f(\vec{x}) = \lambda\cdot\vec{x}$

Eigenvektor (zum EW)

analog $A \in K^{n\times n}$ (quadr. Matrix):

$\exists \vec{x} \in K^n \setminus \{\vec{0}\}: A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}$

Eigenwert, Eigenvektor (zum EW)

Eigenwert berechnen:

$A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}$ $\quad (= \lambda\cdot I_n\cdot\vec{x})$

$\Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{(\lambda\cdot I_n - A)}_{\text{quadr. Matrix}}\cdot\vec{x} = \vec{0}}_{\text{LGS, } n \text{ Unbestimmte}}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$

λ EW, wenn: LGS bes. nichtriv. Lösung

$(= \lambda\cdot I_n - A$ singulär / $\det(\lambda\cdot I_n - A) = 0)$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det(\lambda\cdot I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$ *

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$ $\quad \lambda_1 = 1$ $\quad \lambda_2 = -1$

Eigenvektor berechnen:

zu EW λ:

$(\lambda\cdot I_n - A)\cdot\vec{x} = \vec{0}$

bei Bsp.* einsetzen:

$\lambda_1 = 1$:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = t_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_1 \neq 0$

wenn keine Zeile weglässt → Fehler

$\lambda_2 = -1$:

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = t_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t_2 \neq 0$

λ EW von $A \in K^{n\times n}$

$\Leftrightarrow \det(\lambda\cdot I_n - A) = 0$

↓ Polynom in λ von Grad n

$\chi_A(\lambda)$... charakteristisches Polynom

Nullstellen von $\chi_A(\lambda) \hat{=}$ EW von A

(höchstens n NST, d.h. n versch. EW)

Bsp.: (von oben) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2 \to \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ 2 lin. unabh. EV

$\lambda_2 = -1 \to \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EV

$A\cdot\vec{x}_1 = 2\cdot\vec{x}_1$
$A\cdot\vec{x}_2 = 2\cdot\vec{x}_2$
$A\cdot\vec{x}_3 = (-1)\cdot\vec{x}_3$

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{c} \\ x_1\ x_2\ x_3 \end{array}$

$A\cdot T = (A\cdot\vec{x}_1 \;\; A\cdot\vec{x}_2 \;\; A\cdot\vec{x}_3) = (2\vec{x}_1 \;\; 2\vec{x}_2 \;\; (-1)\vec{x}_3)$

$= (\vec{x}_1 \;\; \vec{x}_2 \;\; \vec{x}_3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A\cdot T = T\cdot\operatorname{diag}(2,2,-1)$ $\quad | T^{-1}$

$A = T\cdot\operatorname{diag}(2,2,-1)\cdot T^{-1}$ → A ist diagonalisierbar

weiteres (größeres) Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda\cdot I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -6 & \lambda-2 & 3 \\ -6 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$

$\det(\lambda\cdot I_3 - A) = (\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underbrace{(\lambda-2)}_{=0}\underbrace{(\lambda-2)}_{=0}\underbrace{(\lambda+1)}_{=0}$

$\lambda_1 = 2$ $\quad \lambda_2 = -1$

EV zu $\lambda_1 = 2$:

LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \vec{x} = t_1\cdot\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $(t_1, t_2) \neq (0,0)$

EV zu $\lambda_2 = -1$

LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$ $\quad \vec{x} = t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

S.: Sei $A \in K^{n\times n}$, falls $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ lin. unabh. Vektoren

sodass $\begin{array}{ccc} \vec{x}_1 & \text{EV zu EW} & \lambda_1 \\ \vdots & -\,//\,- & \vdots \\ \vec{x}_n & -\,//\,- & \lambda_n \end{array}$ $\Big|\; T = (\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$

dann: $A = T\cdot\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\cdot T^{-1}$

NICHT alle $A \in K^{n\times n}$ sind diagonalisierbar

Skalarprodukt, ONB, Definitheit

Montag, 22. Jänner 2024 09:51

Skalarprodukt, ONB, Definitheit (11.1. / S. ?)

Skalarprodukt:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

$$\| \quad (\vec{x} \cdot \vec{y}), \ (\vec{x}^T \cdot \vec{y}) \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

Skalarprod. Matrizenmult. $\rightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$ orthogonal

Eigenschaften:

- symmetrisch: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$
- Linear in jedem Argument: $\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, y \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle$, $\langle \lambda \cdot \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0 \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\|\vec{x}\|$ ... Länge von x

$\|\vec{x}\| = 1 \rightarrow \vec{x}$ ist normiert

Eigenschaften:

- $\|\vec{x}\| \geq 0, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$
- Dreiecksungleichung: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Cauchy-Scharsche Ungleichung:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \quad *$$

Skalar $\leq$ Produkt der Längen

Orthonomalbasis:

$B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ ONB, falls:

$$\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n: \ \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{b}_i \rangle \cdot \vec{b}_j$

$\Rightarrow$ Koordinaten: $\begin{pmatrix} \langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{x}, \vec{b}_n \rangle \end{pmatrix}$

Bsp.: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B Basis: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \vec{b}_i$ eindeutig darstellbar

$$\langle \vec{x}, \vec{b}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \langle b_i, b_j \rangle = \mu_j \cdot 1 = \underline{\underline{\mu_j}}$$

rausziehen

nur bei $i = j$ 1 $\quad = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

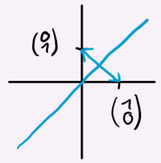
Orthogonalmatrix:

ONB $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$

$$P = (\vec{b}_1 \, \vec{b}_2 \dots \vec{b}_n)$$

$\hookrightarrow$ Spaltenvekt. ONB

Bsp.:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^T \cdot P = \begin{pmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vdots \\ \vec{b}_n^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$$

$$= \vec{b}_i^T \cdot \vec{b}_j = \langle b_i, b_j \rangle \Rightarrow I_n$$

$$\Rightarrow P^{-1} = P^T$$

Spektralsatz:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $(A = A^T)$

$\Rightarrow$
- A bes. lauter reeller Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- es gibt ONB aus Eigenvektoren von A $(B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\})$

Folgerung: A diagonalisierbar

$$A = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P^T$$

$P = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$ } Orthogonalm.

EV

Definitheit einer Matrix

$A \in \mathbb{R}^n$: sym. reelle Matrix

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$$

quadr. Form

A pos. definit: $q(\vec{x}) > 0$

A negativ definit: $q(\vec{x}) < 0$

A indefinit: $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2: q(\vec{x}_1) > 0 \wedge q(\vec{x}_2) < 0$

Definitheitsverhalten bestimmen:

1.) EW:
- alle $> 0 \Rightarrow$ pos. def.
- alle $< 0 \Rightarrow$ neg. def.
- $\lambda_i < 0, \lambda_j > 0 \Rightarrow$ indef.

2.) Hauptminorienkriterien:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad M_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ k-ter Hauptm.

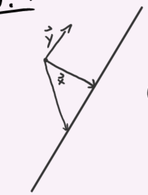
- A pos. def. $\Rightarrow M_k > 0 \quad , \forall k \in \{1, \dots, n\}$
- A neg. def. $\Rightarrow M_k < 0 \quad (-M_k$ positiv$)$

$\Leftrightarrow M_k < 0$ k ungerade
$M_k > 0$ k gerade

- $M \neq 0$ $(\det A \neq 0)$ & A $\neg$pos und $\neg$neg def. $\Rightarrow$ indefinit

$*$

Bsp.:



$\vec{x} - \lambda \cdot \vec{y}$

$$0 \leq \|\vec{x} - \lambda \cdot \vec{y}\| = \langle x - \lambda \cdot \vec{y}, x - \lambda \cdot \vec{y} \rangle =$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - 2 \cdot \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda^2 \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

$$= \|\vec{x}\|^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \lambda^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$$

wähle $\lambda = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}$

$$0 \leq \|\vec{x}\|^2 - \frac{2 \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^2} + \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^4} \cdot \|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^2} \leq \|\vec{x}\|^2 \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$$

$$= |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2| \leq \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2$$

Δ-Ungl.:

$$\underline{\|\vec{x} + \vec{y}\|^2} = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \leq$$

C.S.

$$\leq \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2$$

$$= \underline{(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2}$$

Differenzengleichungen

Montag, 22. Jänner 2024 09:49

Abschnitt 7.1 - 7.3

Differenzengleichungen (12.1.- 18.1. / S. ?)

rek. Def. von Folgen:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$

allg: $x_{n+1} = f(n, x_n)$

$F(n, x_n, x_{n+1}) = 0$

Bsp.: (1)

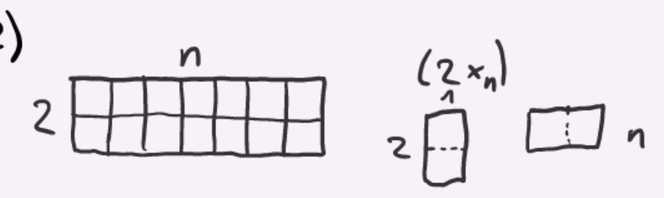
"Türme von Hanoie"

$x_n = 2\cdot x_{n-1} + 1 \rightarrow x_n = 2^n - 1$ (Partikulärlsg. (der Dgl.))

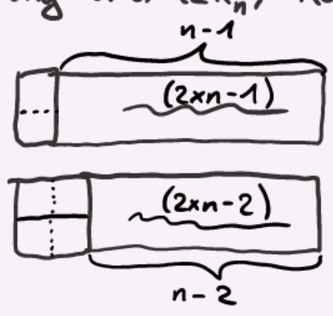
Differenzengleichung 1. Ordnung

$\rightarrow x_n = C\cdot 2^n - 1$ (allg. Lsg. (der Dgl.))

(2)



x_n ... # Pflasterung eines $(2\times x_n)$ Rechtecks mit Fliesen (1×2)



Dgl 2. Ordnung

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \ n \geq 2$

$x_0 = 1, \ x_1 = 1$

Dgl. k-ter Ord.: $x_{n+k} = f(n, x_n, \dots, x_{n+k-1})$

Lin. Dgl. k-ter Ord:

$a_k(n)\cdot x_{n+k} + a_{k-1}(n)\cdot x_{n+k-1} + \dots + a_0(n)\cdot x_n = S(n)$

(potentielle) Störfunktion

$S(n) = 0$ homogene Fkt, sonst inhomogen

Lin. Dgl. 1. Ordnung:

Spezialfall: konst. Koeff.

$x_{n+1} = a\cdot x_1 + b, \ a,b\in\mathbb{R}, \ a\neq 0$

$x_n = a\cdot x_{n-1} + b$

(umformen $\Rightarrow$) $\underbrace{\frac{x_n}{a^n}}_{y} = \underbrace{\frac{x_{n-1}}{a^{n-1}}}_{y-1} + \frac{b}{a^n}$

$y_n = y_{n-1} + \frac{b}{a^n} = y_0 + b\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a^i}$

berechnen: $x_n = \begin{cases} a^n\cdot x_0 + \frac{a^n-1}{a-1}, & a\neq 1 \\ x_0\cdot b_n, & a = 1\end{cases}$

allg.: $x_{n+1} = a_n\cdot x_n + b_n \Leftrightarrow x_n = a_{n-1}\cdot x_{n-1} + b_{n-1}$ *

Allgemeine Lsg:

$x_n = x_n^{[h]} + x_n^{[p]}$ → eine Partikulärlsg. der urspr. inhomog. Dgl.

$x_n^{[h]}$: allg. Lsg. der homog. Dgl.

$x_n^{[h]}$ bestimmen:

$x_n = a_{n-1}\cdot x_{n-1} = a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot x_{n-2} = a_{n-1}\cdots a_0\cdot x_0$

$= \underbrace{x_0}_{=C}\cdot\prod_{i=0}^{n-1} a_i$

$\Rightarrow x_n^{[h]} = C\cdot\prod_{i=0}^{n-1} a_i, \ C\in\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

eine $x_n^{[p]}$ bestimmen:

"Methode der Variation der Konstanten":

Ansatz: $x_n^{[p]} = C_n\cdot\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ in * einsetzen

$C_n\cdot\prod_{i=0}^{n-1} a_i = a_{n-1}\cdot C_{n-1}\cdot\prod_{i=0}^{n-2} a_i + b_{n-1} \quad / \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} a_i}$

$C_n = C_{n-1} + \underbrace{\frac{b_{n-1}}{\prod_{i=0}^{n-1} a_i}}_{\beta_{n-1}}$

⋮ iterieren

$\Rightarrow C_n = C_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k$

1 Lsg gebraucht $\Rightarrow$ z.B. $C_0 = 0$

$x_n^{[p]} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{\prod_{i=0}^{k} a_i}$

$\Rightarrow x_n^{[h]} + x_n^{[p]} = C\cdot\prod_{i=0}^{n-1} a_i + \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{\prod_{i=0}^{k} a_i}$

(nur theoretisch wissen, wie es funktioniert)

"Methode der unbest. Koeff":

$x_{n+1} = a\cdot x_n + b_n$

a ↓ konstant

großes Bsp.: fixpunktfreie Perm. (= Arrangements)

$x_n = |\{\pi\in S_n : \pi(i)\neq i, \ \forall i\}|$

↳ # fixpunktfreie Perm. auf $\{1,\dots,n\}$

↳ keine Schlingen

$\Rightarrow x_n$ erfüllt lin. Dgl. 1. Ord.

$x_n = n\cdot x_{n-1} + (-1)^n, \ n\geq 1$

n	0	1	2
x_n	1	0	1

Idee.: Bestimmen Dgl. 2. Ord. für x_n:

Fall 1: n im 2-er Zyklus

wird Fixpunkt hinausscheiden

$(n-1)\cdot x_{n-2}$, 2 El. fallen weg

Fall 2: n im Zyklus ≥ 3

$x_n = (n-1)\cdot(x_{n-1} + x_{n-2}), \ n\geq 2$

$(n-1)\cdot x_{n-1}$, 1 El. fällt weg

$-n\cdot x_{n-1}$

umformen $\underbrace{x_n - n\cdot x_{n-1}}_{y_n} = -\underbrace{(x_{n-1} - (n-1)\cdot x_{n-2})}_{y_{n-1}}$

$y_n = -y_{n-1} = (-1)\cdot(-1)\cdot y_{n-2} = \dots = (-1)^{n-2}\cdot(y_2)$

$y_2 = x_2 - 2x_1 = 1 - 2\cdot 0 = 1$

$\Rightarrow y_n = (-1)^{n-2} = (-1)^n$

$x_n - n\cdot x_{n-1} = (-1)^n$

homogene Lsg. suchen:

$x_n = n\cdot x_{n-1} + (-1)^n \Leftrightarrow x_{n+1} = \underbrace{(n+1)}_{a_n}\cdot x_n + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{b_n}$

weglassen

$x_n^{[h]} = C\cdot n\cdot(n-1)\cdots 1 = C\cdot n!$

Partikulärlsg. suchen:

$x_n^{[p]} = C_n\cdot n!$ einsetzen $\Rightarrow C_n\cdot n! = n\cdot C_{n-1}\cdot(n-1)! + (-1)^n$

$C_n\cdot n! = C_{n-1}\cdot n! + (-1)^n \quad / \frac{1}{n!}$

$C_n = C_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$

⋮ iterieren

$C_n = C_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

→ 0 setzen

allg. Lsg.: $x_n = C\cdot n! + n!\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

C an Startwert anpassen: $x_0 = 1$:

$1 = C\cdot 0! + 0!\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{0}\frac{(-1)^k}{k!}}_{=0} \Rightarrow C = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$

zusammenführen (mit $\frac{(-1)^k}{k!}$)

$x_n = n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

2. Ordnung:

Lsg. von hom. Dgl. (Vor. konstante Koeff.):

Potenzsatz:

$x_{n+2} + a\cdot x_{n+1} + b\cdot x_n = 0$

$x_n = \lambda^n \Rightarrow \lambda^n\cdot(\lambda^2 + \lambda\cdot a + b) = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda\cdot a + b = 0$ (kl. Lsg formel)

$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \left(= \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\right)$

Diskrim. >0: 2 reelle NST

<0: 2 konj. kompl. NST

$\Rightarrow x_n^{[h]} = C_1\cdot\lambda_1^n + C_2\cdot\lambda_2^n$

$=0$: Doppel NST

$\Rightarrow x_n^{[h]} = C_1\cdot\lambda_1^n + C_2\cdot n\cdot\lambda_1^n$

Bsp.: Fibonacci-Folge

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \ x_0 = x_1 = 1$

$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$

$\Rightarrow x_{n+2} = C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$n=0$: $1 = C_1 + C_2$

$n=1$: $1 = C_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

} LGS für C_1, C_2

$\Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$